

Exemplos de Processos Estocásticos

Exemplo 2.1: Sequência Aleatória

Consideremos $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ uma sequência de v.a. definidas no mesmo espaço amostral Ω . Aqui, $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots\}$, e temos um processo com parâmetro discreto, ou uma sequência aleatória. Para todo $n \geq 1$, podemos escrever

$$\begin{aligned} & P\{X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n\} \\ &= P\{X_1 = a_1\}P\{X_2 = a_2|X_1 = a_1\} \dots P\{X_n = a_n|X_1 = a_1, \dots, X_{n-1} = a_{n-1}\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

uma sequência $\{X_n, n \geq 1\}$ de v.a. *mutuamente independentes* e, nesse caso, (2.13) fica

$$P\{X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n\} = P\{X_1 = a_1\} \dots P\{X_n = a_n\}. \quad (2.14)$$

Se as v.a. $X_1, X_2, \dots$ tiverem todas a mesma distribuição, teremos, então, uma sequência de v.a. independentes e identicamente distribuídas (*i.i.d.*). Nesse caso, o processo X_n é estacionário. Se $E\{X_n\} = \mu, Var\{X_n\} = \sigma^2$, para todo $n \geq 1$, então

$$\gamma_\tau = Cov\{X_n, X_{n+\tau}\} = \begin{cases} \sigma^2, & \text{se } \tau = 0, \\ 0, & \text{se } \tau \neq 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Segue-se que $\rho_\tau = 1$, para $\tau = 0$, e $\rho_\tau = 0$, caso contrário.

Definição 2.5. Dizemos que $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ é um ruído branco com tempo discreto se as v.a. ε_t são não correlacionadas, isto é, $Cov\{\varepsilon_t, \varepsilon_s\} = 0, t \neq s$.

Uma sequência de v.a. *i.i.d.*, como definida acima, é chamada processo puramente aleatório.

Notações:

Ruído branco com média zero:

$$\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Um processo puramente aleatório:

$$\varepsilon_t \sim i.i.d. (0, \sigma_\varepsilon^2).$$

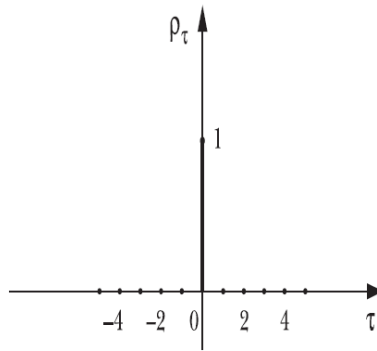


Figura 2.2: Função de autocorrelação do ruído branco.

Exemplo 2.2. *Passeio Casual*

Considere uma sequência aleatória $\{\varepsilon_t, t \geq 1\}$, de v.a. i.i.d. $(\mu_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^2)$. Defina a sequência

$$X_t = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_t. \quad (2.16)$$

Segue-se que $E(X_t) = t\mu_\varepsilon$ e $Var(X_t) = t\sigma_\varepsilon^2$, ou seja, ambas dependem de t . Não é difícil mostrar que

$$\gamma_X(t_1, t_2) = \sigma_\varepsilon^2 \min(t_1, t_2)$$

e, portanto, a autocovariância de X_t depende de t_1 e t_2 . O processo (2.16) é chamado *passeio casual*, e à medida que o tempo passa, X_t tende a oscilar ao redor de $t\mu_\varepsilon$ com amplitude crescente. O processo é claramente não estacionário.

Exemplo 2.3. Processo de Poisson

Suponha que estejamos interessados no número de eventos de certo tipo que ocorrem num intervalo de tempo $(0, t]$. Por exemplo, podemos contar o número de chamadas telefônicas que chegam a uma central de atendimentos nesse intervalo, ou o número de partículas radioativas registradas por um contador Geiger etc. O intervalo $(0, t]$ não necessita ser um intervalo de tempo. Podemos estar interessados no número de defeitos de um fio a cada 100 m, ou no número de acidentes em um trecho de uma rodovia.

Denotando por $\{N(t), t \geq 0\}$ o número de eventos em $(0, t]$, dizemos que esse é um *processo de Poisson com intensidade λ* se as condições seguintes forem satisfeitas:

- (i) $N(0) = 0$;
- (ii) para todas as escolhas de $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ em $(0, \infty)$, as v.a.'s $N(t_1) - N(t_0), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ são independentes;
- (iii) para qualquer escolha de t_1, t_2 e τ positivos, as v.a.'s $N(t_2 + \tau) - N(t_1 + \tau)$ e $N(t_2) - N(t_1)$ têm a mesma distribuição;
- (iv) para todos s, t , $s < t$, a v.a. $N(t) - N(s)$ tem uma distribuição de Poisson com média $\lambda(t - s)$, ou seja,

$$P\{N(t) - N(s) = k\} = \frac{e^{-\lambda(t-s)}[\lambda(t-s)]^k}{k!}, \quad (2.17)$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$

Segue-se que $E\{N(t) - N(s)\} = \text{Var}\{N(t) - N(s)\} = \lambda(t - s)$. O parâmetro λ dá a taxa de ocorrência de eventos por unidade de tempo (ou outra medida). A Figura 2.3 ilustra uma trajetória típica de um processo de Poisson, que não é estacionário, mas tem incrementos independentes e estacionários. Temos que $\mu(t) = V(t) = \lambda t$ e $\gamma(t_1, t_2) = \lambda(t_1 \wedge t_2)$, com $t_1 \wedge t_2$ representando o mínimo entre t_1 e t_2 .

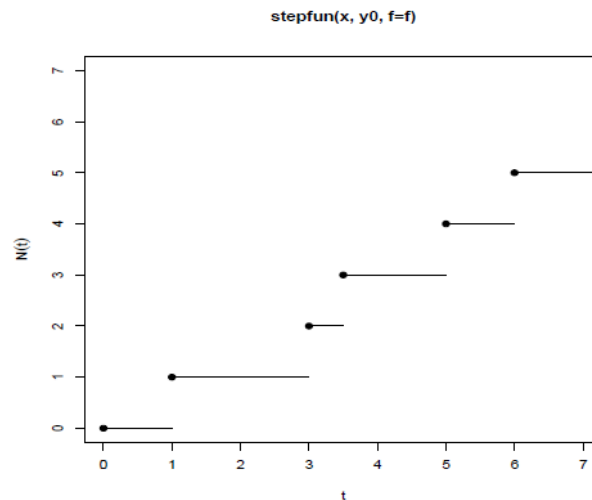


Figura 2.3. Trajetória típica de um processo de Poisson.

Exemplo 2.4. Processo de Wiener

O movimento de uma partícula imersa num líquido foi analisada pelo botânico inglês Robert Brown, em 1827. O fenômeno foi estudado por A. Einstein em 1905 e depois por N. Wiener e P. Lévy. Outros nomes usados para esse processo são *Movimento Browniano* e *processo de Wiener-Lévy*.

Seja $\{X(t), t \geq 0\}$ a posição da partícula após t unidades de tempo. O processo diz-se um *processo de Wiener* se:

- (i) $X(0) = 0$;
- (ii) para todo $t > 0$, $X(t) \sim N(0, t)$;
- (iii) o processo tem incrementos estacionários e independentes, no sentido de (ii) e (iii) do exemplo 2.3.

o processo é gaussiano

$$\begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) - X(t_1) \\ \vdots \\ X(t_n) - X(t_{n-1}) \end{bmatrix}$$

e como $X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ são v.a.'s gaussianas independentes, então $X(t_1), \dots, X(t_n)$ tem uma distribuição gaussiana n -variada. Uma realização típica de um processo de Wiener é dada na Figura 2.4. A aparência é de uma curva serrilhada, e pode-se provar que, embora as trajetórias de um processo de Wiener sejam contínuas quase certamente, elas não têm derivadas em qualquer ponto.

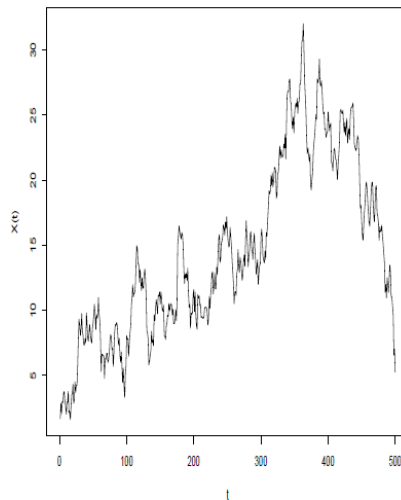


Figura 2.4: Uma realização típica de um processo de Wiener.

Exemplo 2.5. Processo Autorregressivo

Dizemos que $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ é um processo autorregressivo de ordem p e escrevemos $X_t \sim AR(p)$, se satisfizer à equação de diferenças

$$X_t - \mu = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \phi_2(X_{t-2} - \mu) + \dots + \phi_p(X_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t, \quad (2.18)$$

onde $\mu, \phi_1, \dots, \phi_p$ são parâmetros reais e $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$.

Vamos definir o operador retroativo B , por $B^s X_t = X_{t-s}$, se $s \geq 1$. Então, (2.18) pode ser escrita

$$\phi(B)\tilde{X}_t = \varepsilon_t, \quad (2.19)$$

onde $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ é o operador autorregressivo de ordem p e $\tilde{X}_t = X_t - \mu$. Suponha $\mu = 0$ de agora em diante.

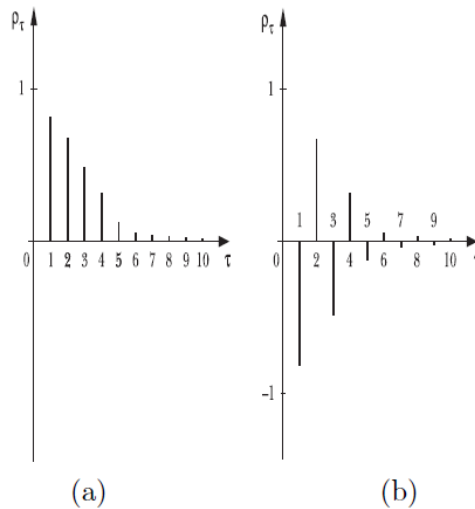


Figura 2.6: Função de autocorrelação de um modelo $AR(2)$.
(a) $\phi_1 = 0,5, \phi_2 = 0,3$ (b) $\phi_1 = -0,5, \phi_2 = 0,3$.

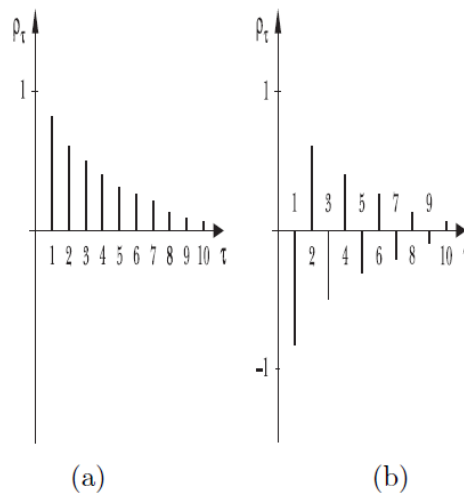


Figura 2.5: Função de autocorrelação de um $AR(1)$. (a) $\phi = 0,8$ (b) $\phi = -0,8$.

Exemplo 2.6. *Processo de Médias Móveis*

Dizemos que $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ é um processo de médias móveis de ordem q (denotado por $MA(q)$), se satisfizer à equação de diferenças

$$X_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (2.30)$$

onde $\mu, \theta_1, \dots, \theta_q$ são constantes reais e $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$.

$$\gamma_\tau = \begin{cases} \sigma^2(-\theta_\tau + \theta_1 \theta_{\tau+1} + \dots + \theta_q \theta_{q-\tau}), & \text{se } \tau = 1, \dots, q \\ 0, & \text{se } \tau > q \\ \gamma_{-\tau}, & \text{se } \tau < 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

De (2.31) e (2.32), obtemos a f.a.c. do processo $MA(q)$:

$$\rho_\tau = \begin{cases} \frac{-\theta_\tau + \theta_1 \theta_{\tau+1} + \dots + \theta_q \theta_{q-\tau}}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2}, & \text{se } \tau = 1, \dots, q \\ 0, & \text{se } \tau > q \\ \rho_{-\tau}, & \text{se } \tau < 0. \end{cases} \quad (2.33)$$

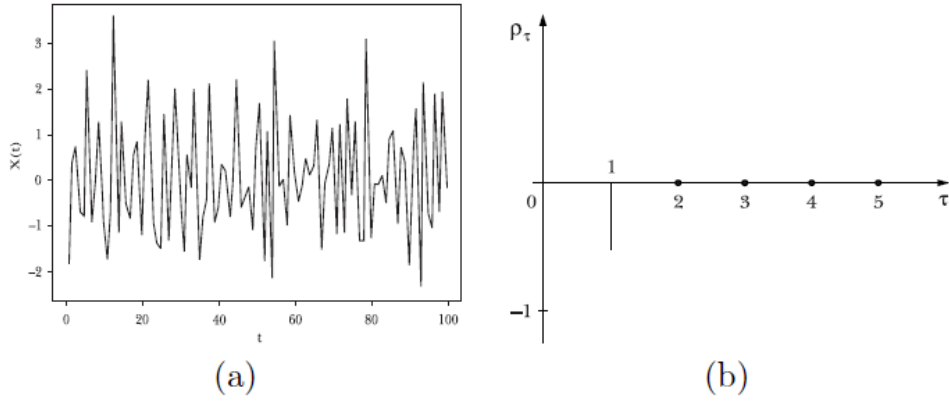


Figura 2.8: (a) Valores gerados de um modelo $MA(1)$ com $\theta = 0,8$.
(b) Função de autocorrelação.

Exemplo 2.7. *Processo Autorregressivo e de Médias Móveis*

Um processo autorregressivo e de médias móveis, de ordem (p, q) , denotado por $ARMA(p, q)$, é definido por

$$X_t - \mu = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \dots + \phi_p(X_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}, \quad (2.41)$$

onde $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$. Segue-se que a média do processo é μ . Usando os operadores autorregressivos e de médias móveis, definidos anteriormente, podemos escrever (2.41) na forma

$$\phi(B)\tilde{X}_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad (2.42)$$

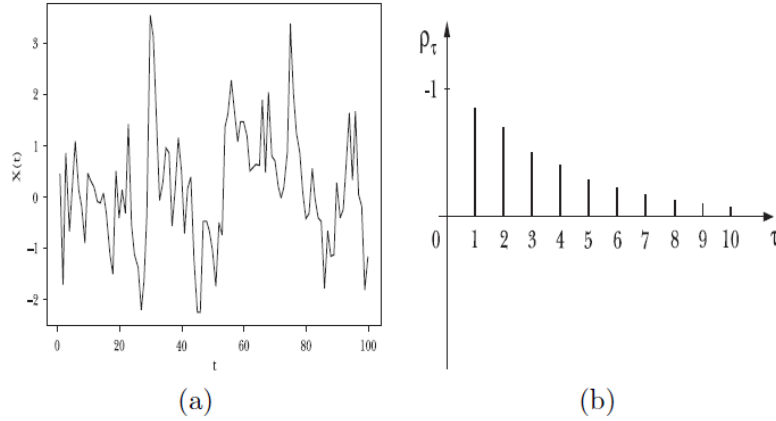


Figura 2.9: (a) Valores gerados de um modelo $ARMA(1,1)$ com $\phi = 0,8$ e $\theta = 0,3$.
(b) Função de autocorrelação.

Exemplo 2.8. *Processo Linear Geral*

Os exemplos 2.1, 2.3, 2.4 e 2.5 são casos particulares do chamado *processo linear geral* (PLG), que pode ser expresso na forma

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad (2.46)$$

onde $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$ e ψ_j são constantes satisfazendo $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$. Essa condição é necessária para que a variância do processo seja finita e, neste caso,

$$\sigma_X^2 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2. \quad (2.47)$$

Também, de (2.46), vemos que $E\{X_t\} = 0$ e para $\tau > 0$,

$$\gamma_\tau = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j-\tau}, \quad (2.48)$$

admitindo-se que a série do segundo membro de (2.48) convirja para um valor finito. Mas como

$$|E\{X_t X_{t-\tau}\}| \leq [E\{X_t^2\} E\{X_{t-\tau}^2\}]^{1/2} < \infty,$$

usando o fato que $\sigma_X^2 < \infty$, vemos que $\gamma_\tau < \infty$ se $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$. Logo, essa é a condição de estacionariedade para o PLG.

Exemplo 2.9. Processo Quase Periódico

Considere o processo estocástico $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, definido por

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_k e^{i\lambda_k t}, \quad (2.49)$$

onde $Z_k = X_k + iY_k$, $k = 0, \pm 1, \dots$ são v.a. complexas. Para que $X(t)$ seja um processo real é necessário que tenhamos $Z_{-k} = \overline{Z_k}$ e $\lambda_{-k} = -\lambda_k$. Vejamos sob qual condição o processo é estacionário. Supondo que $E(Z_k) = 0$, $E\{|Z_k|^2\} = \sigma_k^2$ para todo k , temos que

$$E\{X(t)X(s)\} = \sum_j \sum_k E\{Z_j \overline{Z_k}\} e^{i\lambda_j t - i\lambda_k s},$$

dado que o processo é real. Segue-se que

$$\gamma(t, s) = \sum_j \sigma_j^2 e^{i\lambda_j(t-s)} + \sum_{j \neq k} E\{Z_j \overline{Z_k}\} e^{i\lambda_j t - i\lambda_k s};$$

logo a autocovariância acima será um função de $|t - s|$ se $E\{Z_j \overline{Z_k}\} = 0$, $j \neq k$. Assim, o processo é estacionário, com f.a.c.v.

$$\gamma(\tau) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sigma_j^2 e^{i\lambda_j \tau}, \quad (2.50)$$

se

$$E\{Z_j \overline{Z_k}\} = 0, \quad j \neq k. \quad (2.51)$$

Dizemos que um processo $X(t)$ é *quase periódico* se ele puder ser escrito na forma (2.50) e as v.a. Z_j forem não correlacionadas, isto é, satisfizerem (2.51).

Demonstramos, acima, que se $X(t)$ for *quase periódico*, então ele é *estacionário*, com f.a.c.v. dada por (2.50). A recíproca também é verdadeira: se $X(t)$ for um processo estacionário, com f.a.c.v. da forma (2.50), então ele é *quase periódico*. Isso significa que existirão v.a. complexas Z_j , satisfazendo (2.51) tal que (2.49) valha (Breiman, 1969).

Representações Espectrais

um processo quase periódico é uma soma de componentes periódicas, da forma

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_k e^{i\lambda_k t}, \quad (2.49)$$

$$\gamma(\tau) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sigma_j^2 e^{i\lambda_j \tau}, \quad (2.50)$$

representações espectrais do processo $X(t)$ e da f.a.c.v. $\gamma(\tau)$, respectivamente.

Caso geral:

$$\gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} dF(\lambda), \quad (3.18)$$

O fato importante é que, embora nem todo processo estacionário $X(t)$ seja uma soma de componentes harmônicas, como em (2.49), ele pode ser aproximado por tal soma. Ou seja, $X(t)$ pode ser obtido como um limite de somas do tipo $\sum_j Z_j e^{i\lambda_j t}$, tomando-se as frequências λ_j bem próximas entre si e as v.a. Z_j escolhidas de tal sorte que o limite seja $X(t)$.

Para cada frequência λ_j , considere o intervalo $\Delta\lambda_j$ centrado em λ_j e a v.a. complexa Z_j associada ao intervalo, a saber $Z_j = Z(\Delta\lambda_j)$. Tomando-se os intervalos com amplitudes cada vez menores, as somas $\sum_j Z(\Delta\lambda_j) e^{i\lambda_j t}$ convergem para a integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} Z(d\lambda)$, de modo que podemos representar o processo na forma

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} Z(d\lambda), \quad (3.19)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, que é uma *integral estocástica de Fourier-Stieltjes*.

A função de conjunto Z , definida anteriormente, associa a todo intervalo I de frequências o valor $Z(I)$, de modo que se I e J são intervalos disjuntos, então

$$Z(I \cup J) = Z(I) + Z(J).$$

Para que $X(t)$ seja real devemos ter

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} Z(d\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \overline{Z(d\lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} Z(-d\lambda)$$

de modo que as partes imaginárias de $e^{i\lambda t} Z(\Delta\lambda)$ e $e^{-i\lambda t} Z(-\Delta\lambda)$ devem cancelar e teremos

$$Z(-\Delta\lambda) = \overline{Z(\Delta\lambda)},$$

que é o análogo de $Z_{-k} = \overline{Z_k}$ para processos quase-periódicos. Por $-\Delta\lambda$ entendemos o intervalo simétrico de $\Delta\lambda$, em relação à origem, centrado em $-\lambda$.

Para que $X(t)$ dado por (3.19) seja estacionário, devemos ter (supondo média zero)

$$\begin{aligned} E\{X(t)\overline{X(s)}\} &\approx E\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_j t} Z(\Delta\lambda_j) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda_k s} \overline{Z(\Delta\lambda_k)}\right\} \\ &= \sum_j \sum_k e^{i\lambda_j t - i\lambda_k s} E\{Z(\Delta\lambda_j) \overline{Z(\Delta\lambda_k)}\} \\ &= \sum_j e^{i\lambda_j(t-s)} E\{|Z(\Delta\lambda_j)|^2\} + \sum_j \sum_{k \neq j} e^{i\lambda_j t - i\lambda_k s} E\{Z(\Delta\lambda_j) \overline{Z(\Delta\lambda_k)}\}, \end{aligned}$$

em que a última soma é sobre os índices $j \neq k$. A esperança acima só dependerá de $t - s$, e, conseqüentemente, o processo será estacionário se

$$E\{Z(\Delta\lambda_j) \overline{Z(\Delta\lambda_k)}\} = 0, \quad j \neq k, \quad (3.20)$$

que é a relação análoga de (2.50). Segue-se que, se (3.20) estiver satisfeita, a f.a.c.v. de $X(t)$ será

$$\gamma(\tau) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_j \tau} F(\Delta\lambda_j), \quad (3.21)$$

onde

$$F(\Delta\lambda_j) = E\{|Z(\Delta\lambda_j)|^2\}. \quad (3.22)$$

Nessas condições, para que o processo seja estacionário, a função de conjunto Z deve satisfazer

$$E\{Z(I) \overline{Z(J)}\} = 0, \quad (3.23)$$

se I e J forem intervalos disjuntos de frequências.

A função F , definida por (3.22), é real, não negativa e satisfaz

$$F(I \cup J) = F(I) + F(J),$$

se $I \cap J = \emptyset$.

Quando os intervalos $\Delta\lambda_j$ tornam-se cada vez menores, a relação (3.21) tende para a integral

$$\gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda \tau} F(d\lambda). \quad (3.24)$$

As relações (3.19) e (3.24) constituem as representações espectrais de $X(t)$ e $\gamma(\tau)$, respectivamente; Z é a *medida aleatória* ou *medida espectral*, F é chamada *função de distribuição espectral* e (3.22) fornece a ponte entre as duas representações.

As integrais (3.19) e (3.24) podem ser escritas como integrais de Riemann-Stieltjes, considerando-se as funções $z(\lambda) = Z((-\infty, \lambda])$ e $\mu(\lambda) = F((-\infty, \lambda])$. Usando as mesmas letras Z e F para denotá-las, podemos escrever

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dZ(\lambda) \quad (3.25)$$

e

$$\gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} dF(\lambda). \quad (3.26)$$

Encarada como uma função pontual, $Z(\lambda)$ satisfaz

$$E\{[Z(\lambda_1 + \Delta\lambda_1) - Z(\lambda_1)][\overline{Z(\lambda_2 + \Delta\lambda_2)} - \overline{Z(\lambda_2)}]\} = 0, \quad (3.27)$$

se os intervalos $(\lambda_1, \lambda_1 + \Delta\lambda_1)$ e $(\lambda_2, \lambda_2 + \Delta\lambda_2)$ forem disjuntos. Esta é a propriedade equivalente a (3.23). Dizemos também que $\{Z(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ é um *processo estocástico com incrementos ortogonais*, no sentido que $Z(\lambda)$ varia de trajetória para trajetória do processo.

$d\lambda = (\lambda, \lambda + d\lambda)$,

$$E\{Z(d\lambda)\overline{Z(d\mu)}\} = 0, \text{ se } \lambda \neq \mu, \quad (3.28)$$

encarando Z como função de conjunto, ou

$$E\{dZ(\lambda)\overline{dZ(\mu)}\} = 0, \text{ se } \lambda \neq \mu, \quad (3.29)$$

encarando-a como função pontual. Aqui, $dZ(\lambda)$ representa o incremento de $Z(\lambda)$ no intervalo $(\lambda, \lambda + d\lambda)$. Em ambos os casos, os intervalos são tão pequenos que são considerados disjuntos se $\lambda \neq \mu$.

Do mesmo modo, escreveremos

$$dF(\lambda) = E\{|dZ(\lambda)|^2\}. \quad (3.30)$$

Teorema 3.2. *Uma condição necessária e suficiente para que $\gamma(\tau)$ seja a f.a.c.v. de um processo estacionário é que*

$$\gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} dF(\lambda), \quad (3.31)$$

para todo τ real, onde $F(\lambda)$ é uma função real, não decrescente e limitada.

Como $F(\lambda)$ tem o caráter de uma função de distribuição (f.d.), ela pode ser escrita na forma

$$F(\lambda) = a_1 F_d(\lambda) + a_2 F_c(\lambda) + a_3 F_s(\lambda), \quad (3.34)$$

para todo λ , onde a_1, a_2 e a_3 são constantes não negativas, com $a_1 + a_2 + a_3 = 1$; $F_d(\lambda)$ é uma função em escada (a f.d. *discreta*), $F_c(\lambda)$ é absolutamente contínua (componente *contínua* da f.d. espectral) e $F_s(\lambda)$ é componente *singular*, com $F'_s(\lambda) = 0$ em quase toda a parte. Para modelos de interesse prático, a última componente pode ser desprezada, de modo que

$$F(\lambda) = a_1 F_d(\lambda) + a_2 F_c(\lambda), \quad (3.35)$$

com a_1, a_2 não negativos e $a_1 + a_2 = 1$. Em correspondência, a f.a.c.v. $\gamma(\tau)$ pode ser decomposta na forma

$$\gamma(\tau) = a_1 \gamma_d(\tau) + a_2 \gamma_c(\tau),$$

onde

$$\gamma_d(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} dF_d(\lambda)$$

e

$$\gamma_c(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} dF_c(\lambda).$$

A componente contínua é tal que

$$F_c(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f_c(\alpha) d\alpha,$$

ou seja, $f_c(\lambda) = F'_c(\lambda)$, para todo λ . Como $F_c(\lambda)$ é não decrescente, $f_c(\lambda) \geq 0$, para todo λ .

A componente discreta $F_d(\lambda)$ está associada a uma função $p(\lambda) \geq 0$, para todo λ , e $p(\lambda) > 0$, para um conjunto discreto de frequências $\{\lambda_j\}$, de modo que $dF(\lambda) = 0$, exceto em λ_j e $dF(\lambda_j) = p(\lambda_j)$. Segue-se que

$$F_d(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} p(\lambda_j)$$

e a f.a.c.v. $\gamma(\tau)$ pode ser escrita

$$\gamma(\tau) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_j\tau} p(\lambda_j) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} f_c(\lambda) d\lambda.$$

Se a condição $\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_c(\tau)| d\tau < \infty$ estiver satisfeita, então

$$f_c(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} \gamma_c(\tau) d\tau.$$

Para obter os $p(\lambda_j)$ em função de $\gamma_d(\tau)$, considere

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \gamma_d(\tau) e^{-i\lambda_k\tau} d\tau = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p(\lambda_j) \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i\tau(\lambda_j - \lambda_k)} d\tau.$$

Mas

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i\lambda\tau} d\tau = \begin{cases} 1, & \text{se } \lambda = 0 \\ \frac{\text{sen}(T\lambda)}{T\lambda}, & \text{se } \lambda \neq 0, \end{cases}$$

de modo que, quando $T \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i\tau(\lambda_j - \lambda_k)} d\tau \rightarrow \begin{cases} 1, & \text{se } \lambda_j = \lambda_k \\ 0, & \text{se } \lambda_j \neq \lambda_k \end{cases}$$

e obtemos, então, que

$$p(\lambda_k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \gamma_d(\tau) e^{-i\lambda_k\tau} d\tau.$$

Se em (3.35), $a_1 = 1, a_2 = 0$, dizemos que $X(t)$ tem *espectro puramente discreto*. O processo quase periódico do exemplo 2.9 é um exemplo dessa situação. Nesse caso, como vimos, $\gamma(\tau)$ não tende a zero, quando $|\tau| \rightarrow \infty$.

Se $a_1 = 0, a_2 = 1$, então $X(t)$ tem *espectro puramente contínuo*; assim, $\gamma(\tau) \rightarrow 0$, quando $|\tau| \rightarrow \infty$. São exemplos o ruído branco discreto, os processos $AR(p)$, $MA(q)$, $ARMA(p,q)$ e o processo linear geral.

Se $a_1 > 0, a_2 > 0$, então $X(t)$ tem *espectro misto*. Nesse caso, $\gamma_c(\tau) \rightarrow 0$, quando $|\tau| \rightarrow \infty$, mas $\gamma_d(\tau) \not\rightarrow 0$, quando $|\tau| \rightarrow \infty$. Um exemplo de tal processo é dado por

$$X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{k=1}^K A_k \cos(\lambda_k t + \phi_k), \quad (3.36)$$

que é um modelo adequado para muitas séries temporais reais. Em (3.36), o primeiro termo do lado direito, $Y(t)$, digamos, é um *PLG*, com a suposição que $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, e o segundo termo, $Z(t)$, digamos, é um processo harmônico. Supomos, ainda, que esses dois processos sejam não correlacionados. Segue-se que $Y(t)$ terá um espectro contínuo e $Z(t)$ terá um espectro discreto, de modo que $X(t)$ terá um espectro misto.

Teorema 3.3. *Seja o processo $X(t)$, como o acima. Então, existe um processo estocástico $\{Z(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$, de incrementos ortogonais, tal que*

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dZ(\lambda), \quad (3.37)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. O processo $Z(\lambda)$ tem as propriedades:

- (i) $E\{dZ(\lambda)\} = 0$, para todo λ ;
- (ii) $E\{|dZ(\lambda)|^2\} = dF(\lambda)$, para todo λ .

Observações: (a) Este resultado é também denominado *teorema espectral de Cramér*.

(b) O processo $\{Z(\lambda)\}$ é o *processo espectral* associado a $X(t)$.

(c) O fato importante contido em (3.37) é que as amplitudes aleatórias $Z(\Delta\lambda)$, correspondentes a intervalos de frequências disjuntos, são não correlacionadas.

(d) Há várias demonstrações do teorema 3.3. Cramér (1950) usa métodos da teoria de espaços de Hilbert, enquanto que Kolmogorov (1941) obtém (3.37) como caso particular da teoria espectral de operadores unitários.

Processos com Tempo Discreto e Processos Reais

Consideremos, agora, um processo estacionário com tempo discreto $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Como vimos na seção 3.1, a frequência angular λ nesse caso varia entre $-\pi$ e π , de modo que o correspondente do teorema 3.2 é o resultado seguinte, devido a Herglotz.

Teorema 3.4. *Uma condição necessária e suficiente para $\gamma_k, k \in \mathbb{Z}$, seja a f.a.c.v. de X_t é que*

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} dF(\lambda), \quad (3.38)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$, onde $F(\lambda)$ é uma função real, não decrescente e limitada.

Se

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k| < \infty \quad (3.13)$$

estiver satisfeita, obtemos o espectro de X_t como

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\lambda k}, \quad -\pi < \lambda < \pi. \quad (3.14)$$

Se a condição (3.13) estiver satisfeita, então $F(\lambda)$ é derivável, com $f(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} dF(\alpha)$ e (3.38) fica

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} f(\lambda) d\lambda, \quad (3.39)$$

e a relação inversa é dada por

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\lambda k}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi. \quad (3.40)$$

O teorema seguinte dá a representação espectral de X_t no caso de tempo discreto.

Teorema 3.5. *Para um processo com tempo discreto, como o acima,*

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dZ(\lambda), \quad (3.41)$$

onde $\{Z(\lambda), -\pi \leq \lambda \leq \pi\}$ é um processo com incrementos ortogonais com as propriedades (i) e (ii) do teorema 3.3.

Suponha, agora, que o processo $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ seja um processo estacionário real, isto é, para cada $t \in \mathbb{R}$, $X(t)$ é uma v.a. real. Então, para todo t , $X(t) = \overline{X(t)}$ e

$$\overline{X(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \overline{dZ(\lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \overline{dZ(-\lambda)},$$

do que segue que $dZ(\lambda) = \overline{dZ(-\lambda)}$, para todo λ .

Consideremos os processos reais $U_0(\lambda)$ e $V_0(\lambda)$, tais que

$$dU_0(\lambda) = \mathcal{R}[dZ(\lambda)],$$

$$dV_0(\lambda) = \mathcal{I}[dZ(\lambda)],$$

para todo λ . Então, $U_0(-\lambda) = U_0(\lambda)$, $V_0(-\lambda) = -V_0(\lambda)$ e podemos escrever

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(\lambda t) + i \operatorname{sen}(\lambda t)) [dU_0(\lambda) - i dV_0(\lambda)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda t) dU_0(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(\lambda t) dV_0(\lambda), \end{aligned}$$

da qual obtemos

$$X(t) = \int_0^{\infty} \cos(\lambda t) dU(\lambda) + \int_0^{\infty} \operatorname{sen}(\lambda t) dV(\lambda), \quad (3.42)$$

onde os processos $U(\lambda)$ e $V(\lambda)$ são definidos por

$$dU(\lambda) = 2dU_0(\lambda) = \{dU_0(\lambda) + dU_0(-\lambda)\}, \quad \lambda \neq 0,$$

$$dU(0) = dU_0(0),$$

$$dV(\lambda) = 2dV_0(\lambda) = \{dV_0(\lambda) - dV_0(-\lambda)\}.$$

Seguem-se as relações

$$\begin{aligned} E\{dU(\lambda)dU(\mu)\} &= E\{dV(\lambda)dV(\mu)\} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } \lambda \neq \mu \\ dG(\lambda), & \text{se } \lambda = \mu, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$E\{dU(\lambda)dV(\mu)\} = 0, \quad \text{para quaisquer } \lambda, \mu,$$

mostrando que $U(\lambda)$ e $V(\lambda)$ são processos ortogonais e ortogonais entre si. A função $G(\lambda)$ em (3.43) é tal que

$$\gamma(\tau) = \int_0^\infty \cos(\lambda\tau) dG(\lambda), \quad (3.44)$$

com $G(\lambda) = 2F(\lambda) + C$, C uma constante, e se (3.9) estiver satisfeita

$$G(\lambda) = \int_0^\lambda g(\alpha) d\alpha,$$

com $g(\lambda) = 2f(\lambda)$, $\lambda > 0$, $g(0) = 0$.