

# Estimação do Espectro de Fourier

## Estimadores:

- **Periodograma**
- Periodograma suavizado
- Estimadores suavizados de covariâncias

## A Transformada de Fourier Finita

a estatística básica para a estimação do espectro de um processo estacionário  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  é a transformada de Fourier finita, definida por

$$d^{(T)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \sum_{t=1}^T X_t e^{-i\lambda t}, \quad (8.1)$$

$-\infty < \lambda < \infty$ , dados os valores  $X_1, \dots, X_T$  do processo estacionário  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ .

(i)  $d^{(T)}(\lambda) = d^{(T)}(\lambda + 2\pi)$ , isto é, tem período  $2\pi$ ;

(ii)  $\overline{d^{(T)}(-\lambda)} = d^{(T)}(\lambda)$ .

Portanto, basta considerar as frequências no intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Embora (8.1) seja definida para todas as frequências nesse intervalo, ela, na prática, é calculada para frequências da forma  $\lambda_\nu = \frac{2\pi\nu}{T}$ , com  $-[(T-1)/2] \leq \nu \leq [T/2]$ , chamadas *frequências de Fourier*. Obtemos a *transformada de Fourier discreta* (TFD)

$$d_\nu^{(T)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \sum_{t=1}^T X_t e^{-i2\pi\nu t/T}. \quad (8.2)$$

Se tivermos um processo estacionário discreto  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ , o argumento acima pode ser repetido, com somas substituindo integrais. Se

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k| < \infty \quad (3.13)$$

estiver satisfeita, obtemos o espectro de  $X_t$  como

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\lambda k}, \quad -\pi < \lambda < \pi. \quad (3.14)$$

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dZ(\lambda), \quad (3.41)$$

Vamos supor, no que segue, que  $X_t$  tem média zero, f.a.c.v.  $\gamma_\tau$  e espectro dado por (3.14). Temos, então, que  $E\{d_\nu^{(T)}\} = 0$ . Calculemos  $\text{Var}\{d_\nu^{(T)}\} = E\{|d_\nu^{(T)}|^2\}$ . Usando a representação espectral de  $X_t$  em (3.41), obtemos

$$\begin{aligned} d_\nu^{(T)} &= (2\pi T)^{-1/2} \sum_{t=1}^T e^{-i\lambda_\nu t} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dZ(\lambda) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (2\pi T)^{-1/2} \sum_{t=1}^T e^{i(\lambda - \lambda_\nu)t} dZ(\lambda). \end{aligned}$$

Chamando

$$\Delta^{(T)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \sum_{t=1}^T e^{i\lambda t}, \quad (8.3)$$

temos que

$$d_\nu^{(T)} = \int_{-\pi}^{\pi} \Delta^{(T)}(\lambda - \frac{2\pi\nu}{T}) dZ(\lambda). \quad (8.4)$$

É fácil ver que  $|\Delta^{(T)}(\lambda)|^2$  é o núcleo de Fejér (veja Capítulo 1) e comporta-se como uma função delta de Dirac, quando  $T \rightarrow \infty$ . Agora,

$$\begin{aligned} E\{|d_\nu^{(T)}|^2\} &= E\{d_\nu^{(T)} \overline{d_\nu^{(T)}}\} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta^{(T)}(\lambda - \frac{2\pi\nu}{T}) \overline{\Delta^{(T)}(\alpha - \frac{2\pi\nu}{T})} E\{dZ(\lambda) \overline{dZ(\alpha)}\} \end{aligned}$$

e como  $E\{dZ(\lambda)\overline{dZ(\alpha)}\} = f(\lambda)d\lambda$ , se  $\lambda = \alpha$ , segue-se que

$$E\{|d_\nu^{(T)}|^2\} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \Delta^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi\nu}{T}\right) \right|^2 f(\lambda) d\lambda. \quad (8.5)$$

Pela propriedade acima referida do núcleo de Fejér, segue-se que se  $f(\lambda)$  for contínua, para  $T$  grande,

$$E\{|d_\nu^{(T)}|^2\} \approx f(\lambda_\nu), \quad (8.6)$$

e essa aproximação é tanto melhor quanto mais suave for  $f(\lambda)$  na vizinhança de  $\lambda_\nu = \frac{2\pi\nu}{T}$ .

**Teorema 8.1.** *Se o espectro  $f(\lambda)$  for contínuo, então as variáveis aleatórias  $d_\nu^{(T)}$ ,  $-[(T-1)/2] \leq \nu \leq [T/2]$ , são assintoticamente independentes, quando  $T \rightarrow \infty$ , com distribuição assintótica normal  $N_1^C(0, f(\lambda_\nu))$ , se  $\nu \neq 0$ ,  $T/2$  e com distribuição assintótica  $N_1(0, f(\lambda_\nu))$ , se  $\nu = 0$  ou  $T/2$ .*

O teorema 8.1 foi demonstrado sob a suposição que  $X_t$  é gaussiano. Se  $X_t$  for um processo estacionário não gaussiano, satisfazendo à condição  $\sum_\tau |\tau| |\gamma_\tau| < \infty$ , pode-se provar que

$$\text{Cov}\{d_\nu^{(T)}, d_\kappa^{(T)}\} = f(\lambda_\nu) + O(1),$$

e sob condições de regularidade adicionais sobre as frequências  $\lambda_\nu$ , a variável  $d_\nu^{(T)}$  tem distribuição normal complexa, como no teorema 8.1. Para detalhes, veja Brillinger (1981, Cap. 4).

## O Periodograma

A relação (8.6) sugere que um primeiro estimador que podemos considerar é o *periodograma*, definido por

$$I_\nu^{(T)} = |d_\nu^{(T)}|^2 = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=1}^T X_t e^{-i\lambda_\nu t} \right|^2, \quad (8.8)$$

para frequências  $\lambda_\nu = (2\pi\nu)/T$ ,  $-[(T-1)/2] \leq \nu \leq [T/2]$ . Podemos, também, definir o periodograma para qualquer frequência  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ , ou seja,

$$I^{(T)}(\lambda) = |d^{(T)}(\lambda)|^2, \quad (8.9)$$

mas, na prática, esse só poderá ser calculado para um número finito de frequências. Pode-se demonstrar que (8.9) é completamente determinado pelos seus valores nas frequências de Fourier.

De (8.6) segue-se que o periodograma é assintoticamente não viesado, isto é,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E\{I_\nu^{(T)}\} = f(\lambda_\nu). \quad (8.10)$$

Vejamos, agora, a distribuição assintótica do periodograma. Vamos supor que o processo  $X_t$  seja gaussiano.

**Teorema 8.2.** *As ordenadas do periodograma  $I_\nu^{(T)}$  são variáveis aleatórias assintoticamente independentes e com distribuição assintótica múltipla de uma variável qui-quadrado com dois graus de liberdade, se  $\nu \neq 0$  e  $\nu \neq T/2$ , e com um grau de liberdade se  $\nu = 0$  ou  $\nu = T/2$ .*

Temos, então, que *assintoticamente*,

$$\begin{aligned} E(I_\nu^{(T)}) &= f(\lambda_\nu), \\ \text{Var}(I_\nu^{(T)}) &= f^2(\lambda_\nu), \quad \nu \neq 0, \nu \neq T/2, \\ \text{Var}(I_\nu^{(T)}) &= \begin{cases} 2f^2(0), & \text{se } \nu = 0 \\ 2f^2(\pi), & \text{se } \nu = T/2. \end{cases} \end{aligned} \quad (8.12)$$

Vê-se, então, que embora o periodograma seja assintoticamente não viesado, ele não é consistente, o que significa que, mesmo aumentando o número de observações, a variância de  $I_\nu^{(T)}$  não decresce e permanece no nível de  $f^2(\lambda_\nu)$ . Pode-se demonstrar que as relações (8.12) valem para frequências quaisquer e que o teorema 8.2 continua válido, removendo-se a suposição de que  $X_t$  seja gaussiano. Veja Brillinger (1981) para detalhes.

Note que se  $\lambda = (2\pi\nu)/T$ ,  $\nu \neq 0$ ,  $\nu \neq T/2$ , o termo envolvendo  $\mu$  no segundo membro de (8.13) anula-se e obtemos a relação (8.5). Lembre também que  $|\Delta^{(T)}(\cdot)|^2$  é o núcleo de Fejér, e, se  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \neq \pi$ , o segundo termo de (8.13) é pequeno e nos diz que a média do periodograma é aproximadamente igual a uma média ponderada do espectro com peso concentrado na vizinhança de  $\lambda$ .

**Teorema 8.4.** *Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são frequências diferentes de zero ou  $\pi$ , então*

$$\begin{aligned} &\text{Cov}\{I^{(T)}(\lambda_1), I^{(T)}(\lambda_2)\} \\ &= \left\{ \left[ \frac{\text{sen}T[\lambda_1 + \lambda_2]/2}{T\text{sen}(\lambda_1 + \lambda_2)/2} \right]^2 + \left[ \frac{\text{sen}T[\lambda_1 - \lambda_2]/2}{T\text{sen}(\lambda_1 - \lambda_2)/2} \right]^2 \right\} f^2(\lambda_1) \\ &+ O(T^{-1}). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Uma consequência do teorema 8.4 é que, se as frequências  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são frequências de Fourier, distintas de zero ou  $\pi$ , então,

$$\text{Cov}\{I^{(T)}(\lambda_1), I^{(T)}(\lambda_2)\} = O(T^{-1}). \quad (8.15)$$

Também, para  $\lambda_1 = \lambda_2 = (2\pi\nu)/T$ , obtemos de (8.14) que

$$\text{Var}\{I^{(T)}(\lambda_1)\} = f^2(\lambda_1) + O(T^{-1}). \quad (8.16)$$

A relação (8.15) nos diz que as ordenadas do periodograma são praticamente não correlacionadas, resultando o seu comportamento errático.

**Exemplo 8.1.** A Figura 8.1 mostra o periodograma da série de marés de Ubatuba (exemplo 1.1 e Figura 1.1). Notamos um pico dominante, correspondente à frequência semi-diurna (período de 12 horas) e dois picos menores, anteriores ao pico principal, correspondentes a períodos de 80 horas e 24 horas, respectivamente. Vemos que esse periodograma apresenta picos, correspondendo a periodicidades presentes nos dados, mais uma componente aproximadamente constante, correspondendo a um ruído. Um modelo para essa série de marés seria constituído pela soma de um processo harmônico mais um ruído branco.

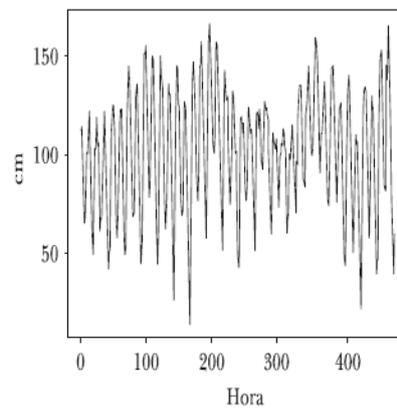


Figura 1.1: Dados horários da série de nível do mar obtidos em Ubatuba, SP.

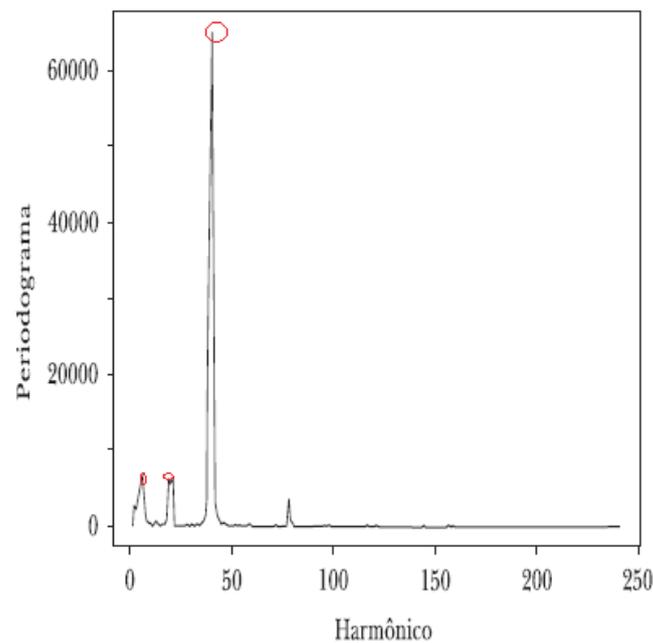


Figura 8.1: Periodograma da série de marés de Ubatuba.

**Exemplo 8.2.** Vamos retomar a série de chuvas de Fortaleza (Exemplo 1.4 e Figura 1.11). Seu periodograma está representado na Figura 8.2. Vemos que há dois picos que se destacam, correspondentes aos possíveis períodos de 13 e 26 anos. Utilizando testes de periodicidades apropriados, verifica-se que, de fato, esses períodos são estatisticamente significativos. Veja Morettin *et al.* (1985) para uma análise completa.

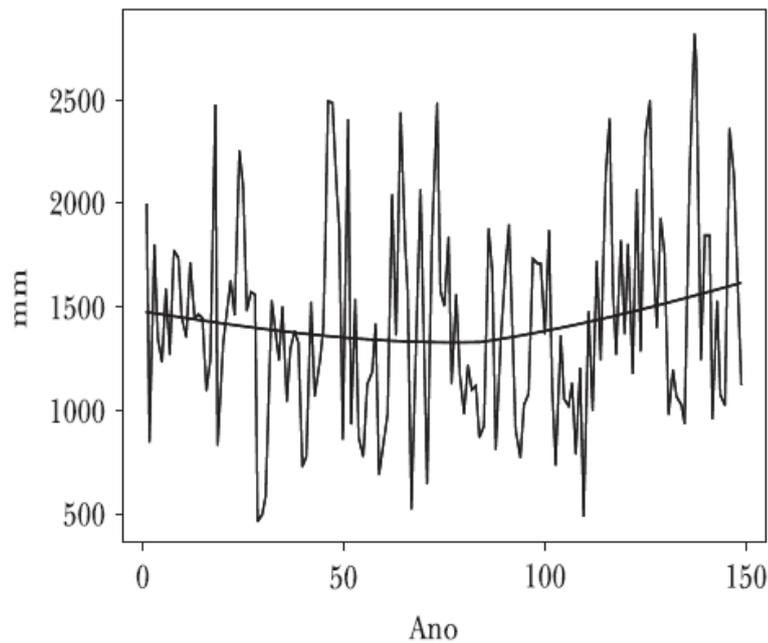


Figura 1.11: Série de precipitações de Fortaleza, Ceará, com curva ajustada pelo *Lowess*.

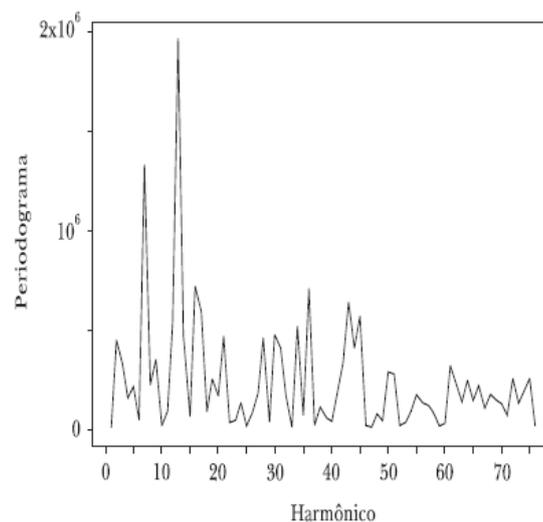


Figura 8.2: Periodograma da série de chuvas de Fortaleza.