Filtros Lineares

Uma das razões que tornam a análise espectral uma ferramenta analítica importante é o fato que o espectro fornece uma descrição simples do efeito da aplicação de uma transformação linear em um processo estacionário.

Filtro:

$$X = \mathcal{F}[Y]$$

ou

$$X(t) = \mathcal{F}[Y](t).$$

Dizemos que $\mathcal{F}$ é *invariante no tempo* se o atraso (ou avanço) de $Y(t)$ no tempo de τ unidades implicar o atraso (ou avanço) em $X(t)$ das mesmas τ unidades, ou seja, $\mathcal{F}[Y](t \pm \tau) = X(t \pm \tau)$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é *linear* se para o conjunto de séries $Y_1(t), \ldots, Y_k(t)$ e constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ temos

$$\mathcal{F}\left[\sum_{j=1}^{k} \alpha_j Y_j\right](t) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathcal{F}[Y_j](t).$$

Definição 3.1. *Denominamos por filtro linear ou sistema linear qualquer operação $\mathcal{F}$ que seja linear e invariante no tempo.*

Proposição 3.1. *Seja $\mathcal{F}$ um filtro linear que inclui a série $e(t) = \exp(i\lambda t)$ em seu domínio, $t \in \mathbb{Z}$. Então, existe uma função $A(\lambda)$, com valores complexos, tal que*

$$\mathcal{F}[e](t) = A(\lambda)e(t). \tag{3.45}$$

Dizemos que $A(\lambda)$ é a *função de transferência do filtro $\mathcal{F}$*.

3.4.1 Filtro Convolução

Um caso especial importante de um filtro linear é o *filtro convolução*. Suponha que $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ seja dado por

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)Y(t-\tau)d\tau, \tag{3.46}$$

na qual $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ é um processo estacionário, com média zero e f.a.c.v. $\gamma_Y(\tau)$.

Então $X(t)$ é também estacionário, com média zero e f.a.c.v.

$$\gamma_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)\gamma_Y(\tau - v + u)dudv. \tag{3.47}$$

Segue-se que o espectro de $X(t)$ é dado por

$$f_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau}\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)\gamma_Y(\tau - v + u)dudv\}d\tau$$

supondo que (3.9) valha, e isso é verdadeiro desde que $\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|d\tau < \infty$. Efetuando a transformação $w = \tau - v + u$, obtemos

$$f_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{i\lambda u}du \int_{-\infty}^{\infty} h(v)e^{-i\lambda v}dv \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_Y(w)e^{-i\lambda w}dw.$$

Denotando

$$H(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-i\lambda u}du, \tag{3.48}$$

obtemos, finalmente,

$$f_X(\lambda) = |H(\lambda)|^2 f_Y(\lambda). \tag{3.49}$$

A função $H(\lambda)$ é a função de transferência do filtro convolução como definida na Proposição 3.1. De fato, é fácil ver que, se $Y(t) = \exp(i\lambda t)$ é a entrada de (3.46), então a saída é $\exp(i\lambda t)H(\lambda)$. A função $h(u)$ é chamada *função resposta de impulso.*

Se Y_t e X_t são processos discretos, as relações correspondentes a (3.46) e (3.49) são

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k Y_{t-k}, \tag{3.50}$$

$$H(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-i\lambda k}, \tag{3.51}$$

respectivamente, com (3.49) permanecendo inalterada. A *condição de estabilidade* do filtro torna-se, agora, $\sum_k |h_k| < \infty$.

Teorema 3.6. *Se a condição (3.46) valer e $F_Y(\lambda)$ é a função de distribuição espectral (f.d.e) de $Y(t)$, então a f.d.e de $X(t)$ satisfaz*

$$dF_X(\lambda) = |H(\lambda)|^2 dF_Y(\lambda). \tag{3.52}$$

No caso especial em que Y_t é ruído branco, a relação (3.50) torna-se um PLG e sua f.a.c.v. fica

$$\gamma_X(k) = \sigma^2 \sum_j h_j h_{j-|k|},$$

com espectro

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |\sum_j h_j e^{-i\lambda j}|^2.$$

Para que o lado direito de (3.46) seja bem definido, isto é, a integral convirja em média quadrática, é necessário que $X(t)$ tenha variância finita, ou

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(\lambda) d\lambda < \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |H(\lambda)|^2 f_Y(\lambda) d\lambda < \infty.$$

Uma condição suficiente para que esta seja satisfeita é que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(\lambda)|^2 d\lambda < \infty \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(u)|^2 du < \infty,$$

se $f_Y(\lambda) \leq M$, para uma constante M e para todo λ.

3.4.2 Ganho e Fase

Em geral, a função de transferência do filtro, $H(\lambda)$, é complexa. Escrevendo-a em forma polar temos

$$H(\lambda) = G(\lambda) e^{i\theta(\lambda)}, \tag{3.54}$$

em que $|H(\lambda)| = G(\lambda)$ é denominada *ganho* do filtro e $\theta(\lambda) = \arg[H(\lambda)]$ é a *fase*.

3.4.3 Alguns Tipos de Filtros

Alguns filtros amplamente usados na prática serão agora descritos.

(a) Filtro passa-alto

Esse tipo de filtro elimina ou atenua componentes, na série de entrada, com frequências baixas. O quadrado do módulo da função de transferência é dado por

$$|H(\lambda)|^2 = \begin{cases} 1, & |\lambda| \geq \lambda_0, \\ 0, & |\lambda| < \lambda_0. \end{cases}$$

cujo gráfico está na Figura 3.1. Versões aproximadas desse filtro são usadas em amplificadores de áudio, de modo a suprimir distorções de baixa frequência.

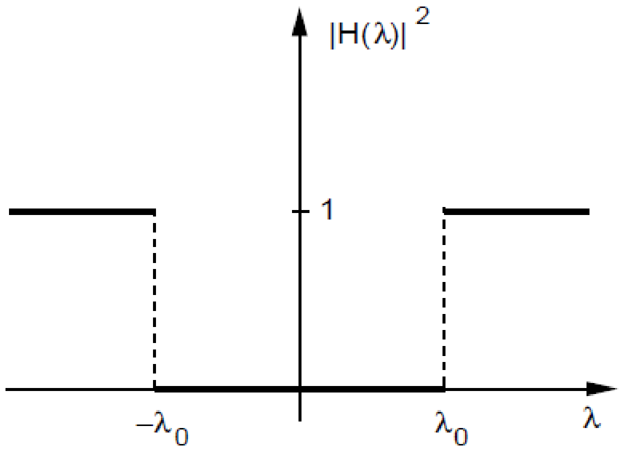

Figura 3.1: Quadrado do módulo da função de transferência de um filtro passa-alto.

(b) Filtro passa-baixo

Nesse caso temos a supressão (ou atenuação) de componentes de alta frequência. Logo,

$$|H(\lambda)|^2 = \begin{cases} 1, & |\lambda| \leq \lambda_1, \\ 0, & |\lambda| > \lambda_1, \end{cases}$$

e o gráfico está representado na Figura 3.2. Esse tipo de filtro também é usado em equipamentos de áudio para suprimir ruído de alta frequência.

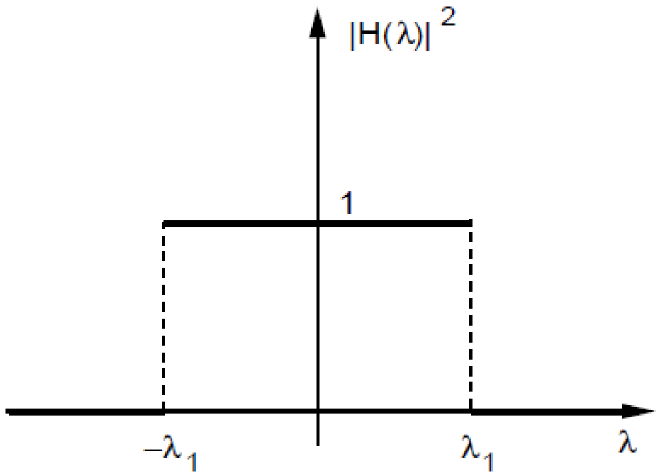

Figura 3.2: Quadrado do módulo da função de transferência de um filtro passa-baixo.

(c) Filtro passa-banda

Finalmente, para esse tipo de filtro, temos que

$$|H(\lambda)|^2 = \begin{cases} 1, & \lambda_0 \leq |\lambda| \leq \lambda_1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

representada na Figura 3.3.

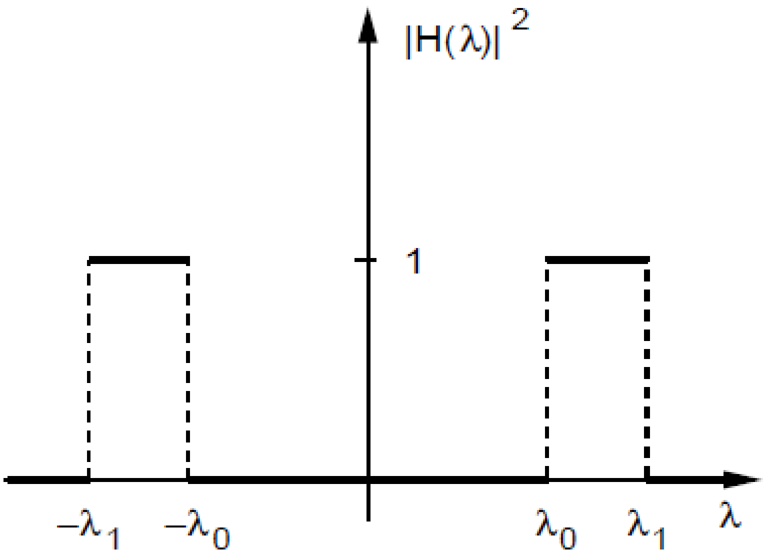

Figura 3.3: Quadrado do módulo da função de transferência de um filtro passa-banda.