

Estimação do Espectro Evolucionário

há várias abordagens para processos não estacionários, como:

- Priestley (processos oscilatórios),
- Cramér (processos harmonizáveis),
- Dahlhaus (processos localmente estacionários),
- Nason et al. (processos localmente estacionários de ondaletas).

No processo de estimação do espectro evolucionário, definido em cada uma dessas abordagens, podemos usar basicamente dois tipos de análises: **Análise de Fourier e Análise de Ondaletas**.

9.2 Estimação do Espectro de Priestley

Nesta seção, vamos nos basear em Priestley (1965) e Bruscato e Toloi (2004). Trataremos do caso em que $\mu(\lambda)$ seja absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue. Seja

$$U(t, \lambda_0) = \int_{1-T}^t g(u) X(t-u) e^{-i\lambda_0(t-u)} du,$$

na qual $g(u)$ é um filtro com largura de faixa B_g satisfazendo

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |G(\lambda)|^2 d\lambda = 1,$$

com $B_g = \int_{-\infty}^{\infty} |u| |g(u)| du$, e $G(\lambda)$ sendo a função de transferência (generalizada) do filtro $g(u)$, com respeito à família $\mathcal{F}$.

Consideremos o estimador

$$\hat{f}(t, \lambda_0) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} w_{M,t} |U_{t-v}(\lambda_0)|^2, \quad (9.1)$$

onde

$$U_t(\lambda_0) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} g_u X_{t-u} e^{-i\lambda_0(t-u)},$$

substituindo-se $g(u)$ pela sequência g_u .

Pode-se provar que

- (a) $E(\hat{f}(t, \lambda_0)) \approx \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t, \lambda + \lambda_0) |G(\lambda)|^2 d\lambda$,
 onde $\bar{f}(t, \lambda + \lambda_0) = \sum_v w_{M,v} f(t - v, \lambda + \lambda_0)$ e $G(\lambda)$ como definida acima.
- (b) $\text{Var}(\hat{f}(t, \lambda_0)) \approx [\bar{f}(t, \lambda_0)]^2 [\int_{-\pi}^{\pi} |W_M(\lambda)|^2 d\lambda] [\int_{-\pi}^{\pi} |G(\lambda)|^2 d\lambda] (1 + \delta_{0, \pm\pi, \lambda_0})$,
 onde

$$\bar{f}(t, \lambda_0) = \frac{\sum_v f(t - v, \lambda_0) (w_{M,v})^2}{\sum_v (w_{M,v})^2}, \quad W_M(\lambda) = \sum_v w_{M,v} e^{-iv\lambda}.$$

Para mais detalhes, veja Priestley (1988).

Exemplo 9.1. Vamos considerar o processo AR(2) com coeficientes variando no tempo do exemplo 6.3, com $a_1(u) = -1,8 \cos(1,5 - \cos(4\pi u + \pi))$, para $0 \leq u \leq 1$ e $a_2(u) = 0,81$, também para $0 \leq u \leq 1$. Na Figura 9.1 temos, no primeiro painel, o espectro verdadeiro e o logaritmo desse espectro. No segundo painel, temos os correspondentes estimadores de Priestley.

Vemos que esse estimador não consegue captar todos os picos presentes no espectro original do processo.

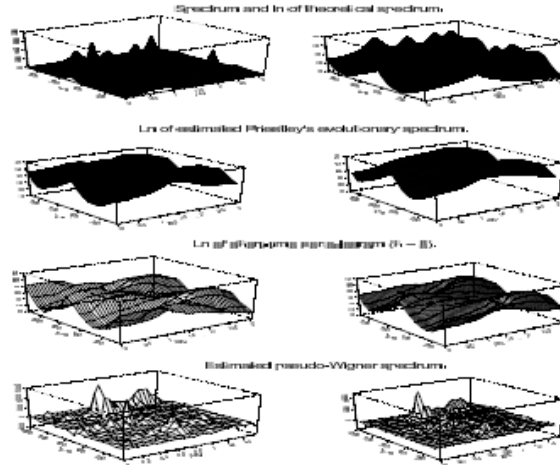


Figura 9.1: Espectro verdadeiro e estimadores para um modelo AR(2) variando no tempo.

9.3 Estimação do Espectro de Wigner-Ville

No caso de um processo não estacionário discreto $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, o espectro de Wigner-Ville é definido por

$$W(t, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau} \gamma(t - \tau/2, t + \tau/2) e^{-i\lambda\tau}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad |\lambda| < \pi. \quad (6.26)$$

O espectro de Wigner-Ville é a transformada da função de autocovariância, como dado em (6.26). Para estimar esse espectro consideramos o estimador

$$\hat{\gamma}(t+k, t-k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Psi(m, 2k) X(t+m+k) X(t+m-k), \quad (9.2)$$

em que $\Psi(m, 2k)$ é uma janela de dados a escolher. Supondo que essa janela tenha uma transformada de Fourier inversa, ψ , uma classe de estimadores do espectro de Wigner-Ville é dada por

$$\hat{f}_{WV}(t, \lambda; \psi) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inm} \psi(n, 2k) X(t+m+k) X(t+m-k) e^{-2i\lambda k} dn. \quad (9.3)$$

9.4 Estimação do Espectro de PLE

Nesta seção, trataremos da estimação do espectro dependente do tempo $f(u, \lambda)$, de um processo localmente estacionário no sentido de Dahlhaus.

9.4.1 Usando o periodograma segmentado

O que segue é baseado em Dahlhaus (1996). Primeiramente, podemos estimar a covariância local (6.35) por

$$\hat{c}_T(u, k) = \frac{1}{b_T T} \sum_t K\left(\frac{u - (t+k/2)T}{b_T}\right) X_{t,T} X_{t+k,T}. \quad (9.8)$$

Aqui, K é um núcleo não negativo, par, $\int K(x)dx = 1$ e $K(x) = 0$, para $x \notin [-1/2, 1/2]$; b_T é uma largura de faixa no tempo.

Por analogia com (6.6), a *covariância local de lag k e tempo u* é definida por

$$c(u, k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u, \lambda) e^{i\lambda k} d\lambda. \quad (6.35)$$

Não é difícil mostrar que

$$\text{Cov}\{X_{[uT],T}, X_{[uT]+k,T}\} = c(u, k) + O(T^{-1}), \quad (6.36)$$

uniformemente em u e k .

Se $X_{t,T}$ for um PLE , com média zero e se $A(u, \lambda)$ for duas vezes derivável em u , com derivadas uniformemente limitadas, então, pode-se provar que

$$\begin{aligned} E\{\hat{c}_T(u, k)\} &= c(u, k) + \frac{b_T^2}{2} \int x^2 K(x) dx \left[\frac{\partial^2 c(u, k)}{\partial u^2} \right] + \\ &+ o(b_T^2) + O(b_T^{-1} T^{-1}). \end{aligned} \quad (9.9)$$

No lado direito de (9.9), o segundo termo representa o viés devido à não estacionariedade e anula-se se o processo for estacionário (a segunda derivada é zero, neste caso). Note, também, que $b_T T$ fornece o intervalo efetivo para a estimação de $c(u, k)$.

Sob as mesmas condições, pode-se mostrar que a variância do estimador é dada por

$$\text{Var}\{\hat{c}_T(u, k)\} = \frac{1}{b_T T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c(u, \ell)[c(u, \ell) + c(u, \ell + 2k)]. \quad (9.10)$$

Vamos passar, agora, à estimação de $f(u, \lambda)$. Considere o periodograma modificado (*tapered*)

$$I_N(u, \lambda) = \frac{1}{2\pi H_N} \left| \sum_{s=1}^N h(s/N) X_{[uT]-N/2+s, T} e^{-i\lambda s} \right|^2, \quad (9.11)$$

onde $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma janela de dados (*taper*), com $h(x) = h(1 - x)$. Esse estimador é também chamado periodograma segmentado, pois estima $f(u, \lambda)$ sobre o segmento $\{[uT] - N/2 + 1, [uT] + N/2\}$.

Considere a função

$$K_t(x) = \left[\int_0^1 h^2(x) dx \right]^{-1} h^2(x + 1/2), \quad -1/2 \leq x \leq 1/2.$$

O teorema a seguir mostra que essa função faz o papel de uma janela no domínio do tempo, com $b_T = N/T$ fazendo o papel da largura de faixa.

Considere o estimador suavizado

$$\hat{f}(u, \lambda) = \frac{1}{b_f} \int K_f \left(\frac{\lambda - \alpha}{b_f} \right) I_N(u, \alpha) d\alpha, \quad (9.12)$$

onde $K_f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ é um núcleo com as propriedades do núcleo K de (9.5); b_f é a largura de faixa na direção da frequência.

Então, temos o seguinte resultado (Dahlhaus, 1996).

Teorema 9.1. *Suponha que $X_{t,T}$ seja um PLE, com média zero e função de transferência A com derivadas segundas com relação a u e λ contínuas. Então:*

$$(i) \ E\{I_N(u, \lambda)\} = f(u, \lambda) + \frac{b_T^2}{2} \int_{-1/2}^{1/2} x^2 K_t(x) dx \left[\frac{\partial^2 f(u, \lambda)}{\partial u^2} \right] \\ + o(b_T^2) + O\left(\frac{\log(b_T T)}{b_T T}\right);$$

$$(ii) \ E\{\hat{f}(u, \lambda)\} = f(u, \lambda) + \frac{b_T^2}{2} \int_{-1/2}^{1/2} x^2 K_t(x) dx \left[\frac{\partial^2 f(u, \lambda)}{\partial \lambda^2} \right] \\ + \frac{b_f^2}{2} \int_{-1/2}^{1/2} x^2 K_f(x) dx \left[\frac{\partial^2 f(u, \lambda)}{\partial \lambda^2} \right] + o(b_t^2 + \frac{\log(b_t T)}{b_t T} + b_f^2);$$

$$(iii) \ \text{Var}\{\hat{f}(u, \lambda)\} = (b_T b_f T)^{-1} f(u, \lambda)^2 \int_{-1/2}^{1/2} K_t(x)^2 dx \cdot \\ \cdot \int_{-1/2}^{1/2} K_f(x)^2 dx (2\pi + 2\pi\{\lambda \equiv 0(\text{mod } \pi)\}).$$

9.4.2 Usando ondaletas

Vejamos, agora, como utilizar ondaletas para estimar o espectro evolucionário $f(u, \lambda)$ de um processo localmente estacionário. Como esse é uma função de duas variáveis, teremos que usar bases de ondaletas bidimensionais, como visto na seção 4.7.

O procedimento consiste em aplicar limiares não lineares aos coeficientes de ondaletas empíricos do espectro evolucionário. Como vimos, esse procedimento é adaptativo, no sentido de ser ótimo com relação a algum critério de erro, como o risco L^2 .

Consideraremos, aqui, estimadores construídos usando-se a base $\mathcal{B}_2$, definida em (4.50), e o periodograma segmentado, dado em (9.11).

Vamos supor, também, que na representação (4.52) existe uma escala de resolução mais grossa $j = 0$. Considere a projeção de $f(u, \lambda)$ sobre o espaço 2^{2J} -dimensional $V_J \subset L^2(U \times V)$, denotado $f_J(u, \lambda)$, e sua decomposição em ondaletas na forma

$$f_J(u, \lambda) = c_{0,0} + \sum_{j=0}^J \sum_{\mathbf{k}=0}^{2^j-1} \sum_{\mu=h,v,d} d_{j,\mathbf{k}}^\mu \Psi_{j,\mathbf{k}}^\mu(u, \lambda), \quad (9.13)$$

amostrada na grade (u_i, λ_i) , $0 \leq i, n \leq N-1$. Note que estamos denotando $U \times V = [0, 1] \times [-1/2, 1/2]$ e λ é a frequência em ciclos por unidade de tempo. Vemos, portanto, que estamos nos restringindo à escala mais fina, J . Os coeficientes de (9.13) são dados por

$$c_{0,0} = \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} f(u, \lambda) du d\lambda, \quad (9.14)$$

$$d_{j,\mathbf{k}}^\mu = \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} f(u, \lambda) \Psi_{j,\mathbf{k}}^\mu(u, \lambda) du d\lambda. \quad (9.15)$$

Como não conhecemos o verdadeiro espectro, esse é substituído em (9.14) e (9.15) pelo periodograma (9.11), sendo que esse é calculado sobre segmentos superpostos de $X_{t,T}$, de comprimentos iguais a N . Seja S a translação de segmento para segmento, $1 \leq S \leq N$. Então, o periodograma é calculado nos instantes de tempo

$$u_i = \frac{t_i}{T}, \quad t_i = Si + \frac{N}{2}, \quad 0 \leq i \leq N-1,$$

com $T = SN$, e nas frequências $\lambda_n = 2\pi n/N$, $0 \leq n \leq N-1$.

Os coeficientes empíricos resultantes são

$$\hat{c}_{0,0} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-1/2}^{1/2} I_N(u_i, \lambda) d\lambda, \quad (9.16)$$

$$\hat{d}_{j,k}^\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-1/2}^{1/2} I_N(u_i, \lambda) \Psi_{j,k}^\mu(u_i, \lambda) d\lambda. \quad (9.17)$$

Teorema 9.2. *Sob condições apropriadas, para $T \rightarrow \infty$, uniformemente em j, k , com $2^j = o(N)$,*

- (i) $E(\hat{d}_{j,k}^\mu - d_{j,k}^\mu) = O(2^{-j}N^{-1}) = o(T^{-1/2})$, para todo μ .
- (ii) $Var(\hat{d}_{j,k}^\mu) = A_{j,k}^\mu/T + O(2^jN/T^2) + O(2^{-j}T^{-1})$, para todo μ .
- (iii) $T^{L/2} cum_L\{\hat{d}_{j,k}^\mu\} = o(1)$, $\forall L \geq 3$.
- (iv) $\sqrt{T}(\hat{d}_{j,k}^\mu - d_{j,k}^\mu)$ é assintoticamente normal com média zero e variância $A_{j,k}^\mu$, onde na soma (9.17), N é substituído por M , tal que $T = S(M-1) + N$, $1 \leq S \leq N$, $u_i = t_i/T$, $t_i = S_i + N/2$, $0 \leq i \leq M-1$, e

$$A_{j,k}^\mu = 2C_h \int_{U \times V} \{f(u, \lambda) \Psi_{j,k}^\mu(u, \lambda)\}^2 dud\lambda, \quad (9.18)$$

com $C_h = \int_0^1 h^4(x)dx / (\int_0^1 h^2(x)dx)^2$, para $S = N$, e $C_h = 1$ se $S/N \rightarrow 0$.

A introdução do parâmetro adicional M é para controlar a regularidade na direção u . Veja von Sachs e Schneider (1996) para comentários adicionais.

Como estimador do espectro $f(u, \lambda)$, tomamos

$$\hat{f}_T(u, \lambda) = \hat{c}_{0,0} + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{\mathbf{k}=0}^{2^j-1} \sum_{\mu=h,v,d} \hat{d}_{j,\mathbf{k}}^S \Psi_{j,\mathbf{k}}^\mu(u, \lambda), \quad (9.19)$$

com limiar suave $\hat{d}_{j,\mathbf{k}}^S = \delta_{\lambda_T}^S(\hat{d}_{j,\mathbf{k}}^\mu)$, e parâmetro

$$\lambda_T = \lambda_{T;j,\mathbf{k}} = \frac{K \log T}{T^{1/2}},$$

ou seja, o limiar é o mesmo para todo $j, \mathbf{k}$ e μ .

Seja $\mathcal{F}$ uma classe apropriada de funções, com parâmetro de regularidade (suavidade) α . Então pode-se provar que o estimador (9.19) satisfaz

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} E \|\hat{f}_T - f\|_{L^2}^2 = O(T^{-2\alpha/(2\alpha+2)} (\log T)^2). \quad (9.20)$$

Alguns espaços de Funções conveniente são os de Besov, Hölder ou Sobolev. Veja von Sachs and Schneider (1996) para outros detalhes.

Um estimador para K pode ser

$$\hat{K} = 2C_h \max_{0 < u < 1} \max_{-1/2 < \lambda < 1/2} |\tilde{f}(u, \lambda)|,$$

com C_h dado em (9.18) e $\tilde{f}$ um estimador consistente qualquer de f .

Para o uso da base $\mathcal{B}_1$ veja as referências acima citadas.