

Ondaletas Bidimensionais

A aplicação mais importante de ondaletas bidimensionais reside na análise e transmissão de imagens. Uma imagem pode ser representada por uma matriz $\mathbf{A}$, para a qual as entradas a_{ij} representam intensidades de cores dos *pixels* no ponto (i, j) .

Há duas possibilidades para construir bases de ondaletas 2-d:

- (a) construir uma base 2-d, com uma única escala, a partir da AMR de duas bases unidimensionais (1-d);
- (b) construir uma base 2-d como o produto tensorial de duas bases 1-d com escalas distintas para cada dimensão.

Por simplicidade, considere $L_2(U)$, onde $U = [0, 1]$, e suponha que tenhamos uma base ortonormal de ondaletas, de suporte compacto, gerando $L_2(U)$. Como antes, sejam V_j e W_j gerados pelas ondaletas $\phi_{j,k}$ e $\psi_{j,k}$, respectivamente. Analogamente à condição MR2, da seção anterior, temos que

$$L_2(U \times U) = L_2(U^2) = \overline{\bigcup_{j=\ell}^{\infty} V_j \otimes V_j}, \quad (4.45)$$

o que mostra que podemos construir uma base de $L_2(U^2)$ pelos produtos tensoriais de bases 1-d, $\{\phi_{\ell,k}, \psi_{j,k}, j \geq \ell, k \in \mathbb{Z}\}$.

Para cada j^* , podemos escrever $V_{j^*}^{(2)} = V_{j^*} \otimes V_{j^*}$ de duas maneiras:

$$\begin{aligned} V_{j^*}^{(2)} &= (V_{\ell} \oplus W_{\ell} \oplus \cdots \oplus W_{j^*-1}) \otimes (V_{\ell} \oplus W_{\ell} \oplus \cdots \oplus W_{j^*-1}) \\ &= V_{\ell} \otimes V_{\ell} \oplus \left(\sum_{j=\ell}^{j^*-1} (W_j \otimes V_{\ell}) \right) \\ &\quad \oplus \left(\sum_{j=\ell}^{j^*-1} (V_{\ell} \otimes W_j) \right) \oplus \left(\sum_{j_1, j_2=\ell}^{j^*-1} (W_{j_1} \otimes W_{j_2}) \right), \end{aligned} \quad (4.46)$$

De (4.46) temos uma base possível para $L_2(U^2)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{\phi_{\ell,k_1}(x)\phi_{\ell,k_2}(y)\}_{k_1,k_2} \cup \\ &\cup (\cup_{j_1 \geq \ell} \{\psi_{j_1,k_1}(x)\phi_{\ell,k_2}(y)\}_{k_1,k_2}) \cup (\cup_{j_2 \geq \ell} \{\phi_{\ell,k_1}(x)\psi_{j_2,k_2}(y)\}_{k_1,k_2}) \\ &\cup (\cup_{j_1, j_2 \geq \ell} \{\psi_{j_1,k_1}(x)\psi_{j_2,k_2}(y)\}_{k_1,k_2}), \end{aligned} \quad (4.48)$$

ou, alternativamente,

$$V_{j^*}^{(2)} = V_\ell \otimes V_\ell \oplus \bigoplus_{j=\ell}^{j^*-1} [(V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes V_j) \oplus (W_j \otimes W_j)]. \quad (4.47)$$

e de (4.47) temos outra base possível,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2 = & \{\phi_{\ell,k_1}(x)\phi_{\ell,k_2}(y)\}_{k_1,k_2} \cup \\ & \bigcup_{j \geq \ell} \{\phi_{j,k_1}(x)\psi_{j,k_2}(y), \psi_{j,k_1}(x)\phi_{j,k_2}(y), \psi_{j,k_1}(x)\psi_{j,k_2}(y)\}_{k_1,k_2}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Vamos analisar, antes, a base $\mathcal{B}_2$, que pode ser representada por

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2 = & \{\Phi_{\ell,\mathbf{k}}(x, y), \mathbf{k} = (k_1, k_2)\}_{\mathbf{k}} \\ & \cup \{\Psi_{j,\mathbf{k}}^\mu(x, y), \mathbf{k} = (k_1, k_2), \mu = h, v, d\}_{j \geq \ell, \mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

ou seja, temos uma ondaleta pai e três ondaletas mães distintas, na horizontal, vertical e diagonal:

$$\begin{aligned} \Phi_{\ell,\mathbf{k}}(x, y) &= \phi_{\ell,k_1}(x)\phi_{\ell,k_2}(y), \\ \Psi_{j,\mathbf{k}}^h(x, y) &= \phi_{j,k_1}(x)\psi_{j,k_2}(y), \\ \Psi_{j,\mathbf{k}}^v(x, y) &= \psi_{j,k_1}(x)\phi_{j,k_2}(y), \\ \Psi_{j,\mathbf{k}}^d(x, y) &= \psi_{j,k_1}(x)\psi_{j,k_2}(y). \end{aligned} \quad (4.51)$$

A ondaleta pai representa a parte suave e as ondaletas mães representam os detalhes: horizontal, vertical e diagonal.

Uma função de $L^2(U^2)$ pode, então, ser escrita na forma

$$f(x, y) = \sum_{\mathbf{k}} c_{\ell,\mathbf{k}} \Phi_{\ell,\mathbf{k}}(x, y) + \sum_{j=\ell}^{\infty} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mu=h,v,d} d_{j,\mathbf{k}}^\mu \Psi_{j,\mathbf{k}}^\mu(x, y), \quad (4.52)$$

com os coeficientes de ondaletas dados por

$$c_{\ell,\mathbf{k}} = \int_{U^2} f(x, y) \Phi_{\ell,\mathbf{k}}(x, y) dx dy, \quad (4.53)$$

$$d_{j,\mathbf{k}}^\mu = \int_{U^2} f(x, y) \Psi_{j,\mathbf{k}}^\mu(x, y) dx dy. \quad (4.54)$$

Podemos considerar, neste caso bidimensional, as extensões das equações de dilatação (4.7) e (4.9), bem como o algoritmo de decomposição de Mallat. Os coeficientes suaves e de detalhes obtidos em cada nível do algoritmo serão matrizes, que podem ser representadas no formato da Figura 4.10.

D_{j+3}^h			D_{j+3}^d
D_{j+2}^h		D_{j+2}^d	D_{j+3}^v
D_{j+1}^h	D_{j+1}^d	D_{j+2}^v	
C_j	D_{j+1}^v		

Figura 4.10: Representação dos coeficientes de ondaletas bidimensionais.
Base obtida da AMR bidimensional.

O quadrado superior esquerdo representará os detalhes horizontais, o superior direito os detalhes diagonais e o inferior direito os detalhes verticais. O último quadrado no canto inferior esquerdo representa a parte suave.

Vejamos, agora, a base $\mathcal{B}_1$. Teremos que usar quatro índices, pois a escala não é a mesma, como em (4.52). Se $\mathbf{j} = (j_1, j_2)$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$, teremos

$$f(x, y) = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} \phi_{l, k_1}(x) \phi_{l, k_2}(y) + \sum_{j_1 \geq \ell} \sum_{\mathbf{k}} \alpha_{j_1, \mathbf{k}} \psi_{j_1, k_1}(x) \phi_{l, k_2}(y) + \quad (4.55)$$

$$\sum_{j_2 \geq \ell} \sum_{\mathbf{k}} \beta_{j_2, \mathbf{k}} \phi_{l, k_1}(x) \psi_{j_2, k_2}(y) + \sum_{j_1, j_2 \geq \ell} \sum_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{j}, \mathbf{k}} \psi_{j_1, k_1}(x) \psi_{j_2, k_2}(y),$$

e os coeficientes de ondaleta obtidos como no caso anterior.

Exemplo 4.9. Apresentamos, na Figura 4.12, um passo da decomposição em ondaletas, usando a base $\mathcal{B}_2$, da célebre imagem de Lenna, bastante utilizada na literatura para exemplificar a transformada bidimensional. Na decomposição da figura, a matriz $\mathbf{A}$ (imagem) é decomposta em 4 submatrizes, uma suave (correspondente ao último mosaico do canto inferior esquerdo da Figura 4.10) e três de detalhes: horizontal, diagonal e vertical.

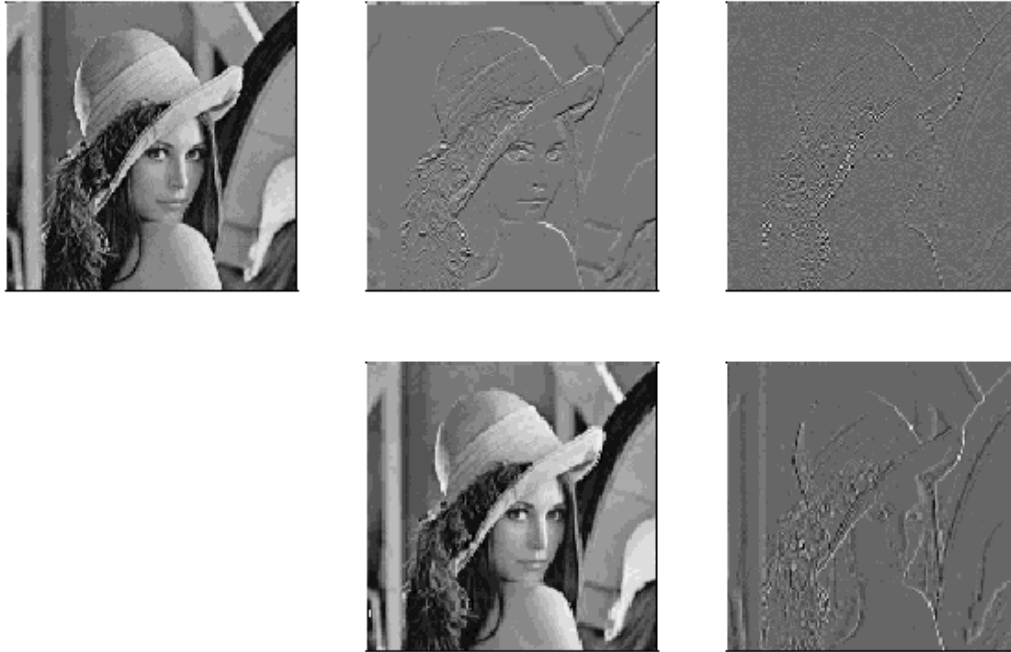


Figura 4.12: Imagem de Lenna (canto superior esquerdo) e decomposição em ondaletas em um passo: detalhes horizontal, diagonal, vertical e parte suave (canto inferior esquerdo).

Transformada de ondaletas não decimada

Segundo as equações (4.42) e (4.43), a DWT seleciona os valores filtrados pares, de modo que em cada escala o número de coeficientes é a metade do número de coeficientes da escala anterior. Veja o exemplo 4.6. Em contraste, a transformada discreta de ondaletas não decimada (NDWT), que iremos agora introduzir, é não ortogonal e redundante. Cada um dos vetores de coeficientes de ondaletas conterá n elementos, se o conjunto de dados $\mathbf{x}$ contiver n valores.

Uma outra diferença entre a DWT e a NDWT é que a DWT é dependente da escolha da origem dos dados. Por exemplo, uma translação dos dados resulta num conjunto distinto de coeficientes de ondaletas. O mesmo não acontece com a NDWT.

A ideia básica da NDWT é conservar ambas as decimações, pares e ímpares, em cada nível e manter esse procedimento ao longo do algoritmo piramidal. No que segue nos baseamos em Nason e Silverman (1995), que chamaram a NDWT de *transformada estacionária*, e Nason (2008). A NDWT foi considerada, com diferentes nomes, por outros autores. Percival e Guttorp (1994) e Percival (1995) usam a denominação *maximal-overlap wavelet transform*, MODWT. Veja Percival e Walden (2000) para outras referências.

Tabela 4.2: Alguns filtros de ondaletas para as famílias Daubelets, Coiflets e Symmlets.

Nome	ℓ_0	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4	ℓ_5
Haar	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$				
Daub 4	0.4829629	0.8365163	0.2241439	-0.1294095		
Daub 6	0.3326706	0.8068915	0.4598775	-0.1350110	-0.0854413	0.0352263
Coif 6	0.0385808	-0.1269691	-0.0771616	0.6074916	0.7456876	0.2265843
Daub 8	0.2303778	0.7148466	0.6308808	-0.0279838	-0.1870348	0.0308414
Symm 8	-0.0757657	-0.0296355	0.4976187	0.8037388	0.2978578	-0.0992195
Daub 10	0.1601024	0.6038293	0.7243085	0.1384281	-0.2422949	-0.0322449
Symm 10	0.0273331	0.0295195	-0.0391342	0.1993975	0.7234077	0.6339789
Daub 12	0.1115407	0.4946239	0.7511339	0.3152504	-0.2262647	-0.1297669
Symm 12	0.0154041	0.0034907	-0.1179901	-0.0483117	0.4910559	0.7876411
Nome	ℓ_6	ℓ_7	ℓ_8	ℓ_9	ℓ_{10}	ℓ_{11}
Daub 8	0.0328830	-0.0105974				
Symm 8	-0.0126034	0.0322231				
Daub 10	0.0775715	-0.0062415	-0.0125808	0.0033357		
Symm 10	0.0166021	-0.1753281	-0.0211018	0.0195389		
Daub 12	0.0975016	0.0275229	-0.0315820	0.0005538	0.0047773	-0.0010773
Symm 12	0.3379294	-0.0726375	-0.0210603	0.0447249	0.0017677	-0.0078007

4.9 Software

Nesta seção, descrevemos brevemente os pacotes computacionais disponíveis e que, basicamente, calculam a transformada discreta de ondaletas, sua inversa e outras estatísticas de interesse.

4.9.1 Wavethresh

Esse *software* foi desenvolvido por Nason (1993) e pode ser obtido livremente da biblioteca R. Um roteiro para o uso do programa está em Nason e Silverman (1994). Veja também Nason e Silverman (1995).

4.9.2 S+wavelets

Esse *software* foi desenvolvido por Bruce e Gao (1994) para trabalhar com o SPLUS. Existem versões para LINUX e WINDOWS e comercializadas por Tibco Software Inc. Um roteiro detalhado do programa com exemplos e aplicações está em Bruce e Gao (1996).

4.9.3 WaveLab

Essa é uma biblioteca de rotinas MATLAB para a análise de ondaletas, pacotes de ondaletas etc. O programa pode ser obtido livremente no site www.stat.stanford.edu/wavelab. O pacote foi desenvolvido por Buckheit *et al.* (1995).

4.9.4 Wavelet Toolbox

Este é um dos *toolboxes* do programa MATLAB para a análise e síntese de sinais e imagens usando wavelets. O pacote é comercializado por TheMathWorks, Inc.

4.9.5 Waveslim

Esse programa foi escrito por Brandom Whitcher, baseado nos livros de Percival e Walden (2000) e Gençay et al. (2001) e cobre uma variedade grande de técnicas com ondaletas.

4.10 Comentários

As ondaletas $\phi_{j,k}$ e $\psi_{j,k}$, dadas em (4.8) e (4.3), respectivamente, podem ser definidas de modo ligeiramente diferente, como em Daubechies (1992), por exemplo. Especificamente, teremos

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k) \quad (4.59)$$

e

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - k). \quad (4.60)$$

Modificações óbvias devem ser feitas em vários lugares, como por exemplo em (4.18) e em outras fórmulas dos demais capítulos. Por exemplo, o algoritmo piramidal calcula os coeficientes do nível j a partir daqueles do nível $j - 1$ e o gráfico da Figura 4.9 ficará modificado. Veja Bruce e Gao (1996).

Note que, com as representações (4.59) e (4.60), o fator de escala passa a ser 2^j , e o de translação, $k2^j$. Nessa notação, os níveis de resolução mais baixos correspondem aos níveis de resolução mais altos na notação anterior e vice-versa.