

Filtros Lineares

Uma das razões que tornam a análise espectral uma ferramenta analítica importante é o fato que o espectro fornece uma descrição simples do efeito da aplicação de uma transformação linear em um processo estacionário.

Filtro:

$$X = \mathcal{F}[Y]$$

ou

$$X(t) = \mathcal{F}[Y](t).$$

Dizemos que \mathcal{F} é *invariante no tempo* se o atraso (ou avanço) de $Y(t)$ no tempo de τ unidades implicar o atraso (ou avanço) em $X(t)$ das mesmas τ unidades, ou seja, $\mathcal{F}[Y](t \pm \tau) = X(t \pm \tau)$. Dizemos que \mathcal{F} é *linear* se para o conjunto de séries $Y_1(t), \dots, Y_k(t)$ e constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ temos

$$\mathcal{F} \left[\sum_{j=1}^k \alpha_j Y_j \right] (t) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathcal{F}[Y_j](t).$$

Definição 3.1. Denominamos por *filtro linear* ou *sistema linear* qualquer operação \mathcal{F} que seja linear e invariante no tempo.

Proposição 3.1. Seja \mathcal{F} um filtro linear que inclui a série $e(t) = \exp(i\lambda t)$ em seu domínio, $t \in \mathbb{Z}$. Então, existe uma função $A(\lambda)$, com valores complexos, tal que

$$\mathcal{F}[e](t) = A(\lambda)e(t). \quad (3.45)$$

Dizemos que $A(\lambda)$ é a *função de transferência do filtro* \mathcal{F} .

3.4.1 Filtro Convolução

Um caso especial importante de um filtro linear é o *filtro convolução*. Suponha que $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ seja dado por

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)Y(t - \tau)d\tau, \quad (3.46)$$

na qual $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ é um processo estacionário, com média zero e f.a.c.v. $\gamma_Y(\tau)$.

Então $X(t)$ é também estacionário, com média zero e f.a.c.v.

$$\gamma_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)\gamma_Y(\tau - v + u)dudv. \quad (3.47)$$

Segue-se que o espectro de $X(t)$ é dado por

$$f_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)\gamma_Y(\tau - v + u)dudv \right\} d\tau$$

supondo que (3.9) valha, e isso é verdadeiro desde que $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$. Efetuando a transformação $w = \tau - v + u$, obtemos

$$f_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{i\lambda u} du \int_{-\infty}^{\infty} h(v)e^{-i\lambda v} dv \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_Y(w)e^{-i\lambda w} dw.$$

Denotando

$$H(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-i\lambda u} du, \quad (3.48)$$

obtemos, finalmente,

$$f_X(\lambda) = |H(\lambda)|^2 f_Y(\lambda). \quad (3.49)$$

A função $H(\lambda)$ é a função de transferência do filtro convolução como definida na Proposição 3.1. De fato, é fácil ver que, se $Y(t) = \exp(i\lambda t)$ é a entrada de (3.46), então a saída é $\exp(i\lambda t)H(\lambda)$. A função $h(u)$ é chamada *função resposta de impulso*.

Se Y_t e X_t são processos discretos, as relações correspondentes a (3.46) e (3.49) são

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k Y_{t-k}, \quad (3.50)$$

$$H(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-i\lambda k}, \quad (3.51)$$

respectivamente, com (3.49) permanecendo inalterada. A *condição de estabilidade* do filtro torna-se, agora, $\sum_k |h_k| < \infty$.

Teorema 3.6. Se a condição (3.46) valer e $F_Y(\lambda)$ é a função de distribuição espectral (f.d.e) de $Y(t)$, então a f.d.e de $X(t)$ satisfaz

$$dF_X(\lambda) = |H(\lambda)|^2 dF_Y(\lambda). \quad (3.52)$$

No caso especial em que Y_t é ruído branco, a relação (3.50) torna-se um PLG e sua f.a.c.v. fica

$$\gamma_X(k) = \sigma^2 \sum_j h_j h_{j-|k|},$$

com espectro

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_j h_j e^{-i\lambda j} \right|^2.$$

Para que o lado direito de (3.46) seja bem definido, isto é, a integral convirja em média quadrática, é necessário que $X(t)$ tenha variância finita, ou

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(\lambda) d\lambda < \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |H(\lambda)|^2 f_Y(\lambda) d\lambda < \infty.$$

Uma condição suficiente para que esta seja satisfeita é que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(\lambda)|^2 d\lambda < \infty \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(u)|^2 du < \infty,$$

se $f_Y(\lambda) \leq M$, para uma constante M e para todo λ .

3.4.2 Ganho e Fase

Em geral, a função de transferência do filtro, $H(\lambda)$, é complexa. Escrevendo-a em forma polar temos

$$H(\lambda) = G(\lambda) e^{i\theta(\lambda)}, \quad (3.54)$$

em que $|H(\lambda)| = G(\lambda)$ é denominada *ganho* do filtro e $\theta(\lambda) = \arg [H(\lambda)]$ é a *fase*.

3.4.3 Alguns Tipos de Filtros

Alguns filtros amplamente usados na prática serão agora descritos.

(a) Filtro passa-alto

Esse tipo de filtro elimina ou atenua componentes, na série de entrada, com frequências baixas. O quadrado do módulo da função de transferência é dado por

$$|H(\lambda)|^2 = \begin{cases} 1, & |\lambda| \geq \lambda_0, \\ 0, & |\lambda| < \lambda_0. \end{cases}$$

cujo gráfico está na Figura 3.1. Versões aproximadas desse filtro são usadas em amplificadores de áudio, de modo a suprimir distorções de baixa frequência.

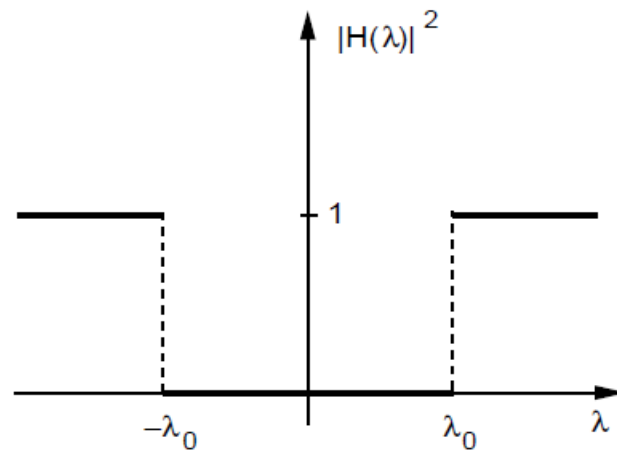


Figura 3.1: Quadrado do módulo da função de transferência de um filtro passa-alto.

(b) Filtro passa-baixo

Nesse caso temos a supressão (ou atenuação) de componentes de alta frequência. Logo,

$$|H(\lambda)|^2 = \begin{cases} 1, & |\lambda| \leq \lambda_1, \\ 0, & |\lambda| > \lambda_1, \end{cases}$$

e o gráfico está representado na Figura 3.2. Esse tipo de filtro também é usado em equipamentos de áudio para suprimir ruído de alta frequência.

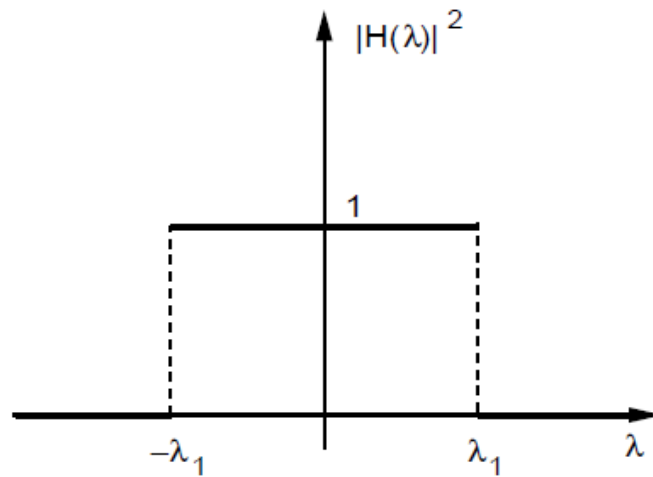


Figura 3.2: Quadrado do módulo da função de transferência de um filtro passa-baixo.

(c) Filtro passa-banda

Finalmente, para esse tipo de filtro, temos que

$$|H(\lambda)|^2 = \begin{cases} 1, & \lambda_0 \leq |\lambda| \leq \lambda_1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

representada na Figura 3.3.

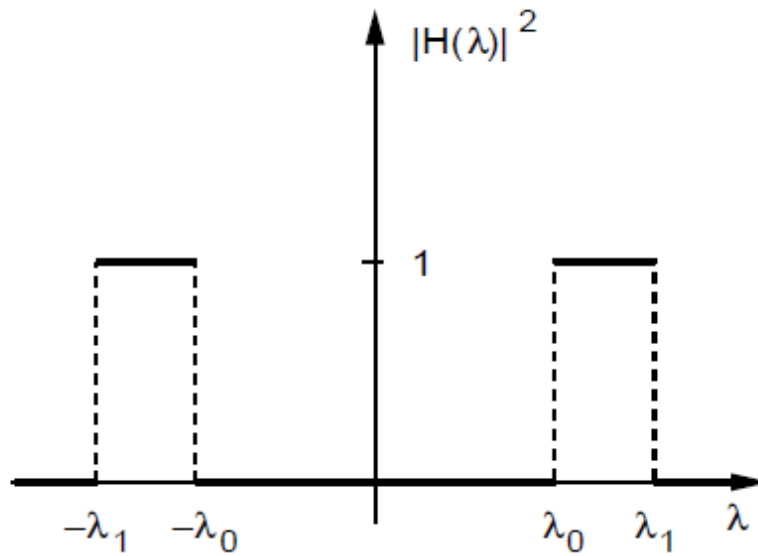


Figura 3.3: Quadrado do módulo da função de transferência de um filtro passa-banda.

Exemplo 3.2. Filtro diferença. Nesse caso, temos que

$$X_t = (1 - B)Y_t = Y_t - Y_{t-1}.$$

Aqui, $h_0 = 1$, $h_1 = -1$ e $h_j = 0$, $j \neq 0, 1$. A função de transferência do filtro é dada por

$$H(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j e^{-i\lambda j} = 1 - e^{-i\lambda}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi \quad (3.57)$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} |H(\lambda)|^2 &= (1 - e^{-i\lambda})(1 - e^{i\lambda}) \\ &= 2[1 - \cos(\lambda)], \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi, \end{aligned}$$

representada na Figura 3.4. Essa função mostra que o filtro elimina componentes de baixa frequência (tendências) e é, aproximadamente, um filtro passa-alto. Ainda,

$$G(\lambda) = |H(\lambda)| = 2 \left| \sin \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right|$$

e

$$\theta(\lambda) = \begin{cases} (\pi - \lambda)/2, & \lambda > 0, \\ -(\pi - \lambda)/2, & \lambda < 0. \end{cases}$$

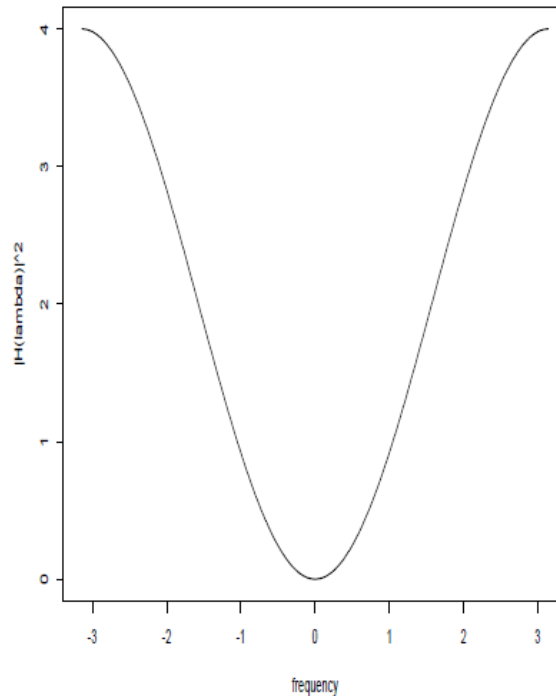


Figura 3.4: Quadrado do módulo da função de transferência de um filtro diferença.

Exemplo 3.3. Filtro diferença sazonal. Suponha que o período sazonal seja 12; então, a relação entre entrada e saída é dada por

$$X_t = (1 - B^{12})Y_t = Y_t - Y_{t-12}.$$

Vemos que $h_0 = 1$, $h_{12} = -1$ e $h_j = 0$, $j \neq 0, 12$. A função de transferência é dada por

$$H(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-i\lambda k} = 1 - \exp(-12i\lambda), \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi \quad (3.58)$$

e

$$\begin{aligned} |H^2(\lambda)| &= |1 - \exp(-12i\lambda)|^2 = 2 - 2\cos(12\lambda) \\ &= 2(1 - \cos(12\lambda)), \end{aligned}$$

representada na Figura 3.5. Esta indica que o filtro suprime frequências sazonais e suas harmônicas.

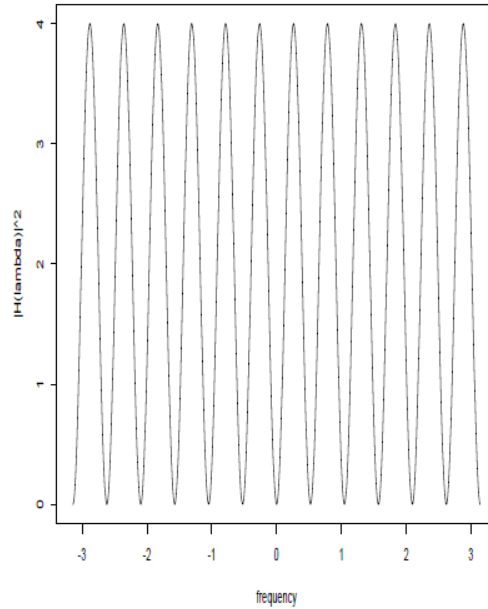


Figura 3.5: Quadrado do módulo da função de transferência de um filtro diferença sazonal de ordem 12.

Exemplo 3.4. Filtro de médias móveis simétrico. Esse filtro é comumente usado para suavizar uma série temporal. Considere

$$X_t = \frac{1}{m} \sum_{j=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} Y_{t-j}, \quad m \text{ ímpar.}$$

Aqui, $H(\lambda) = (\sin(\lambda m/2))/(m \sin(\lambda/2))$ e, conseqüentemente,

$$G(\lambda) = H(\lambda)$$

e

$$\theta(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{se } \sin(\lambda m/2) \geq 0, \\ \pm\pi, & \text{se } \sin(\lambda m/2) < 0. \end{cases}$$

O quadrado do módulo da função de transferência, com $m = 5$, está representado na Figura 3.6, indicando que o filtro de médias móveis é um filtro passa-baixo, ou seja, reduz a variabilidade (ruído) da série.

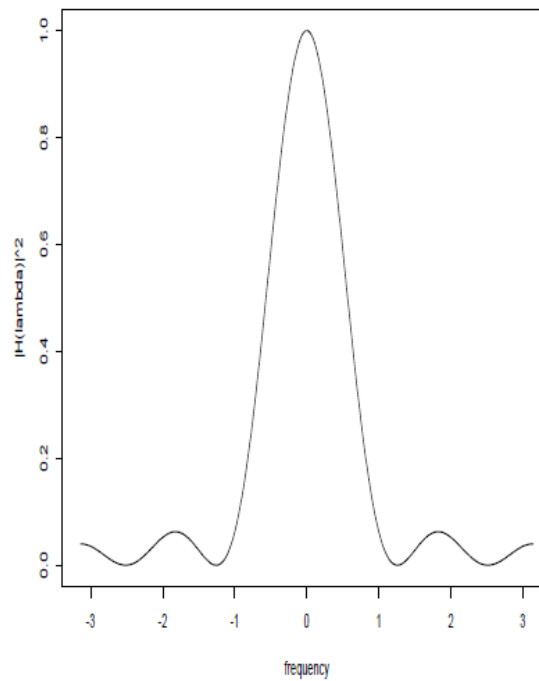


Figura 3.6: Quadrado do módulo da função de transferência de um filtro de médias móveis simétrico, com $m = 5$.

3.4.4 Filtros Sequenciais

Considere a aplicação sequencial de dois filtros, \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 , a uma série de entrada, $Y(t)$, isto é,

$$X(t) = \mathcal{F}[Y(t)] = \mathcal{F}_2[\mathcal{F}_1[Y(t)]].$$

Pode ser facilmente provado que a função de transferência do filtro \mathcal{F} é dada por

$$H(\lambda) = H_2(\lambda).H_1(\lambda), \quad (3.59)$$

na qual $H_j(\lambda)$ é a função de transferência do filtro \mathcal{F}_j , $j = 1, 2$. Além disso, usando (3.49) e (3.59), encontramos que a função de densidade espectral da série de saída é dada por

$$f_X(\lambda) = |H_2(\lambda)|^2 |H_1(\lambda)|^2 f_Y(\lambda). \quad (3.60)$$

Esses resultados podem ser generalizados para uma aplicação sequencial de K filtros, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_K$, obtendo-se

$$H(\lambda) = \prod_{j=1}^K H_j(\lambda)$$

e

$$f_X(\lambda) = f_Y(\lambda) \prod_{j=1}^K |H_j(\lambda)|^2.$$

Exemplo 3.5 Considere a aplicação sequencial dos filtros diferença e diferença sazonal de ordem 12, ou seja,

$$X_t = (1 - B)(1 - B^{12})Y_t.$$

Nesse caso, $\mathcal{F}_1 = (1 - B)$ and $\mathcal{F}_2 = (1 - B^{12})$. Usando as expressões (3.59) e (3.60), temos que

$$H(\lambda) = (1 - e^{-i\lambda})(1 - \exp(-12i\lambda)), \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi$$

da qual segue

$$f_X(\lambda) = 4(1 - \cos(\lambda))(1 - \cos(12\lambda))f_Y(\lambda).$$

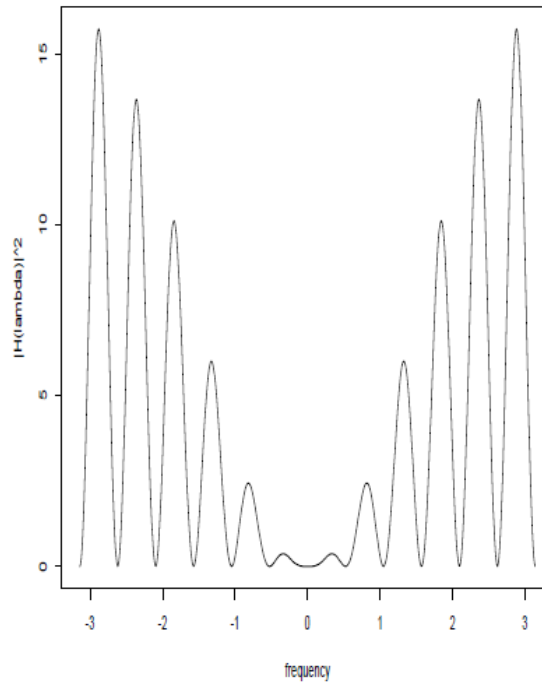


Figura 3.7: Quadrado do módulo da função de transferência do filtro sequencial do exemplo 3.5.

O quadrado do módulo de $|H(\lambda)|^2$ está representada na Figura 3.7, indicando que esse filtro atenua componentes de baixa frequência (tendências) e frequências correspondendo ao período sazonal (12) e suas frações.

Exemplos de Espectros

Exemplo 3.6. Ruído branco discreto.

Considere o processo $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$, do exemplo 2.1. Sua f.a.c.v é dada por (2.15) e, portanto,

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi. \quad (3.61)$$

Segue-se que o ruído branco discreto tem um espectro constante no intervalo $[-\pi, \pi]$. Em outras palavras, a potência total está uniformemente distribuída sobre todas as frequências desse intervalo.

Exemplo 3.7. Processo autorregressivo

Considere o processo **AR(1)** $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$, com $\varepsilon_t \sim \text{RB}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ e $|\phi| < 1$. A f.a.c.v. é dada por

$$\gamma_\tau = \begin{cases} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}, & \text{se } \tau = 0, \\ \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} \phi^{|\tau|}, & \text{se } |\tau| > 1, \end{cases}$$

logo

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi(1-\phi^2)} \left(1 + \sum_{\tau=1}^{\infty} \phi^\tau e^{-i\lambda\tau} + \sum_{\tau=1}^{\infty} \phi^\tau e^{i\lambda\tau} \right) \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi(1-\phi^2)} \left(1 + \frac{\phi e^{-i\lambda}}{1-\phi e^{-i\lambda}} + \frac{\phi e^{i\lambda}}{1-\phi e^{i\lambda}} \right) \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{1}{|1-\phi e^{-i\lambda}|^2}. \end{aligned}$$

Escrevendo de outra forma,

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi(1+\phi^2-2\phi\cos(\lambda))}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi.$$

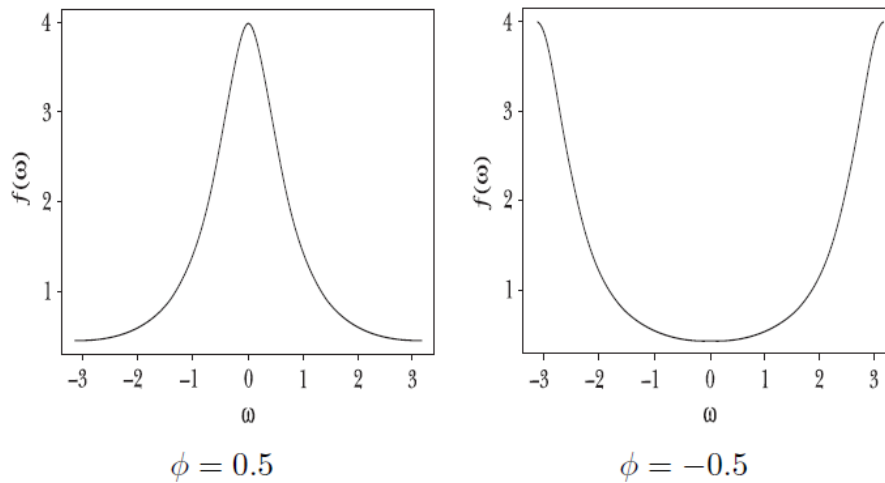


Figure 3.8: Espectro de um processo AR(1).

Considere, agora, um processo **AR(p)**, como em (2.18), com $\mu = 0$. De (2.19), podemos considerar ε_t como a saída de um filtro linear com entrada X_t e função de transferência

$$H(\lambda) = \phi(e^{-i\lambda}) = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j e^{-i\lambda j}, \quad (3.62)$$

de tal modo que os espectros de ε_t e X_t sejam relacionados por (3.49), isto é,

$$\frac{\sigma^2}{2\pi} = \left| 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j e^{-i\lambda j} \right|^2 f_X(\lambda),$$

da qual segue que o espectro de um processo AR(p) é dado por

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j e^{-i\lambda j} \right|^{-2}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi. \quad (3.63)$$

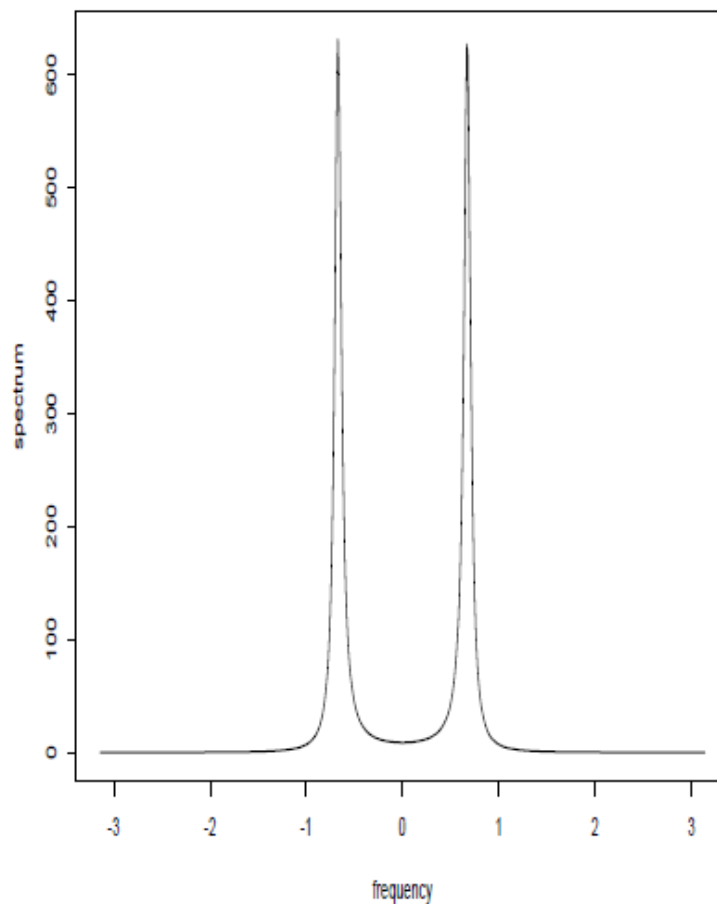


Figure 3.9: Epectro de um processo AR(2).

Exemplo 3.8. *Processo de médias móveis.*

Considere o processo de médias móveis de ordem q , $MA(q)$, dado em (2.30). Este é um caso particular de (3.50), logo por (3.52) vemos que o espectro de tal processo é dado por

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=0}^q h_j e^{-i\lambda j} \right|^2, \quad (3.64)$$

com $h_0 = 1$ e $h_j = -\theta_j, j = 1, \dots, q$.

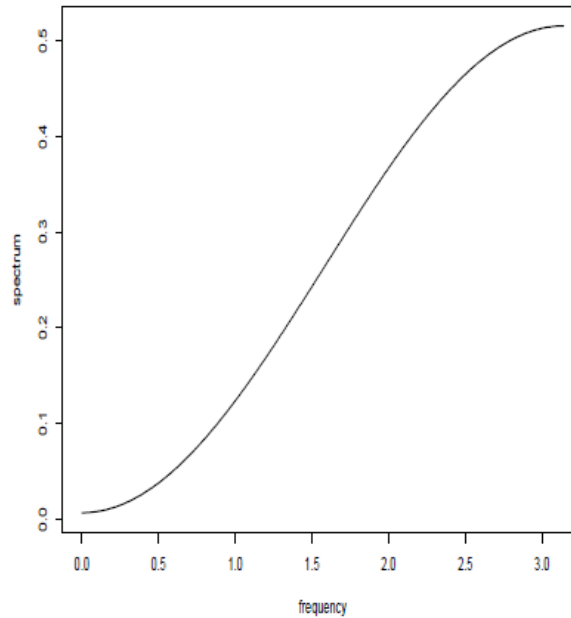


Figure 3.10: Espectro de um processo $MA(1)$, com $\theta = 0,8$.

Exemplo 3.9. *Processo autoregressivo e de médias móveis*

O processo $ARMA(p,q)$ foi discutido no exemplo 2.7 e escrito na forma (2.42), ou seja, um filtro linear com função de transferência $H(\lambda) = \theta(e^{-i\lambda})/\phi(e^{-i\lambda})$. Portanto, o espectro desse processo é dado por

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|1 - \sum_{j=1}^q \theta_j e^{-i\lambda j}|^2}{|1 - \sum_{j=1}^p \phi_j e^{-i\lambda j}|^2}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi. \quad (3.65)$$

Dizemos que um processo $ARMA$ genérico tem *espectro racional*, pois (3.65) é a razão de dois polinômios em λ .

Exemplo 3.10. *Processo harmônico.*

Vamos retomar o processo

$$X(t) = \sum_{j=1}^J A_j \cos(\lambda_j t + \phi_j), \quad (3.66)$$

no qual $A_j, \lambda_j, j = 1, \dots, J$, são constantes reais e $\phi_j, j = 1, \dots, J$, são v.a's independentes, uniformemente distribuídas no intervalo $[-\pi, \pi]$. Segue-se que a f.a.c.v desse processo é dada por

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J A_j^2 \cos(\lambda_j \tau). \quad (3.67)$$

Vemos que $\gamma(\tau)$ não é absolutamente integrável, e não podemos usar (3.10). Considere, para efeito de simplicidade, o caso $J = 1$, $\lambda_1 = \lambda$, $A_1 = A$ e calculemos

$$\begin{aligned} f_T(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^T \cos(\omega\tau) \gamma(\tau) d\tau = \frac{1}{4\pi} A^2 \int_0^T \cos(\omega\tau) \cos(\lambda\tau) d\tau \\ &= \frac{A^2}{8\pi} \int_0^T \frac{1}{2} \{ \cos(\omega + \lambda)\tau + \cos(\omega - \lambda)\tau \} d\tau \\ &= \frac{A^2}{4} \delta_T(\lambda + \omega) + \frac{A^2}{4} \delta_T(\lambda - \omega), \end{aligned}$$

sendo que

$$\delta_T(\alpha) = \frac{1}{4\pi} \frac{\sin(T\alpha)}{\alpha}$$

é um núcleo de Dirac e portanto satisfaz $\delta_T(\alpha) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(\alpha) d\alpha = 1$. Como

$$\delta_T(\alpha) = \frac{T}{4\pi} \frac{\sin(T\alpha)}{T\alpha} = O(T),$$

quando $T \rightarrow \infty$, vemos que para T grande, $\delta_T(\alpha)$ comporta-se como uma função delta de Dirac, logo

$$f(\omega) = \frac{A^2}{4} \{ \delta(\omega + \lambda) + \delta(\omega - \lambda) \}. \quad (3.68)$$

Observe que podemos escrever

$$\gamma(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} dF(\omega),$$

com

$$F(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{if } -\pi < \omega < -\lambda \\ A^2/4, & \text{if } -\lambda \leq \omega < \lambda \\ A^2, & \text{if } \lambda \leq \omega \leq \pi. \end{cases}$$

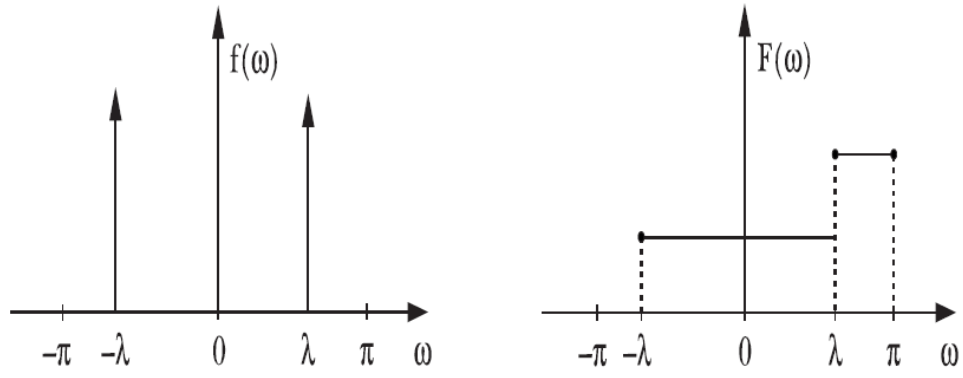


Figure 3.11: Espectro de um processo harmônico.