

MAE 5871 - Aula 4

Quatro situações:

1. **Tempo contínuo e frequência discreta;**
2. Tempo contínuo e frequência contínua;
3. Tempo discreto e frequência contínua;
4. **Tempo discreto e frequência discreta.**

Tempo discreto e frequência discreta

Suponha $f(t)$ uma função de quadrado integrável:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

e queremos amostrá-la em intervalos de tempos equiespacados, $0, \pm\Delta t, \pm2\Delta t, \dots$

Suponha $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$ um número finito de valores amostrados de $f(t)$.

Consideremos $\Delta t = 1$, $\lambda_n = 2\pi n/N$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ (conjunto das frequências de Fourier).

A transformada Discreta de Fourier da sequência f_j é definida por:

$$F_n(\lambda_n) = d^N(\lambda_n) = \sum_{t=0}^{N-1} f_t e^{-i\lambda_n t}$$

Sendo que a transformada inversa é:

$$f_t = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n(\lambda_n) e^{i\lambda_n t}$$

Essa transformada discreta é muito importante nas aplicações e será usada extensivamente neste curso, ao se estimar o espectro de um processo estacionário.

Algoritmo direto: operação N^2 ; FFT: $N \ln N$

Teorema de Parseval:

$$\sum_t |f_t|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |F_n(\lambda_n)|^2$$

Núcleos e Janelas

Uma função periódica de período T e de quadrado integrável:

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt < \infty$$

Então

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n t}, \quad (1)$$

$\lambda_n = 2\pi n/T$: frequências de Fourier.

Os coeficientes c_n (coeficientes de Fourier) são dados por

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\lambda_n t} dt \quad (2)$$

Seja

$$\begin{aligned} f_N(t) &= \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\lambda_n t} \\ &= \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(u) e^{-i\lambda_n u} du \right) e^{i\lambda_n t} \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{T} f(u) \sum_{n=-N}^N e^{-i\lambda_n u} e^{i\lambda_n t} \right] du \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{T} f(u) \sum_{n=-N}^N e^{i\lambda_n (t-u)} \right] du \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{T} f(u) \sum_{n=-N}^N e^{i \frac{2\pi n}{T} (t-u)} \right] du \end{aligned}$$

Pristly (p. 437):

$$\sum_{s=-N}^N \cos(s\theta) = \frac{\text{sen}[(N + \frac{1}{2})\theta]}{\text{sen}(\frac{\theta}{2})}$$

$= D_N(\theta)$: núcleo de Dirichlet

$$\sum_{n=-N}^N e^{i\frac{2\pi n}{T}(t-u)} = \sum_{n=-N}^N \cos\left(\frac{2\pi(t-u)n}{T}\right) =$$

$$\frac{\text{sen}[(N + \frac{1}{2})2\pi(t-u)/T]}{\text{sen}(\frac{2\pi(t-u)}{2T})} = D_N\left(\frac{2\pi}{T}(t-u)\right)$$

$$f_N(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{T} D_N\left(\frac{2\pi}{T}(t-u)\right) f(u) du$$

$D_N(t)$ é uma janela pela qual $f_N(t)$ “vê” $f(t)$.

Propriedades:

1. $D_N(t)$ é uma função par.
2. $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{T} D_N(t) dt = 1$.
3. $D_N(2\pi/T)$ é uma função periódica de período 2π
4. $D_N(0) = 2N+1$.

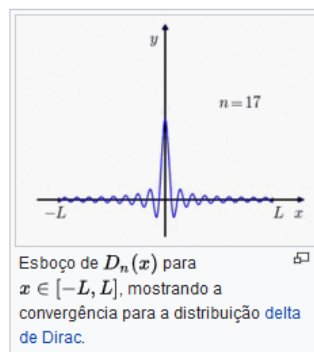
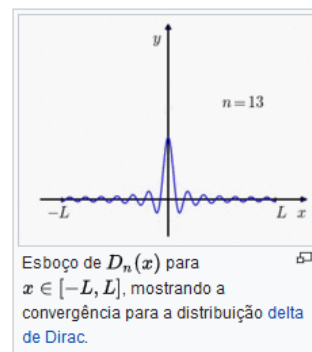
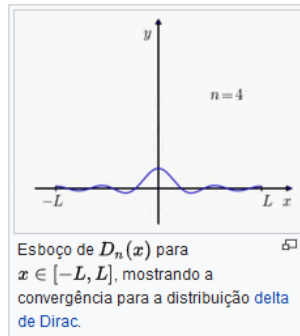
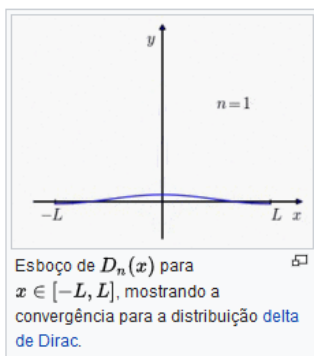
De um modo geral se $f(t)$ e $g(t)$ são funções periódicas, de período T , tal que

$$g(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} K(t-u)f(u)du$$

Dizemos que $K(\cdot)$ é uma janela através do qual $g(t)$ “vê” $f(t)$. As propriedades necessárias de $K(\cdot)$ são:

1. $\int_{-T/2}^{T/2} K(t) dt = 1$.
2. $K(-t) = K(t)$
3. $|K(t)| \leq K(0)$, para todo t .

Aproximação de $f(t)$ através de $f_N(t)$ será boa se o núcleo $D_N(\cdot)$ for concentrado ao redor do ponto t .



Para que $f_N(t)$ convirja para $f(t)$, quando $N \rightarrow \infty$, em algum sentido, $f(t)$ deve satisfazer certas condições de regularidade.

Teorema de aproximação de Weierstrass:

Se $f(t)$ for uma função real, continua, definida no intervalo $[a,b]$, existe uma sucessão de polinômios que converge uniformemente para $f(t)$ em $[a,b]$.

Fejér (1904) propôs uma maneira de construir polinômios harmônicos convergentes para $f(t)$:

Considere uma função periódica de período T

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\lambda_n t) + b_n \sin(\lambda_n t))$$

E considere a média

$$\sigma_{N+1}(t) = \frac{1}{N+1} [f_0(t) + f_1(t) + \dots + f_N(t)]$$

Então prova-se que:

a) $\sigma_{N+1}(t)$ converge para $f(t)$ uniformemente;

b) $\sigma_{N+1}(t) = \sum_{n=-N}^N (1 - \frac{|n|}{N+1}) c_n e^{i\lambda_n t}$

c)

$$\sigma_{N+1}(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F_{N+1} \left[\frac{2\pi}{T} (t-u) \right] f(u) du$$

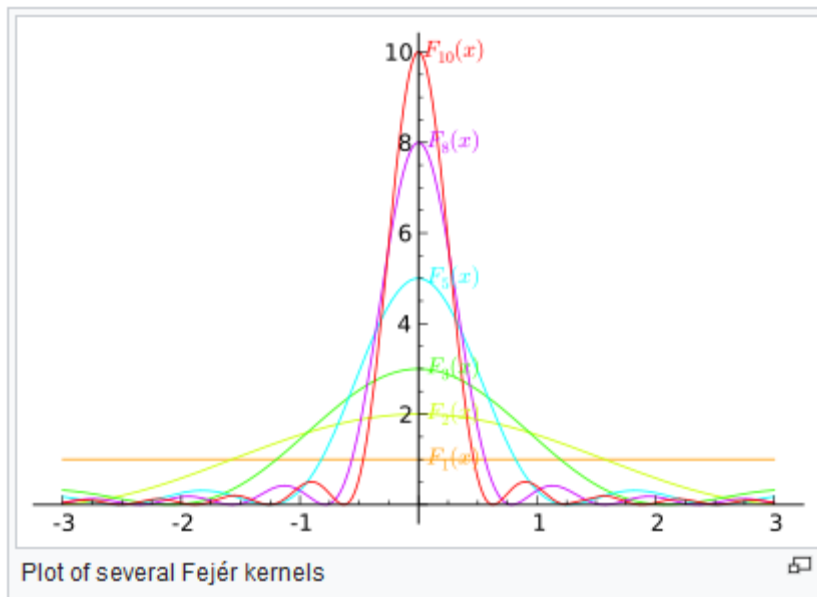
$$F_{N+1}(t) = \frac{1}{T(N+1)} \left[\frac{\sin^2 \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) t \right]}{\sin^2 \left(\frac{t}{2} \right)} \right] \text{ para } t \neq 0, \pm T, \pm 2T, \dots$$

Propriedades do núcleo de Fejér:

a) $F_{N+1}(t)$ é uma função par

b) $\int_{-T/2}^{T/2} F_{N+1}(t) dt = 1$

- c) $F_{N+1}(2\pi/T)$ é contínua, periódica, de período T
 d) $F_{N+1}(0) = (N+1)/T$



Observação:

1. $F_{N+1}(t)$ é mais concentrado em torno da origem que o núcleo de Dirichlet.
2. $F_{N+1}(t) \geq 0$ para todo t e os pontos laterais têm magnitudes pequenas quando comparadas com a do pico central.

De uma maneira geral:

$$\begin{aligned}
 f^{(N)}(t) &= \sum_{n=-N}^N h\left(\frac{n}{N}\right) c_n e^{i\lambda_n t} \\
 &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} H^{(N)}\left[\frac{2\pi}{T}(t-u)\right] f(u) du
 \end{aligned}$$

Com

$$H^N(t) = \frac{1}{T} \sum_n h\left(\frac{n}{N}\right) e^{-int}$$

$h(n/N)$: fator de convergência, coeficientes geradores de janelas, tapers e data Windows, que é definida no domínio do tempo.

$H^N(.)$: núcleo ou janela, janela espectral, é definida no domínio da frequência.

Example 4.1 A Periodic Series

Figure 4.1 shows an example of the mixture (4.3) with $q = 3$ constructed in the following way. First, for $t = 1, \dots, 100$, we generated three series

$$x_{t1} = 2 \cos(2\pi t 6/100) + 3 \sin(2\pi t 6/100)$$

$$x_{t2} = 4 \cos(2\pi t 10/100) + 5 \sin(2\pi t 10/100)$$

$$x_{t3} = 6 \cos(2\pi t 40/100) + 7 \sin(2\pi t 40/100)$$

These three series are displayed in Figure 4.1 along with the corresponding frequencies and squared amplitudes. For example, the squared amplitude of x_{t1} is $A^2 = 2^2 + 3^2 = 13$. Hence, the maximum and minimum values that x_{t1} will attain are $\pm\sqrt{13} = \pm 3.61$.

Finally, we constructed

$$x_t = x_{t1} + x_{t2} + x_{t3}$$

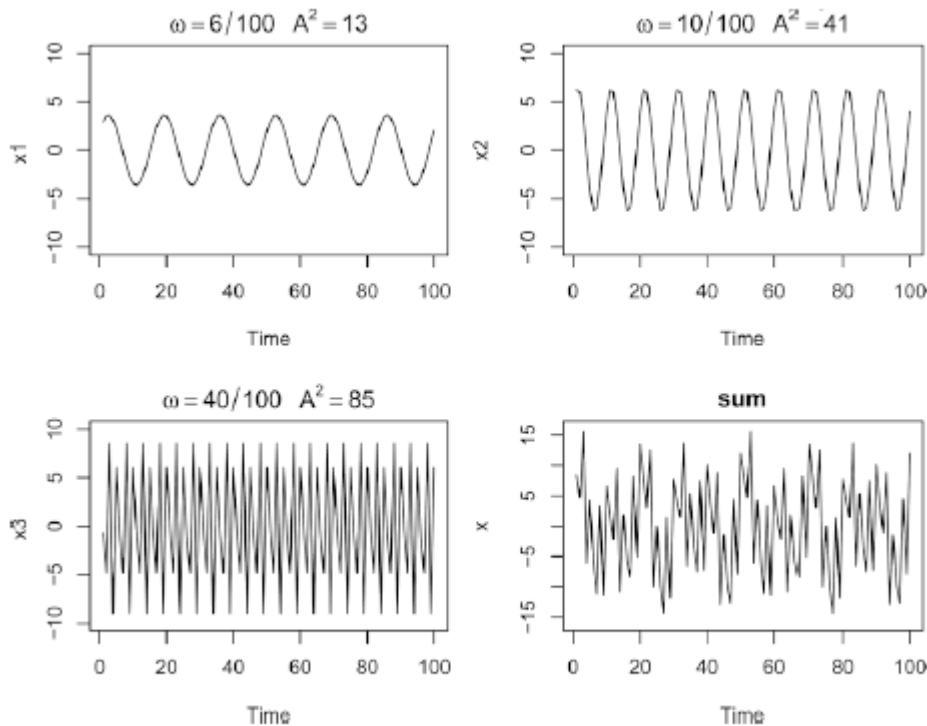


Fig. 4.1. Periodic components and their sum as described in Example 4.1.

Example 4.2 The Scaled Periodogram for Example 4.1

In §2.3, Example 2.9, we introduced the periodogram as a way to discover the periodic components of a time series. Recall that the scaled periodogram is given by

$$P(j/n) = \left(\frac{2}{n} \sum_{t=1}^n x_t \cos(2\pi t j/n) \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \sum_{t=1}^n x_t \sin(2\pi t j/n) \right)^2, \quad (4.6)$$

and it may be regarded as a measure of the squared correlation of the data with sinusoids oscillating at a frequency of $\omega_j = j/n$, or j cycles in n time points. Recall that we are basically computing the regression of the data on the sinusoids varying at the fundamental frequencies, j/n . As discussed in Example 2.9, the periodogram may be computed quickly using the fast Fourier transform (FFT), and there is no need to run repeated regressions.

The scaled periodogram of the data, x_t , simulated in Example 4.1 is shown in Figure 4.2, and it clearly identifies the three components x_{t1} , x_{t2} , and x_{t3} of x_t . Note that

$$P(j/n) = P(1 - j/n), \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

so there is a mirroring effect at the folding frequency of $1/2$; consequently, the periodogram is typically not plotted for frequencies higher than the folding frequency. In addition, note that the heights of the scaled periodogram shown in the figure are

$$P(6/100) = 13, \quad P(10/100) = 41, \quad P(40/100) = 85,$$

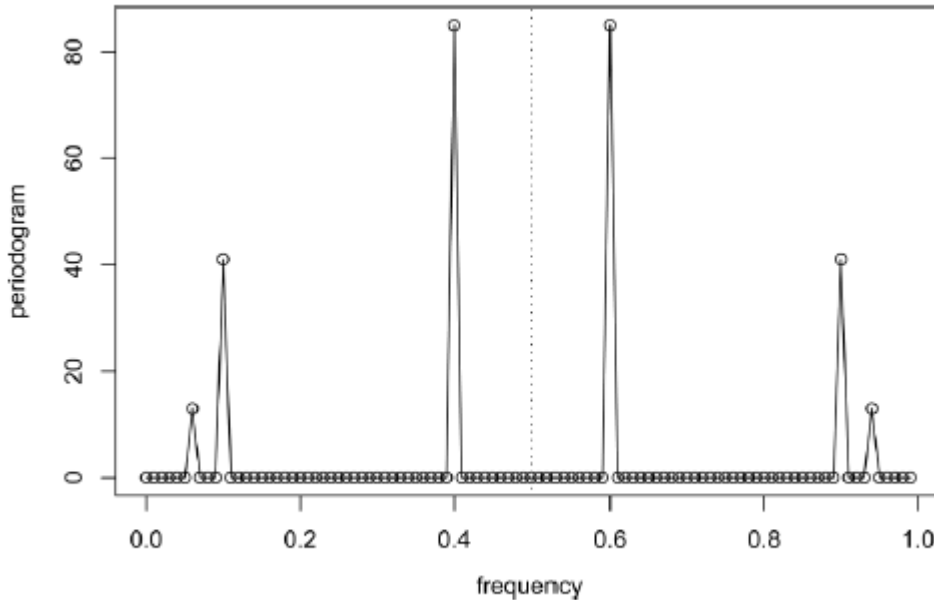


Fig. 4.2. Periodogram of the data generated in Example 4.1.