

Ondaletas

Ondaletas são funções que satisfazem certas propriedades. Elas podem ser **suaves ou não**, **simétricas ou não** e podem ter **expressões matemáticas simples ou não**.

Por analogia com a análise de Fourier, considere o espaço $L^2(\mathbb{R})$ de todas funções mensuráveis de quadrado integrável sobre \mathbb{R} . Aqui, as funções $f(t)$ devem decair para zero, quando $|t| \rightarrow \infty$; logo, as exponenciais (1.8) não pertencem a esse espaço. Ao procurar ondas que geram $L^2(\mathbb{R})$, elas devem decair rapidamente para zero. ...

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad (4.2)$$

isto é, $\psi_{j,k}(t)$ é obtida de $\psi(t)$ por uma *dilatação binária* 2^j e uma *translação diádica* $k2^{-j}$. Estamos, então, considerando um caso particular de (4.1). As funções $\{\psi_{j,k}(t), j, k \in \mathbb{Z}\}$ formam uma base que não precisa ser necessariamente ortogonal.

A vantagem de se trabalhar com bases ortogonais é permitir a reconstrução perfeita do sinal original a partir dos coeficientes da transformada. Uma transformada ortogonal, como aquela usando senos e cossenos, é concisa, e cada coeficiente é calculado como o produto interno do sinal com a função da base.

Considere, pois, uma base ortonormal gerada por ψ :

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad (4.3)$$

ou seja,

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{\ell,m} \rangle = \delta_{j,\ell}\delta_{k,m}, \quad j, k, \ell, m \in \mathbb{Z}, \quad (4.4)$$

e de tal sorte que, para qualquer $f(t)$ de quadrado integrável sobre \mathbb{R} ,

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k}\psi_{j,k}(t). \quad (4.5)$$

Aqui, também, a convergência em (4.5) deve ser entendida em média quadrática. Dizemos que (4.5) é uma *série de ondaletas* de $f(t)$ e os *coeficientes de ondaletas* são dados por

$$c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt. \quad (4.6)$$

A relação de Parseval análoga a (1.16) vale também aqui, a saber

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \sum_j \sum_k c_{j,k}^2.$$

As funções ψ e $\psi_{j,k}$ satisfazem certas propriedades, dentre as quais citamos:

(P1) $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ (admissibilidade).

(P2) $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)| dt < \infty$.

(P3) $c_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$, onde $\Psi(\omega)$ é a transformada de Fourier de $\psi(t)$.

Uma condição necessária para (P3) valer é que $\Psi(0) = 0$, que é equivalente a (P1).

(P4) $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1$ ou $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\omega)|^2 d\omega = 2\pi$.

(P5) Os primeiros $r - 1$ momentos de ψ anulam-se, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^j \psi(t) dt = 0, \quad j = 0, 1, \dots, r - 1,$$

para algum $r \geq 1$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t^r \psi(t)| dt < \infty.$$

O valor de r está ligado ao grau de suavidade (regularidade) de ψ : quanto maior r , mais suave será ψ .

Algumas ondaletas têm **suporte compacto**, que é uma propriedade desejável e tem a ver com o fato de as ondaletas serem localizadas no tempo.

Nem todas as ondaletas geram sistemas ortogonais, como o chapéu mexicano.

No caso de ondaletas com suporte compacto, o valor de **r** está também relacionado com o suporte da ondaleta.

Veremos que uma maneira de gerar ondaletas é pela *função escala*, ou *ondaleta pai*, ϕ , que é uma solução da equação

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k \ell_k \phi(2t - k). \quad (4.7)$$

Essa função gera uma família ortonormal em $L^2(\mathbb{R})$,

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (4.8)$$

Nessas condições, ψ pode ser obtida de ϕ por

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2t - k), \quad (4.9)$$

sendo

$$h_k = (-1)^k \ell_{1-k}, \quad (4.10)$$

a chamada *quadrature mirror filter relation*. Na realidade, ℓ_k e h_k são coeficientes de filtros passa-baixo (*low-pass*) e passa-alto (*high-pass*), respectivamente, chamados *quadrature mirror filters*, usados para calcular a transformada de ondaleta discreta. Esses coeficientes são dados por

$$\ell_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi(2t - k) dt, \quad (4.11)$$

$$h_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \phi(2t - k) dt. \quad (4.12)$$

Pode-se mostrar que $\sum_k \ell_k = \sqrt{2}$, $\sum_k h_k = 0$, $\sum_k \ell_k^2 = 1$ e

$\sum_k \ell_k h_{k-2m} = 1$, se $m = 0$, e igual a zero, caso contrário.

Convém, então, considerar o sistema ortonormal

$$\{\phi_{j,k}(t), \psi_{j,k}(t), j, k \in \mathbb{Z}\}, \quad (4.13)$$

de tal sorte que podemos escrever, para $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$,

$$f(t) = \sum_k c_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j \geq j_0} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (4.14)$$

na qual

$$c_{j_0,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi_{j_0,k}(t) dt, \quad (4.15)$$

$$d_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt. \quad (4.16)$$

Em (4.14), j_0 é a escala de resolução mais baixa (*coarsest scale*).

Exemplo 4.1. O exemplo mais antigo e simples de ondaleta é a função de Haar,

$$\psi^{(H)}(t) = \begin{cases} +1, & 0 \leq t < 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq t < 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.17)$$

para a qual a função escala é $\phi^{(H)}(t) = 1, 0 \leq t \leq 1$ e

$$\psi_{j,k}^{(H)}(t) = \begin{cases} 2^{j/2}, & 2^{-j}k \leq t < 2^{-j}(k+1/2) \\ -2^{j/2}, & 2^{-j}(k+1/2) \leq t < 2^{-j}(k+1) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.18)$$

Pela equação (4.7):

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k \ell_k \phi(2t - k). \quad (4.7)$$

$$\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \phi(2t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \phi(2t - 1),$$

logo $\ell_0 = \ell_1 = 1/\sqrt{2}$. Do mesmo modo, $h_0 = -h_1 = 1/\sqrt{2}$.

Exemplo 4.2. Além de (4.18), as ondaletas ortogonais, de suporte compacto, que são usadas mais frequentemente, são as Ondaletas de Daubechies: as denominadas “Extremal Phase” (*Daublets*), as denominadas “Least Asymmetric” (*Symmlets*) e as *Coiflets*. Todas foram introduzidas por Daubechies e são não simétricas. As *Symmlets* são as “mais simétricas” e usadas como *default* em alguns programas. O termo *Coiflet* foi cunhado por Daubechies em homenagem a R. Coifman.

Essas ondaletas são obtidas dos filtros ℓ_k e h_k e depois usando as equações de dilatação (4.7) e (4.9). Por exemplo, a ondaleta d2 (*Daublet*) é obtida pelas equações

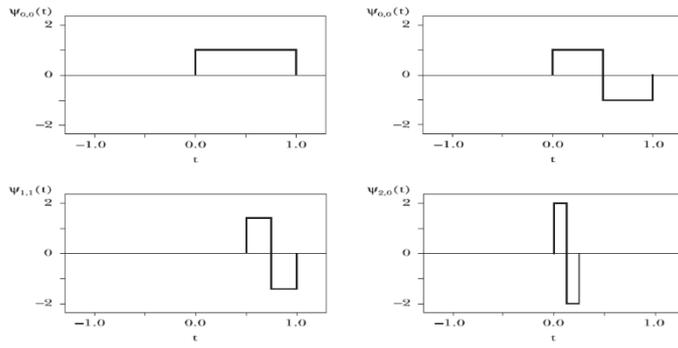
$$\phi(t) = h_0 \phi(2t) + h_1 \phi(2t - 1) + h_2 \phi(2t - 2) + h_3 \phi(2t - 3), \quad (4.19)$$

$$\psi(t) = h_3 \phi(2t) - h_2 \phi(2t - 1) + h_1 \phi(2t - 2) - h_0 \phi(2t - 3). \quad (4.20)$$

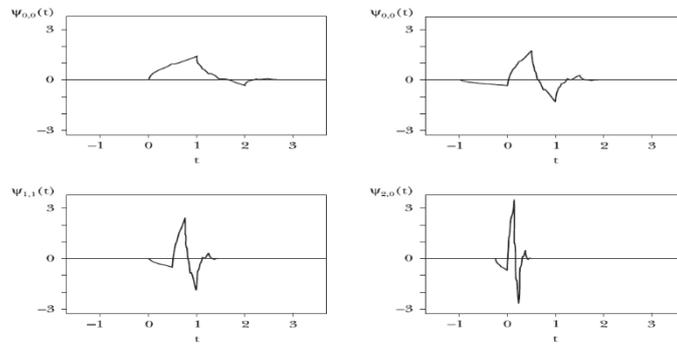
Fazemos $t = 1, 2$, depois $t = 1/2, 3/2, 5/2$ etc para obter o gráfico de d2 para $0 < t < 3$. Aqui,

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}, \quad h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}, \quad h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}, \quad h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4}.$$

Obtemos um filtro melhor que o de Haar. Para d4, teremos 8 coeficientes e maior regularidade. Em geral, essas ondaletas dependem de um parâmetro N que controla a regularidade de ϕ e ψ . Se tivermos $2N$ coeficientes do filtro não nulos, então ψ terá suporte em $[-N + 1, N]$ e N momentos nulos.

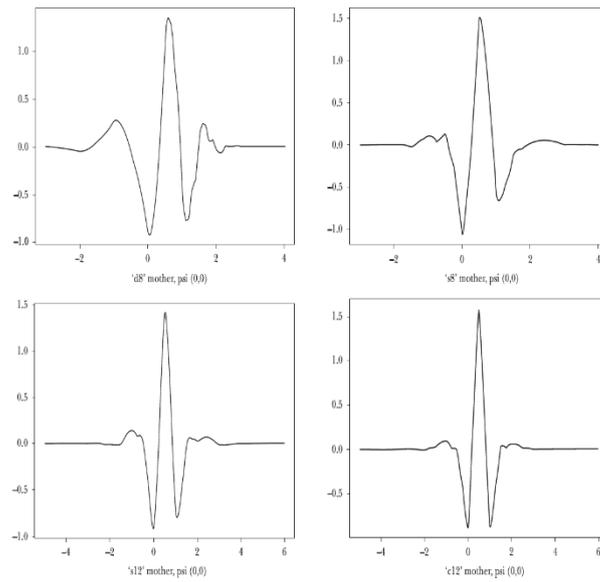


(a)



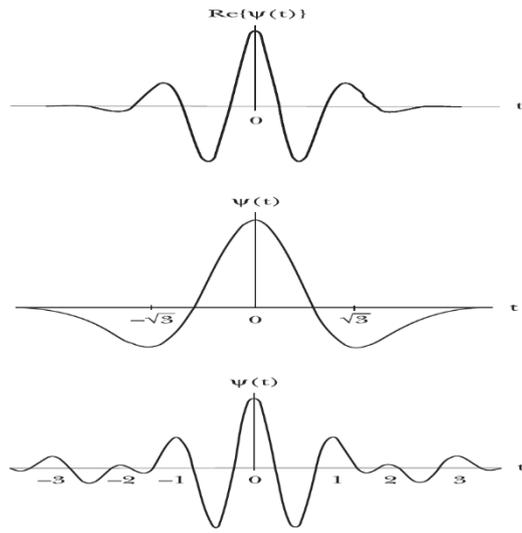
(b)

Figura 4.1: Algumas ondaletas. (a) Haar; (b) Daubechies d2.



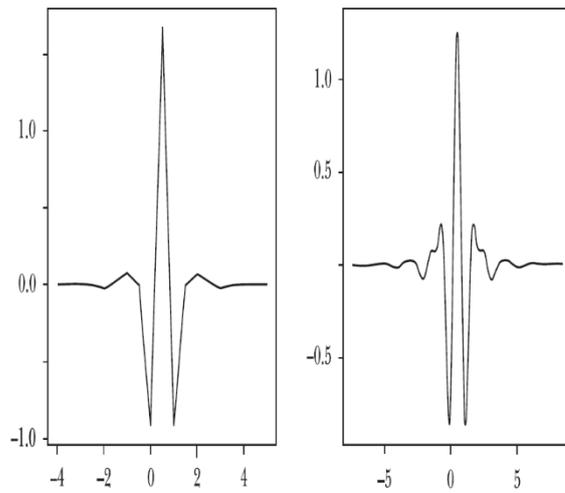
(c)

Figura 4.1: Algumas ondaletas. (c) daublet (d8), symmlets (s8, s12), coiflet (c12).



(d)

Figura 4.1: Algumas ondaletas. (d) Morlet, Chapéu Mexicano, Shannon.



(e)

Figura 4.1: Algumas ondaletas. (e) Battle-Lemarié.

Famílias de wavelets mais usadas

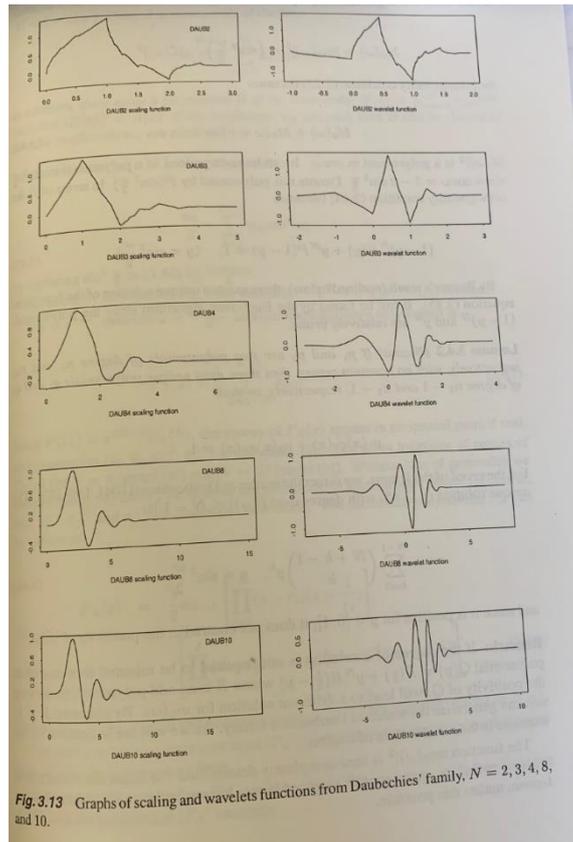


Table 3.2 The h filters for Daubechies' wavelets for $N = 2, \dots, 10$ vanishing moments.

k	DAUB2	DAUB3	DAUB4
0	0.4829629131445342	0.3326705529500827	0.2303778133088966
1	0.8365163037378080	0.8068915093110930	0.7148465705529161
2	0.2241438680420134	0.4598775021184915	0.6308807679298592
3	-0.1294095225512604	-0.1350110200102548	-0.0279837694168604
4		-0.0854412738820267	-0.1870348117190935
5		0.0352262918857096	0.0308413818355607
6			0.0328830116668852
7			-0.0105974017850690
k	DAUB5	DAUB6	DAUB7
0	0.1601023979741926	0.1115407433501095	0.0778520540850092
1	0.6038292697971887	0.4946238903984531	0.3965393194819173
2	0.7243085284377723	0.7511339080210954	0.7291320908462351
3	0.1384281459013216	0.3152503517091976	0.4697822874051931
4	-0.2422948870663808	-0.2262646939654398	-0.1439060039285650
5	-0.0322448695846383	-0.1297668675672619	-0.2240361849938750
6	0.0775714938400454	0.0975016055873230	0.0713092192668303
7	-0.0062414902127983	0.0275228655303057	0.0806126091510831
8	-0.0125807519990819	-0.0315820393174860	-0.0380299369350144
9	0.0033357252854738	0.0005538422011615	-0.0165745416306669
10		0.0047772575109455	0.0125509985560998
11		-0.0010773010853085	0.0004295779729214
12			-0.0018016407040475
13			0.0003537137999745
k	DAUB8	DAUB9	DAUB10
0	0.0544158422431070	0.0380779473638881	0.0266700579005487
1	0.3128715909143165	0.2438346746126514	0.1881768000776480
2	0.6756307362973218	0.6048231236902548	0.5272011889316280
3	0.5853546836542239	0.6572880780514298	0.6884590394535462
4	-0.0158291052563724	0.1331973858249681	0.2811723436606982
5	-0.2840155429615815	-0.2932737832793372	-0.2498464243271048
6	0.0004724845739030	-0.0968407832230689	-0.1959462743773243
7	0.1287474266204823	0.1485407493381040	0.1273693403356940
8	-0.0173693010018109	0.0307256814793158	0.0930573646035142
9	-0.0440882539307979	-0.0676328290613591	-0.0713941471663802
10	0.0139810279173996	0.0002509471148278	-0.0294575368218849
11	0.0087460940474065	0.0223616621236844	0.0332126740593155
12	-0.0048703529934519	-0.0047232047577528	0.0036065535669515
13	-0.0003917403733769	-0.0042815036824646	-0.0107331754833277
14	0.0006754494064506	0.0018476468830567	0.0013953517470513
15	-0.0001174767841248	0.0002303857635232	0.0019924052951842
16		-0.0002519631889428	-0.0006858566949593
17		0.0000393473203163	-0.0001164668551292
18			-0.0000132642028945

Table 3.4 Symmlet coefficients for $N = 4, 5,$ and 6 vanishing moments.

k	SYMM4	SYMM5	SYMM6
0	0.032223100604052	0.019538882735250	0.015404109327045
1	-0.012603967262031	-0.021101834024689	0.003490712084222
2	-0.099219543576634	-0.175328089908056	-0.117990111148520
3	0.297857795605306	0.016602105764511	-0.048311742585698
4	0.803738751805133	0.633978963456791	0.491055941927974
5	0.497618667632775	0.723407690404040	0.787641141028651
6	-0.029635527646003	0.199397533976856	0.337929421728166
7	-0.075765714789502	-0.039134249302313	-0.072637522786377
8		0.029519490925706	-0.021060292512371
9		0.027333068344999	0.044724901770781
10			0.001767711864254
11			-0.007800708325032

A.2. Daubechies–Lagarias algorithm

A challenge in exhibiting a wavelet-based classifier is computational. Namely, except for the Haar wavelet, all compactly supported orthonormal families of wavelets (e.g. Daubechies, Symmlet, Coiflet, etc.) scaling and wavelet functions have no closed form. A non-elegant solution is to have values of the mother and father wavelet given in a table. Evaluation of $\phi_{jk}(x)$ or $\psi_{jk}(x)$, for given x , then can be performed by interpolating the table values.

Based on Daubechies and Lagarias [9, 10] *local pyramidal algorithm* a solution is proposed. A brief theoretical description and MATLAB program are provided.

Let ϕ be the scaling function of a compactly supported wavelet generating an orthogonal MRA. Suppose the support of ϕ is $[0, N]$. Let $x \in (0, 1)$, and let $\text{dyad}(x) = \{d_1, d_2, \dots, d_n, \dots\}$ be the set of 0–1 digits in dyadic representation of x ($x = \sum_{j=1}^{\infty} d_j 2^{-j}$). By $\text{dyad}(x, n)$ we denote the subset of the first n digits from $\text{dyad}(x)$, i.e. $\text{dyad}(x, n) = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$.

Let $h = (h_0, h_1, \dots, h_N)$ be the vector of wavelet filter coefficients. Define two $N \times N$ matrices as

$$T_0 = \sqrt{2}(h_{2i-j-1})_{1 \leq i, j \leq N} \quad \text{and} \quad T_1 = \sqrt{2}(h_{2i-j})_{1 \leq i, j \leq N} \quad (\text{A3})$$

Then

Theorem 3(Daubechies and Lagarias [10])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{d_1} \cdot T_{d_2} \cdots T_{d_n} = \begin{bmatrix} \phi(x) & \phi(x) & \cdots & \phi(x) \\ \phi(x+1) & \phi(x+1) & \cdots & \phi(x+1) \\ \vdots & & & \\ \phi(x+N-1) & \phi(x+N-1) & \cdots & \phi(x+N-1) \end{bmatrix} \quad (\text{A4})$$

The convergence of $\|T_{d_1} \cdot T_{d_2} \cdots T_{d_n} - T_{d_1} \cdots T_{d_2} \cdot T_{d_{n+m}}\|$ to zero, for fixed m , is exponential and constructive, i.e. effective bounds, that decrease exponentially to 0, can be established.

Example

Consider the DAUB 2 wavelet basis ($N = 3$). The corresponding filter is $((1 + \sqrt{3})/4 \times \sqrt{2}, (3 - \sqrt{3})/4\sqrt{2}, (3 + \sqrt{3})/4\sqrt{2}, (1 - \sqrt{3})/4\sqrt{2})$. According to (A3) the matrices T_0 and T_1 are given as

$$T_0 = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3-\sqrt{3}}{4} & \frac{3+\sqrt{3}}{4} & \frac{1+\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{1-\sqrt{3}}{4} & \frac{3-\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad T_1 = \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{3}}{4} & \frac{1+\sqrt{3}}{4} & 0 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{4} & \frac{3-\sqrt{3}}{4} & \frac{3+\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1-\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

If, for instance, $x = 0.45$, then $\text{dyad}(0.45, 20) = \{0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1\}$. The values $\phi(0.45)$, $\phi(1.45)$, and $\phi(2.45)$ are calculated as

$$\prod_{i \in \text{dyad}(0.45, 20)} T_i = \begin{bmatrix} 0.86480582 & 0.86480459 & 0.86480336 \\ 0.08641418 & 0.08641568 & 0.08641719 \\ 0.04878000 & 0.04877973 & 0.04877945 \end{bmatrix}$$

By using the so-called two-scale equations, it is possible to give an algorithm for calculating values of the mother wavelet, the function ψ_{jk} , see Reference [11]. For our purposes direct calculation of wavelet coefficients is unnecessary since, having scaling coefficients at some level J , all wavelet coefficients at coarser levels can be obtained utilizing Mallat's algorithm.

Análise de Multirresolução

A análise de multirresolução permite analisar os dados disponíveis em várias escalas de resolução. É como se pudéssemos “olhar” esses dados por um microscópio e ver seu comportamento em várias “magnificações”

Formalmente, uma análise de multirresolução (AMR) é uma sequência crescente de subespaços fechados $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$, que aproximam $L^2(\mathbb{R})$, isto é,

$$(MR1) \dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$$

$$(MR2) L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_j V_j}.$$

$$(MR3) \bigcap_j V_j = \{0\}.$$

A idéia que está por trás dessas relações é a seguinte. Considere uma função f de $L^2(\mathbb{R})$, e queremos obter aproximações a f em vários níveis de resolução. Cada subespaço V_j será constituído por funções aproximantes, sendo que a melhor aproximação é obtida considerando-se a projeção ortogonal de f sobre cada V_j . Se $\hat{f}_j(x)$ indicar tal projeção, então,

$$\forall g(x) \in V_j, \quad \|g(x) - f(x)\| \geq \|\hat{f}_j(x) - f(x)\|.$$

O fato que $V_j \subset V_{j+1}$ significa que, ao passar do nível de resolução j (ou escala 2^j) para o nível de resolução $(j+1)$, ganhamos informação (ou adicionamos “detalhes”). À medida que a resolução aumenta ($j \rightarrow \infty$), a função aproximada converge para a função original e obtemos (MR2).

Por outro lado, quando aproximamos f a níveis de resolução cada vez menores, perdemos informação. Ou seja, para $j \rightarrow -\infty$, a aproximação de f converge para a função nula e temos (MR3).

Numa AMR, o espaço V_{j+1} é obtido de V_j escalando-se as funções aproximadoras pela razão dos respectivos níveis de resolução. Ou seja,

$$(MR4) f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}, \forall j.$$

Pode-se provar (Mallat, 1989a, b) que existe uma função $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ (a função escala), tal que $\{\phi_{j,k}(t), k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal de V_j , onde $\phi_{j,k}(t)$ é dada por (4.8).

A informação que é perdida, quando “descemos” de V_{j+1} para V_j (o “detalhe” perdido), pode ser representada pelo espaço W_j , complemento ortogonal de V_j em V_{j+1} , isto é,

$$(MR5) \quad V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad W_j \perp V_j,$$

onde \oplus representa soma direta. Segue-se que $V_j = \bigoplus_{i=-\infty}^{j-1} W_i$.

Defina $\psi(t)$ por (4.9). Então, pode-se mostrar que $\{\psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ forma uma base ortogonal para W_j . Como $\cup_j V_j = \cup_j W_j$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$, as funções $\{\psi_{j,k}, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$ formam uma base ortogonal para $L^2(\mathbb{R})$.

Dada f de $L^2(\mathbb{R})$, existe J tal que $f_J \in V_J$ aproxima f . Se $g_i \in W_i, f_i \in V_i$, por (MR5), temos

$$f_J = f_{J-1} + g_{J-1}$$

e repetindo o argumento,

$$f \simeq f_J = g_{J-1} + g_{J-2} + \dots + g_{J-M} + f_{J-M}. \quad (4.21)$$

Dizemos que (4.21) é uma decomposição de f em ondaletas. Observe que f_{J-M} é uma combinação linear das $\phi_{J-M,k}$ e g_j são combinações lineares das $\psi_{j,k}$, $j = J - M, \dots, J - 1$.

Exemplo 4.5. Na Figura 4.2, temos um sinal que consiste na execução, numa flauta, de um fraseado não ligado, trêmulo dedilhado, com as notas sol (G4) e si (B4) da segunda oitava. Temos $T = 2^{17} = 131072$ pontos. Na Figura 4.3, temos uma análise de multirresolução, usando a ondaleta d16. O nível 16 é o mais fino nessa análise, enquanto que o nível 1 é o mais grosso. A Figura 4.4 mostra a distribuição de energia da série, evidenciando o fato que praticamente toda a energia está concentrada nos níveis de 11 a 14, sendo o nível 12 o mais energético. Do ponto de vista musical, o nível 16 corresponde ao ruído provocado pelo sopro do instrumento, enquanto que os níveis 1 a 6 são praticamente inaudíveis.

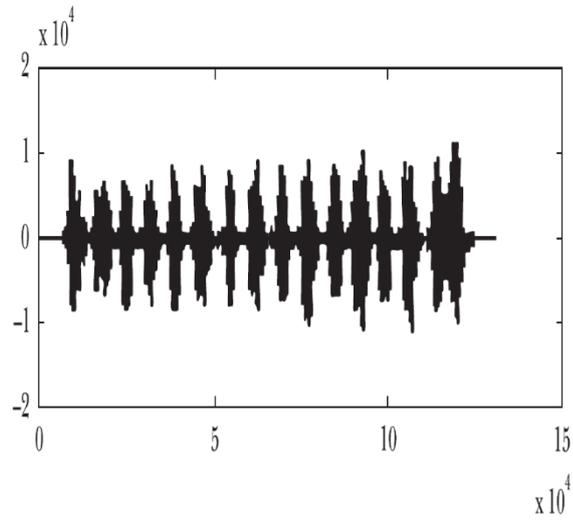


Figura 4.2: Fraseado Não ligado em Flauta, notas sol e si.

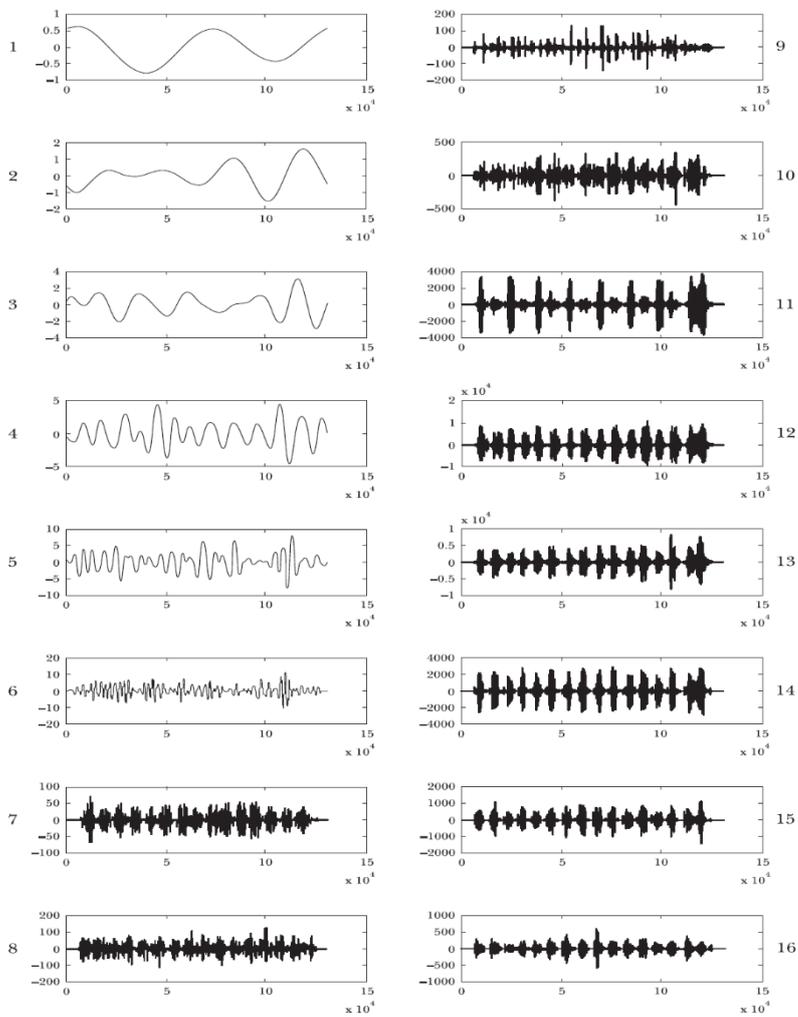


Figura 4.3: Análise de multirresolução para a série da Figura 4.2.

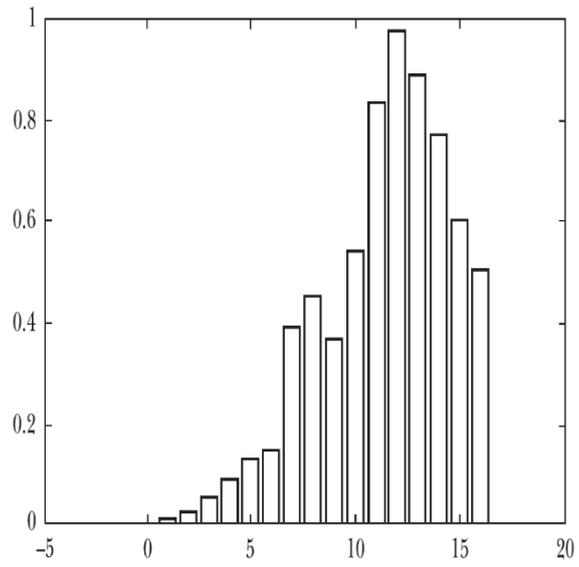


Figura 4.4: Distribuição de energia da série da Figura 4.2.

Ondaletas Periódicas

A única base natural de ondaletas em $[0, 1]$ é a base de Haar. Para obter bases ortogonais em $[0, 1]$ com outras ondaletas é necessário periodizá-las.

Começamos especificando uma função escala $\phi \in L_2$, que determina a ondaleta mãe ψ .

Definimos

$$\tilde{\phi}_{jk}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_{jk}(t + n), \quad (4.23)$$

e

$$\tilde{\psi}_{jk}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_{jk}(t + n). \quad (4.24)$$

Esta operação muda somente as ondaletas cujo domínio contém pontos $x, x + 1$ etc, para algum x . Se o suporte da ondaleta está contido em $[k, k + 1]$, então a ondaleta permanece a mesma, somente transladada para o intervalo $[0, 1]$. Note que,

$$\tilde{\phi}_{jk}(t) = 2^{j/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(2^j(t + n - 2^{-j}k)) = 2^{j/2} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \phi(2^j(t + n')) = \tilde{\phi}_{j0}(t), \quad (4.25)$$

se $2^{-j}k$ é um inteiro, isto é, se $j \leq 0$. Segue-se que se $j \leq 0$, então $\tilde{\phi}_{jk}(t) = 2^j$.

De modo similar, podemos mostrar que $\psi_{jk}(t) = 0$, para $j < 0$.

As funções periodizadas definem uma AMR ortonormal sobre $L^2([0, 1])$. Os subespaços correspondentes são dados por

$$\tilde{V}_j = \text{span} \left\{ \tilde{\phi}_{jk}, k = 0, 1, \dots, 2^j - 1 \right\} \quad (4.26)$$

e

$$\tilde{W}_j = \text{span} \left\{ \tilde{\psi}_{jk}, k = 0, 1, \dots, 2^j - 1 \right\} \quad (4.27)$$

Para todo $J_0 \geq 0$ a seguinte decomposição de $L^2([0, 1])$ vale

$$L^2([0, 1]) = \tilde{V}_{J_0} \oplus \left(\bigoplus_{j \geq J_0} \tilde{W}_j \right). \quad (4.28)$$

Também,

$$\int_0^1 f(t) \tilde{\phi}_{jk}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t) \phi_{jk}(t) dt, \quad (4.29)$$

na qual $\tilde{f}(x) = f(\{x\})$, para $\{x\} = x - [x]$.

Observe, também, que

$$L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = V_0 \oplus \bigoplus_{j \geq 0} W_j = V_{j_0} \oplus \bigoplus_{j \geq j_0} W_j,$$

para algum inteiro j_0 , de modo que, para qualquer $f \in L_2(\mathbb{R})$, podemos escrever

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{j,k} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \\ &= \sum_k c_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j \geq j_0} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t), \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$= \sum_k c_{0,k} \phi_{0,k}(t) + \sum_{j \geq 0} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

onde na terceira relação tomamos $j_0 = 0$ e

$$c_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi_{j,k}(t) dt,$$

$$d_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt.$$