

# Processos Não Estacionários

processos não estacionários, várias tentativas foram feitas para tratar formas especiais de não estacionariedade no domínio da frequência, *espectro dependente do tempo*.

Processo estacionário:  $f(\lambda)$

Processo não estacionário: um espectro  $f(t, \lambda)$ .

## Processos localmente estacionários:

### Função de covariância:

$$\gamma(t_1, t_2) = \text{Cov}\{X(t_1), X(t_2)\}$$

$$\gamma(t_1, t_2) = m\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)\gamma_1(t_1 - t_2), \quad (6.1)$$

na qual  $m(t) \geq 0$  e  $\gamma_1(t)$  é uma função não negativa definida (função de covariância estacionária). Para  $m(t)$  constante, temos um processo estacionário. Escrevendo-se (6.1) na forma

$$\gamma\left(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}\right) = m(t)\gamma_1(\tau), \quad (6.2)$$

o caráter de estacionariedade local fica evidente.

Outro exemplo é o processo uniformemente modulado (Priestley, 1981)

$$X(t) = c(t)Y(t),$$

no qual  $Y(t)$  é estacionário e  $c(t)$  é uma função moduladora. Segue-se que

$$\gamma_X(t_1, t_2) = c(t_1)c(t_2)\gamma_Y(t_1 - t_2).$$

Dado um processo  $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ , estacionário, de média zero, um resultado fundamental é a representação espectral dada em (3.37), isto é,

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dZ(\lambda), \quad (6.3)$$

tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda_1 - \lambda_2)t} dt = \delta(\lambda_1 - \lambda_2) \quad (6.4)$$

e  $\{Z(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$  é um processo com incrementos ortogonais, no sentido que

$$E\{dZ(\lambda_1)\overline{dZ(\lambda_2)}\} = \delta(\lambda_1 - \lambda_2)dF(\lambda_1)d\lambda_2. \quad (6.5)$$

Por outro lado, a função de autocovariância de  $X(t)$  pode ser escrita como em (3.31),

$$\gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} dF(\lambda), \quad (6.6)$$

sendo  $F$  a função de distribuição espectral do processo. Se essa for absolutamente contínua (com relação à medida de Lebesgue), então  $dF(\lambda) = f(\lambda)d\lambda$  e  $f$  é a função de densidade espectral.

Para processos não estacionários, as relações (6.3)-(6.6) não são válidas. Teremos que relaxar (6.4) ou (6.5).

## Espectros Dependentes do Tempo

Como requisito básico, gostaríamos que o conceito de frequência fosse preservado, quando definíssemos espectro dependente do tempo,  $f(t, \lambda)$ , digamos. Algumas condições podem ser impostas a  $f(t, \lambda)$ , como por exemplo:

- i)  $f(t, \lambda)$  é real, não negativo;
- ii)  $f(t, \lambda)$  reduz-se a  $f(\lambda)$  no caso estacionário;
- iii)  $f(t, \lambda)$  é compatível com translações no tempo e frequência, ou seja, se  $Y(t) = X(t - s)e^{i\lambda_0 t}$  então  $f_Y(t, \lambda) = f_X(t - s, \lambda - \lambda_0)$ ;
- iv)  $f(t, \lambda)$  pode ser estimado eficientemente a partir de uma única realização do processo.

Há basicamente duas propostas (Loynes, 1968). Uma, construir  $f(t, \lambda)$  a partir da função de covariância,  $\gamma(t_1 - t_2)$ . Mas pode-se mostrar, no entanto, que não é possível obter um espectro evolutivo de maneira unívoca e que satisfaça as propriedades (i)-(iv). Outra proposta é construir um espectro dependente do tempo diretamente a partir do processo.

Há duas abordagens possíveis neste caso (Flandrin, 1989):

- 1) Preservar (6.4)-(6.5), mas abandonar senos e cossenos e perder o conceito de frequência.
- 2) Preservar o conceito clássico (estacionário) de frequência e aceitar alguma correlação em (6.5).

### 6.2.1 Soluções que Preservam a Ortogonalidade

Nesta abordagem, podemos considerar decomposições de Karhunen, espectros evolucionários de Priestley, espectros evolutivos de Tjøstheim e Mélard, espectros evolucionários racionais de Grenier, dentre outras sugestões.

Se no lugar das exponenciais complexas considerarmos outra base de funções  $\varphi(t, \lambda)$ , com

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, \lambda) dZ(\lambda), \quad (6.7)$$

de modo que  $X(t)$  seja um processo estocástico de segunda ordem e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, \lambda_1) \overline{\varphi(t, \lambda_2)} dt = \delta(\lambda_1 - \lambda_2),$$

obtemos a chamada *decomposição de Karhunen*. Nessa representação, temos ortogonalidade, mas  $\lambda$  não tem interpretação como frequência.

Segue-se que a função de covariância é dada por

$$\gamma(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_1, \lambda) \overline{\varphi(t_2, \lambda)} dF(\lambda), \quad (6.8)$$

na qual  $dF(\lambda) = E\{|dZ(\lambda)|^2\}$  e

$$\text{Var}\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t, \lambda)|^2 dF(\lambda). \quad (6.9)$$

Dessa relação, parece natural definir o espectro dependente do tempo como

$$dI_t(\lambda) = |\varphi(t, \lambda)|^2 dF(\lambda), \quad (6.10)$$

que no caso de termos continuidade absoluta em relação à medida de Lebesgue, com  $dI_t(\lambda) = k(t, \lambda) d\omega$ ,  $dF(\lambda) = f(\lambda) d\omega$ , resulta

$$k(t, \lambda) = |\varphi(t, \lambda)|^2 f(\lambda). \quad (6.11)$$

Esse espectro é não negativo e reduz-se ao espectro usual no caso estacionário.

Priestley (1965, 1981) considerou uma representação de  $X(t)$  que é caso particular de (6.7), a saber

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t, \lambda) e^{i\lambda t} dZ(\lambda), \quad (6.12)$$

na qual  $Z(\lambda)$  é um processo ortogonal tal que  $E\{|dZ(\lambda)|^2\} = d\mu(\lambda)$ , para alguma medida  $\mu$ . Ou seja,  $\varphi(t, \lambda) = A(t, \lambda)e^{i\lambda t}$ . Processos que admitem a representação (6.12) são chamados *oscilatórios*. A função  $A(t, \lambda)$  é suposta variar lentamente na vizinhança de  $t$  e admitir a representação

$$A(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\theta} dK_{\lambda}(\theta), \quad (6.13)$$

sendo que  $|K_{\lambda}(\theta)|$  tem um máximo absoluto em  $\theta = 0$ .

A função de covariância pode ser escrita na forma

$$\gamma(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{A(s, \lambda)} A(t, \lambda) e^{i\lambda(t-s)} d\mu(\lambda), \quad (6.14)$$

da qual se obtém

$$\text{Var}\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |A(t, \lambda)|^2 d\mu(\lambda). \quad (6.15)$$

Analogamente ao que acontece no caso estacionário, como a variância é uma medida da potência total da série no instante  $t$ , definimos o *espectro evolucionário no tempo  $t$  e frequência  $\lambda$*  como

$$dH(t, \lambda) = |A(t, \lambda)|^2 d\mu(\lambda). \quad (6.16)$$

No caso de continuidade absoluta em relação à medida de Lebesgue, isto é,  $dH(t, \lambda) = f(t, \lambda)d\lambda$  e  $d\mu(\lambda) = f(\lambda)d\lambda$ , obtemos

$$f(t, \lambda) = |A(t, \lambda)|^2 f(\lambda). \quad (6.17)$$

Observamos que a definição (6.16) depende da escolha da família de funções oscilatórias  $\mathcal{F} = \{A(t, \lambda)e^{i\lambda t}\}$ . Para processos estacionários,  $A(t, \lambda) = 1$ . Uma dificuldade encontrada é saber se dado processo pertence ou não à classe  $\mathcal{F}$ .

Para o processo uniformemente modulado definido acima, temos

$$dH(t, \lambda) = c^2(t)dF_Y(\lambda).$$

Se

$$A(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, s)e^{-i\lambda s} ds,$$

e

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dZ_Y(\lambda),$$

então

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, s)Y(t-s)ds,$$

e podemos pensar um processo oscilatório como a saída de um filtro linear, variando no tempo, sendo a entrada um processo estacionário.

O espectro evolutivo de Tjøstheim e Mélard surge quando consideramos a representação de Wold de um processo não estacionário. Analogamente ao caso estacionário, podemos considerar

$$X(t) = \sum_{s=-\infty}^t h(t, s)\varepsilon(s), \quad (6.18)$$

onde  $\varepsilon(t) \sim RB(0, 1)$ . Em (6.18) temos um filtro linear, mas variando no tempo, sendo a entrada um ruído branco. O processo não estacionário  $X(t)$  é a saída de tal sistema. Como  $\varepsilon(t)$  é estacionário, podemos escrever

$$\varepsilon(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dE(\lambda),$$

sendo  $E(\lambda)$  um processo com incrementos ortogonais. Substituindo em (6.18) obtemos

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t, \lambda)dE(\lambda), \quad (6.19)$$

com  $\varphi(t, \lambda) = \sum_{s=-\infty}^t h(t, s)e^{i\lambda s}$ . Logo, (6.19) é também um caso particular de (6.7) e podemos definir o espectro evolutivo de Tjøstheim e Mélard por

$$T(t, \lambda) = \left| \sum_{s=-\infty}^t h(t, s)e^{i\lambda s} \right|^2, \quad (6.20)$$

que é real, não negativo e reduz-se ao espectro usual no caso estacionário. Veja Tjøstheim (1976) e Mélard (1978) para detalhes. Uma desvantagem aqui é que não há uma relação biunívoca entre o espectro e a função de autocovariância.

## 6.2.2 Soluções que Preservam a Frequência

Aqui, (6.5) é substituída por

$$E\{dZ(\lambda_1)\overline{dZ(\lambda_2)}\} = \Phi(\lambda_1, \lambda_2)d\lambda_1d\lambda_2, \quad (6.21)$$

ou seja, temos uma função de distribuição bidimensional, que não é concentrada na diagonal  $\lambda_1 = \lambda_2$ , como no caso estacionário.

Um processo não estacionário diz-se *harmonizável* se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\lambda_1, \lambda_2)|d\lambda_1d\lambda_2 < \infty. \quad (6.22)$$

Neste caso,

$$\gamma(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda_1 s - \lambda_2 t)} \Phi(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2, \quad (6.23)$$

que é a análoga de (6.6). A relação (6.22) é chamada condição de Loève. Vemos, também, que (6.23) é análoga a (3.31) e, portanto,  $\gamma(s, t)$  e  $\Phi(\lambda_1, \lambda_2)$  constituem um par bidimensional de Fourier. O natural seria considerar uma descrição na qual a f.a.c.v. e o espectro dependente do tempo,  $f(t, \lambda)$ , fossem um par de Fourier.

Tal descrição conduz ao espectro generalizado de Wigner-Ville, que tem como caso particular o *espectro de Wigner-Ville*, definido como

$$\begin{aligned} W(t, \lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t - \tau/2, t + \tau/2) e^{-i\lambda\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda - \theta/2, \lambda + \theta/2) e^{-i\theta t} d\theta. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Para sinais determinísticos, Wigner (1932) introduziu em mecânica quântica a função

$$W(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau/2) \overline{x(t - \tau/2)} e^{-i\lambda\tau} d\tau, \quad (6.25)$$

chamada *distribuição de Wigner-Ville*, pois Ville (1948) a usou em teoria dos sinais. Note que (6.24) reduz-se à definição clássica de espectro no caso estacionário, mas ela carece de uma interpretação física adequada e, ainda, pode tomar valores negativos.

No caso de um processo não estacionário discreto  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ , o espectro de Wigner-Ville é definido por

$$W(t, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau} \gamma(t - \tau/2, t + \tau/2) e^{-i\lambda\tau}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad |\lambda| < \pi. \quad (6.26)$$

Exemplo 6.1. Vamos considerar o processo uniformemente modulado

$$Y(t) = c(t)X(t),$$

no qual  $c(t) = \exp\{-(t - 500)^2 / (2(200)^2)\}$  e  $X(t)$  é um processo estacionário, dado por  $X(t) = 0,8X(t-1) - 0,4X(t-2) + \varepsilon(t)$ , com  $\varepsilon(t) \sim \text{RB}(0, 1)$ ,  $t = 1, 2, \dots, 1000$ .

Na Figura 6.1 apresentamos, no painel superior, o espectro e log-espectro de tal processo e três estimadores, que serão discutidos no Capítulo 8.

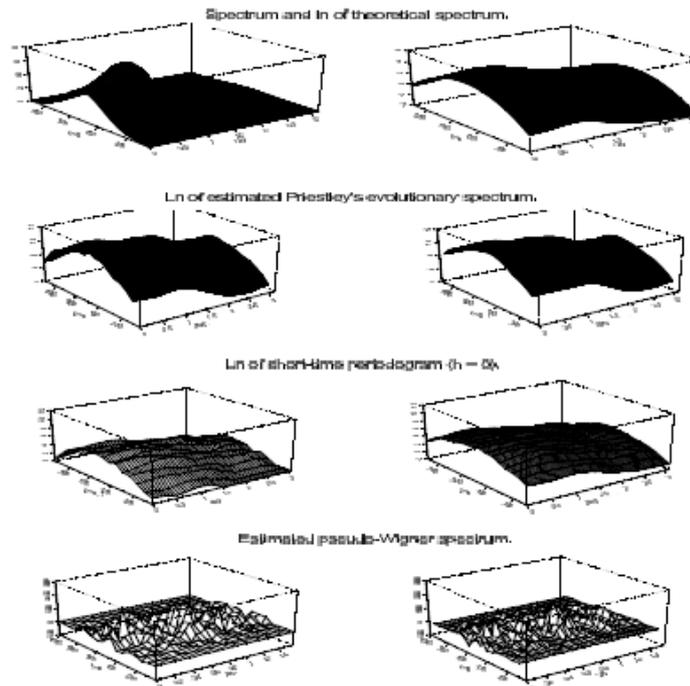


Figura 6.1. Espectro de um processo uniformemente modulado.

### 6.3 Processos Localmente Estacionários

Os enfoques tratados na seção anterior apresentam uma dificuldade intrínseca ao estudo de processos não estacionários: não se pode estabelecer uma teoria assintótica adequada que permita obter vieses, variâncias e distribuições assintóticas, na eventualidade quase sempre presente de não se poder obter essas propriedades para amostras finitas.

No caso de processos estacionários, o aumento do tamanho da amostra,  $T$ , conduz a mais informações do mesmo tipo sobre o processo, dado que a estrutura probabilística não se altera por translações do tempo. Mas, se o processo for não estacionário, observado para  $t = 1, \dots, T$ , para  $T \rightarrow \infty$ , não iremos obter informação sobre o processo no intervalo inicial.

Considere o seguinte exemplo, devido a Dahlhaus (1996). Seja

$$X_t = g(t)X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

onde  $\varepsilon_t \sim i.i.d N(0, \sigma^2)$  e  $g(t) = a + bt + ct^2$ . Então, podemos ter, por exemplo,  $|g(t)| < 1$  em  $[1, T]$ , mas  $g(t) \rightarrow \infty$ , quando  $T \rightarrow \infty$ .

Essa dificuldade levou Dahlhaus (1997) a introduzir a classe dos processos localmente estacionários. A ideia é considerar uma teoria assintótica, tal que  $T \rightarrow \infty$  não significa “olhar o futuro”, mas “observamos”  $g(t)$  numa grade mais fina, mas no mesmo intervalo, ou seja, consideramos

**Definição 6.1.** *Uma seqüência de processos estocásticos  $\{X_{t,T}, t = 1, \dots, T\}$  é chamada localmente estacionária, com função de transferência  $A^o$  e tendência  $\mu$ , se existe uma representação da forma*

$$X_{t,T} = \mu\left(\frac{t}{T}\right) + \int_{-\pi}^{\pi} A_{t,T}^o(\lambda) e^{i\lambda t} d\xi(\lambda), \quad (6.27)$$

tal que:

- (i)  $\xi(\lambda)$  é um processo estocástico sobre  $[-\pi, \pi]$ , com  $\overline{\xi(\lambda)} = \xi(-\lambda)$ ,  $E\{\xi(\lambda)\} = 0$ , e com incrementos ortogonais, isto é,  $Cov\{d\xi(\lambda), d\xi(\lambda')\} = \delta(\lambda - \lambda')d\lambda$ ;
- (ii) existe uma constante  $K > 0$  e uma função suave  $A(u, \lambda)$  sobre  $[0, 1] \times [-\pi, \pi]$  que tem período  $2\pi$  em  $\lambda$ , com  $A(u, -\lambda) = \overline{A(u, \lambda)}$ , tal que, para todo  $T$ ,

$$\sup_{t, \lambda} |A_{t,T}^o(\lambda) - A\left(\frac{t}{T}, \lambda\right)| \leq KT^{-1}. \quad (6.28)$$

As funções  $A(u, \lambda)$  e  $\mu(u)$  são supostas contínuas em  $u$ . A regularidade da função  $A(u, \lambda)$  em  $u$  controla a variação local de  $A_{t,T}^o(\lambda)$  como função de  $t$ , dando o caráter localmente estacionário para o processo  $X_{t,T}$ .

A definição acima pode ser simplificada, sem perda de muita generalidade, substituindo  $A_{t,T}^o(\lambda)$  por  $A(u, \lambda)$  em (6.27).

**Definição 6.2.** O espectro evolucionário do processo localmente estacionário  $X_{t,T}$  é definido por

$$f(u, \lambda) = |A(u, \lambda)|^2. \quad (6.29)$$

Pode-se demonstrar (Neumann e Von Sachs, 1997) que  $f(u, \lambda)$  é o limite em média quadrática de

$$f_T(u, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_s \text{Cov}\{X_{[uT-s/2],T}, X_{[ut+s/2],T}\} e^{-i\lambda s},$$

que é similar ao espectro de Wigner-Ville, definido em (6.26).

**Exemplo 6.2.** (i) Seja  $Y_t$  um processo estacionário, com densidade espectral  $f_Y(\lambda)$  e  $\mu, \sigma$  funções reais, definidas em  $[0, 1]$ .

Considere o processo modulado

$$X_{t,T} = \mu(t/T) + \sigma(t/T)Y_t. \quad (6.30)$$

Então,  $X_{t,T}$  é um *PLE* com  $A_{t,T}^o(\lambda) = A(t/T, \lambda)$  e  $f(u, \lambda) = \sigma^2(u)f_Y(\lambda)$ .

(ii) Considere  $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$  e

$$X_{t,T} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t/T)\varepsilon_{t-j}, \quad a_0(u) = 1. \quad (6.31)$$

Segue-se que esse é um *PLE* com

$$A_{t,T}^o(\lambda) = A(t/T, \lambda) = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t/T)e^{-i\lambda j} \right\} \frac{\sigma(t/T)}{\sqrt{2\pi}}$$

e  $f(u, \lambda) = |A(u, \lambda)|^2$ .

Um caso particular desse modelo linear geral com coeficientes variando no tempo é um modelo de médias móveis, supondo-se que  $a_j(u) = 0, j > q$ .

(iii) O processo autorregressivo

$$\sum_{j=0}^p b_j(t/T)X_{t-j,T} = \sigma(t/T)\varepsilon_t, \quad b_0(u) = 1, \quad (6.32)$$

sendo  $\varepsilon_t \sim RB(0, 1)$ , é também um *PLE* com função de transferência

$$A(u, \lambda) = \frac{\sigma(u)}{\sqrt{2\pi}} \left( 1 + \sum_{j=1}^p b_j(u)e^{-i\lambda j} \right)^{-1}.$$

Veja Dahlhaus et al. (1999) para detalhes sobre esse processo.

(iv) O processo autorregressivo e de médias móveis

$$\sum_{j=0}^p b_j(t/T)X_{t-j,T} = \sum_{j=0}^q a_j(t/T)\varepsilon_{t-j}, \quad (6.33)$$

com  $a_0(u) = b_0(u) = 1$  e  $\varepsilon_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2(u))$ , é um *PLE* com espectro dado por

$$f(u, \lambda) = \frac{\sigma^2(u)}{2\pi} \frac{\left| \sum_{j=0}^q a_j(u)e^{i\lambda j} \right|^2}{\left| \sum_{j=0}^p b_j(u)e^{i\lambda j} \right|^2}. \quad (6.34)$$

Por analogia com (6.6), a *covariância local de lag k e tempo u* é definida por

$$c(u, k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u, \lambda)e^{i\lambda k} d\lambda. \quad (6.35)$$

Não é difícil mostrar que

$$\text{Cov}\{X_{[uT],T}, X_{[uT]+k,T}\} = c(u, k) + O(T^{-1}), \quad (6.36)$$

uniformemente em  $u$  e  $k$ .

Os dois exemplos a seguir foram considerados por Dahlhaus et al. (1999).

**Exemplo 6.3.** Vamos considerar o modelo AR(2) dado por

$$X_{t,T} + a_1(t/T)X_{t-1,T} + a_2(t/T)X_{t-2,T} = \varepsilon_t,$$

onde  $\varepsilon_t$  são v.a.'s i.i.d. normais, com média zero e variância um, para  $t = 1, 2, \dots, T$ , e coeficientes dados por

$$a_1(u) = \begin{cases} -1,69, & 0 < u \leq 0.6 \\ -1,38, & 0.6 < u \leq 1 \end{cases}$$

e

$$a_2(u) = 0.81 \quad 0 < u \leq 1.$$

Na Figura 6.2 temos o processo localmente estacionário simulado, com  $T = 2048$  observações.

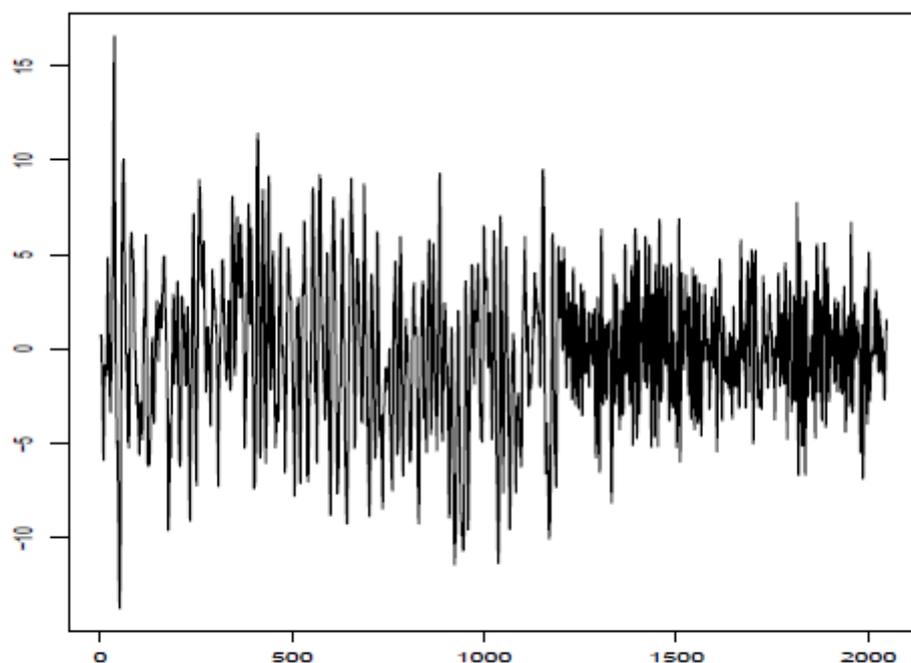


Figura 6.2: Processo LE do exemplo 6.3.

O espectro do processo  $\{X_{t,T}\}$  é dado por

$$\begin{aligned}
 f(u, \lambda) &= \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{4,52 - 6,12 \cos(\lambda) + 1,62 \cos(2\lambda)}, \quad 0 \leq u < 0,6, \quad -\pi < \lambda < \pi, \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{3,56 - 5,0 \cos(\lambda) + 1,62 \cos(2\lambda)}, \quad 0,6 \leq u < 1, \quad -\pi < \lambda < \pi.
 \end{aligned}$$

Esse espectro está mostrado na Figura 6.3 de duas maneiras: um gráfico tridimensional e um gráfico tempo-frequência. Vemos que o espectro tem um pico, para  $t \leq 0,6T$  e outro, para  $t > 0,6T$ . Veja Dahlhaus et al. (1999) e Dahlhaus (2012).

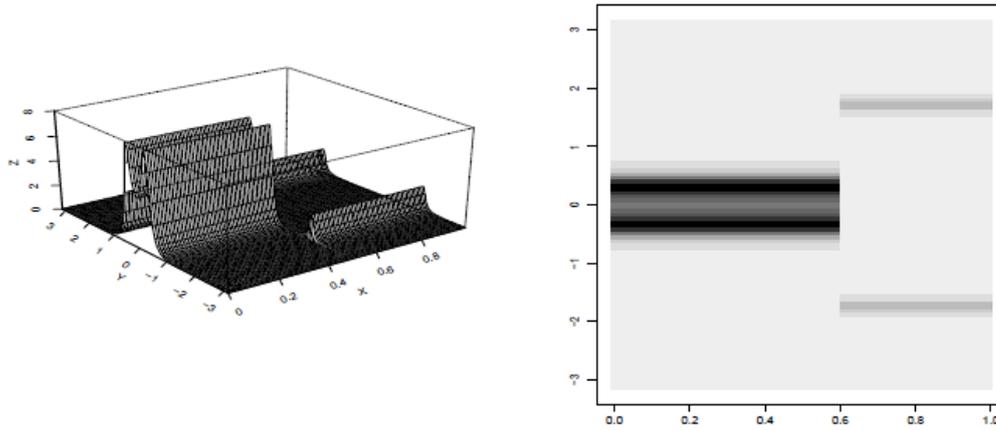


Figura 6.3: Espectro do exemplo 6.3: gráfico tridimensional e imagem tempo-frequência.

**Exemplo 6.4.** Consideremos o mesmo processo AR(2), com coeficientes variando no tempo, do exemplo 6.3, mas agora com  $a_1(u)$  substituído por

$$a_1(u) = \begin{cases} -1,8 \cos(1,5 - \cos(4\pi u + \pi)), & \text{se } u < 0,25 \text{ ou } u > 0,75 \\ -1,8 \cos(3,0 - \cos(4\pi u + \pi/2)), & \text{se } 0,25 < u < 0,75. \end{cases}$$

Na Figura 6.4 temos o gráfico dessa função. O gráfico da série gerada, com erros normais de média zero e variância 1, e com 1024 observações, está na figura 6.5. O espectro de  $X_{t,T}$  está na Figura 6.6, na forma tridimensional e na forma tempo-frequência.

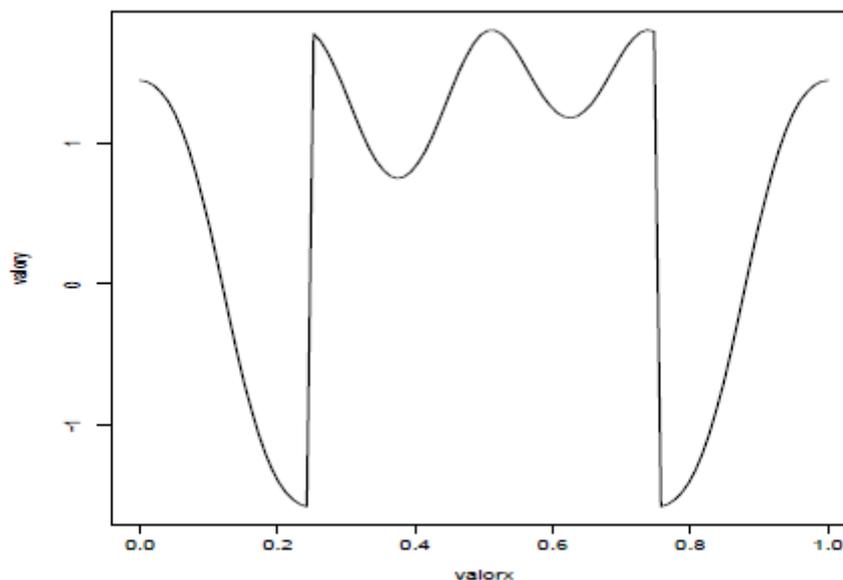


Figura 6.4: Coeficiente  $a_1(u)$  para o exemplo 6.4.

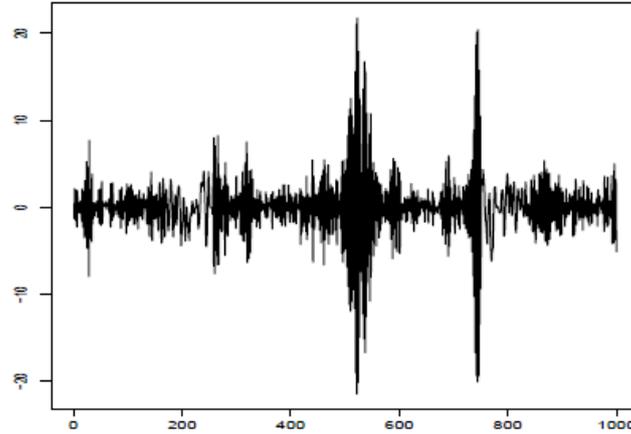


Figura 6.5: Gráfico da série localmente estacionária do exemplo 6.4.

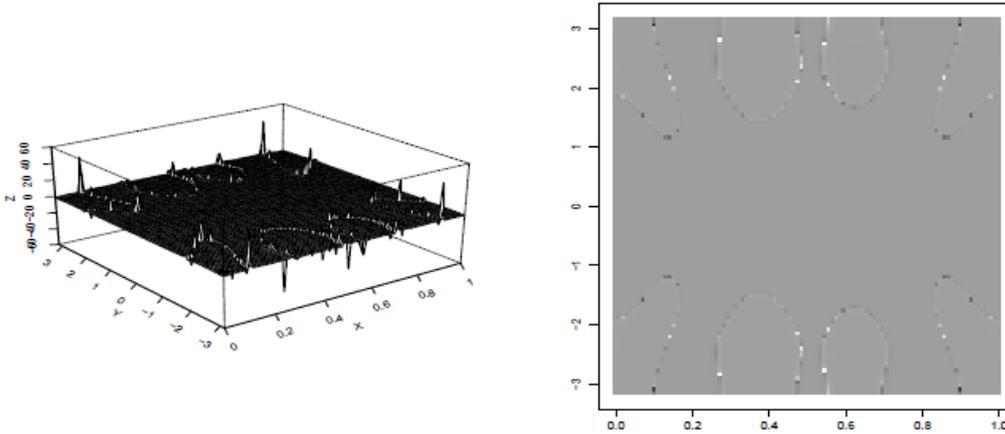


Figura 6.6: Espectro do exemplo 6.4: gráfico tridimensional e imagem tempo-frequência.

## 6.4 Processos de Ondas

Nason *et al.* (2000) introduziram uma classe de processos, denominados processos de ondas localmente estacionários, que estende a teoria de Chiann e Morettin (1998). A ideia é obter uma representação de séries temporais que tenham a estrutura de segunda ordem variando no tempo. Vimos, nas seções anteriores, que uma possibilidade é considerar os processos oscilatórios de Priestley, ou os processos localmente estacionários de Dahlhaus, por meio de uma função  $A_t(\lambda)$ , que varia no tempo. O enfoque aqui consiste em substituir senos e cossenos por um conjunto de ondas discretas não decimadas.

Sejam  $\{\ell_k\}$  e  $\{h_k\}$  os filtros passa-baixo e passa-alto usados na construção das ondaletas de Daubechies. Inicialmente são construídas ondaletas discretas com suporte compacto  $\psi_j = (\psi_{j,0}, \dots, \psi_{j,N_j-1})$ , de comprimento  $N_j$ , para a escala  $j < 0$ , usando:

$$\psi_{-1,n} = \sum_k h_{n-2k} \delta_{0,k} = h_n, \quad n = 0, 1, \dots, N_{-1} - 1,$$

$$\psi_{j-1,n} = \sum_k \ell_{n-2k} \psi_{j,k}, \quad n = 0, 1, \dots, N_{j-1} - 1,$$

onde  $\delta_{0,k}$  é o delta de Kronecker e  $N_j = (2^{-j} - 1)(N_h - 1) + 1$ , sendo  $N_h$  o número de elementos não nulos de  $\{\ell_k\}$ .

Por exemplo, no caso de ondaletas de Haar e  $j = -1, -2$ , temos

$$\psi_{-1} = (h_0, h_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1),$$

$$\psi_{-2} = (\ell_0 h_0, \ell_1 h_0, \ell_0 h_1, \ell_1 h_1) = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1).$$

Exceto para o caso de Haar, as ondaletas discretas  $\psi_j$  não são versões amostradas das ondaletas contínuas associadas  $\psi(x)$ . O fato importante é que as ondaletas discretas não decimadas podem ser transladadas para qualquer posição definida pelas ondaletas de resolução mais fina no algoritmo de Mallat, e não somente por translações de  $2^{-j}$ , como na DWT.

Definamos  $\psi_{j,k}$  como o  $k$ -ésimo elemento do vetor  $\psi_j$  e  $\psi_{j,k}(\tau)$  como o  $k$ -ésimo elemento do vetor  $\psi_{j(k-\tau)}$ , ou seja,  $\psi_{j,k}(\tau) = \psi_{j,k-\tau}$ , para cada escala  $\tau$ .

**Definição 6.3.** A sequência duplamente indexada  $\{X_{t,T}, t = 0, \dots, T-1, T \geq 1\}$  diz-se um processo de ondaletas localmente estacionário, com respeito à base de ondaletas  $\{\psi_{j,k}(t), j, k \in \mathbb{Z}\}$ , se

$$X_{t,T} = \sum_{j=-J}^{-1} \sum_k w_{j,k;T} \psi_{j,k}(t) \xi_{j,k}, \quad (6.37)$$

na qual  $T = 2^J \geq 1$ ,  $j = -1, -2, \dots, -J = -\log_2(T)$  e  $w_{j,k;T}$  são as amplitudes, com as propriedades:

- (1)  $\{\xi_{j,k}\}$  é uma sequência aleatória ortonormal, com  $E\{\xi_{j,k}\} = 0$ , para quaisquer  $j, k$ . Logo,  $E\{X_{t,T}\} = 0$ , para quaisquer  $t, T$ .
- (2)  $Cov(\xi_{j,k}, \xi_{\ell,m}) = \delta_{j,\ell} \delta_{k,m}$ .
- (3) Para cada  $j \leq -1$  existe uma função  $W_j(u)$  sobre  $(0, 1)$ , Lipschitz-contínua, satisfazendo:

(i)  $\sum_{j=-\infty}^{-1} |W_j(u)|^2 < \infty$ , uniformemente em  $u \in (0, 1)$ ;

(ii) as constantes Lipschitz  $L_j$  são uniformemente limitadas em  $j$  e

$$\sum_{j=-\infty}^{-1} 2^{-j} L_j < \infty;$$

(iii) existe uma sequência de constantes  $C_j$  tais que, para cada  $T$ ,

$$\sup_k |w_{j,k;T} - W_j(\frac{k}{T})| \leq C_j/T,$$

onde, para cada  $j$ , o sup é sobre  $k = 0, \dots, T-1$  e  $\sum_{j=-\infty}^{-1} C_j < \infty$ .

(4) A base  $\{\psi_{j,k}\}$  é ortonormal e as ondaletas têm suporte compacto.

Observe que a notação para as ondaletas é diferente:  $-1$  corresponde à escala de resolução mais fina e  $-J$  à mais grossa.

A equação (6.37) nos diz que  $X_{t,T}$  é uma combinação linear de ondas oscilatórias, e portanto, a autocovariância do processo também terá essa propriedade, mas não como no caso estacionário.

**Exemplo 6.5.** Processos de médias móveis de Haar. Considere o processo

$$X_t^{(1)} = 2^{-1/2}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}), \quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d}(0, 1).$$

Este é um processo de ondaletas localmente estacionário, com  $w_{j,k;T} = 1$ , para  $j = -1$  e todo  $k \in \mathbb{Z}$ , e igual a zero para os outros  $j$ , o mesmo valendo para  $W_j(u)$ . Também,  $\xi_{-1,k} = \varepsilon_k$  e  $\psi_{j,k}(t)$  são as ondaletas discretas não decimadas de Haar, apresentadas acima. Os coeficientes do processo MA são aqueles da escala  $-1$  para a ondaleta de Haar não decimada.

Da mesma forma, podemos definir o processo de Haar MA(3), por meio de

$$X_t^{(2)} = 2^{-1}(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2} - \varepsilon_{t-3}),$$

que usa a ondaleta de Haar não decimada na escala  $j = -2$ , com  $w_{j,k;T} = 1$ , para  $j = -2$  e qualquer  $k \in \mathbb{Z}$  e igual a zero para as demais escalas. Aqui,  $\xi_{-2,k} = \varepsilon_k$ .

De modo geral, podemos construir processos MA de Haar  $X_t^{(r)}$  para uma escala genérica  $j = -r$ , que serão MA( $2^r - 1$ ). Na Figura 6.7 apresentamos a junção de dois processos de médias móveis de Haar: o processo  $X_t^{(1)}$ , com 256 observações, e o processo  $X_t^{(2)}$ , para as seguintes 256 observações. Tomamos  $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ .

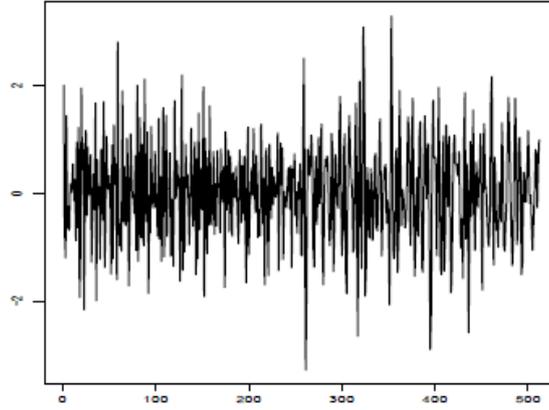


Figura 6.7: Concatenação de dois processos de médias móveis de Haar.

**Definição 6.4.** *Considere*

$$S_j(z) = |W_j(z)|^2, \quad z \in (0, 1). \quad (6.38)$$

A sequência  $\{S_j(z), j = -1, \dots, -J(T)\}$  é chamada o espectro evolucionário de ondaletas da sequência  $\{X_{t,T}\}$ ,  $T \geq 1$ , com respeito à base  $\{\psi_{j,k}\}$ .

Segue-se da suposição (3) da Definição 6.1 que

$$S_j(z) = \lim_{T \rightarrow \infty} |w_{j,2^j[zT];T}|^2, \quad (6.39)$$

com  $\sum_{j=-\infty}^{-1} S_j(z) < \infty$ , para todo  $z \in (0, 1)$ .

**Exemplo 6.5.** (continuação). Designando o espectro evolucionário de ondaletas para o processo de médias móveis de Haar  $X_t^{(r)}$  por  $S_j^{(r)}(u)$ , teremos que  $S_j^{(r)}(u) = \delta_{-j,r}$ , para todo  $u \in (0, 1)$ , pois  $|W_j(u)|^2 = 1$ , para  $j = -r$  e zero, caso contrário.

Na Figura 6.8(painel superior) temos o espectro de um processo evolucionrio de ondaletas, que é a concatenação de quatro processos de médias móveis de Haar,  $X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, X_t^{(3)}$  e  $X_t^{(4)}$ , cada um com 128 observações. Vemos que temos o valor  $S_{-1}(u) = 1$ , para  $u \in (0, 128/512)$ , para o espectro  $X_t^{(1)}$ , na escala  $j = -1$  etc. Na Figura 6.8(painel inferior) temos a simulação do processo associado. Vemos os diversos comportamentos em cada intervalo de comprimento 128.

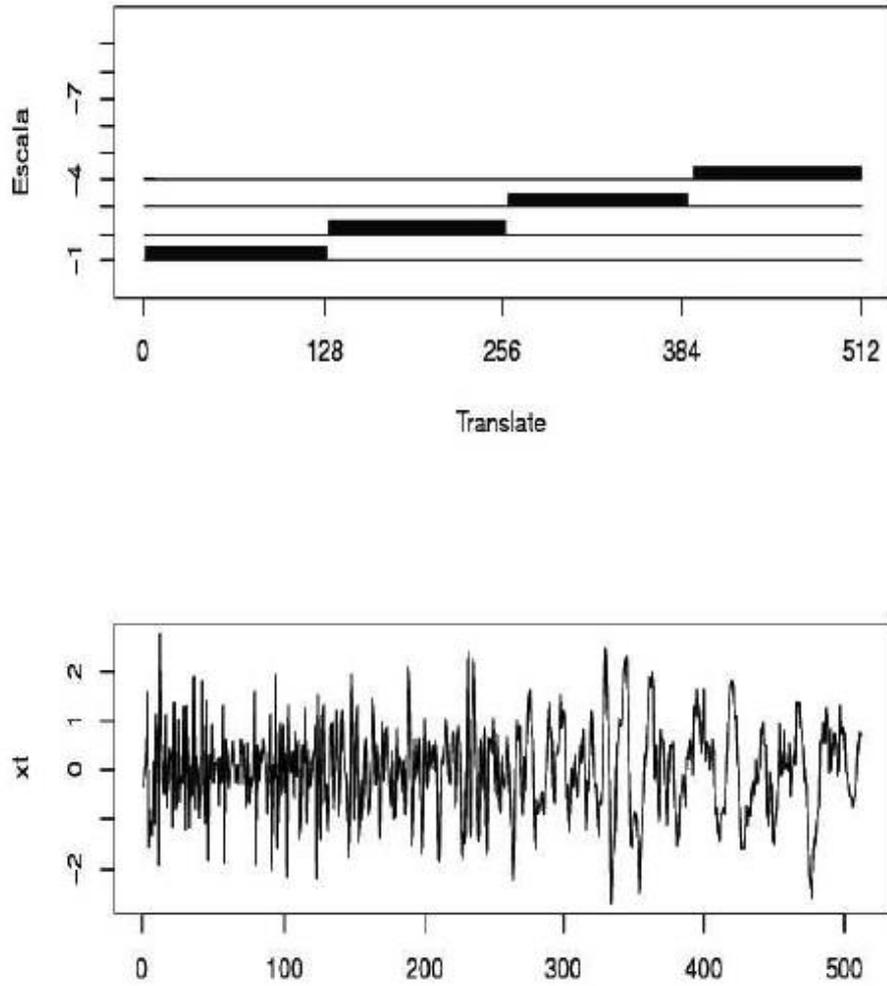


Figura 6.8: Concatenação de quatro processos de médias móveis de Haar simulados (painel inferior)), a partir do espectro evolucionário (painel superior).

Assim como no caso localmente estacionário da seção 6.3, a autocovariância de  $X_{t,T}$  é definida por

$$c_T(u, \tau) = \text{Cov}(X_{[uT],T}, X_{[uT]+\tau,T}) \quad (6.40)$$

e esta tende, quando  $T \rightarrow \infty$ , para

$$c(u, \tau) = \sum_{j=-\infty}^{-1} S_j(u) \Psi_j(\tau), \quad (6.41)$$

para  $\tau \in \mathbb{Z}$ ,  $0 < u \leq 1$ , chamada *função de autocovariância local*. Em (6.41),  $\Psi_j(\tau)$  é a *função de autocorrelação de ondaletas*, definida por

$$\Psi_j(\tau) = \sum_k \psi_{j,k}(0) \psi_{j,k}(\tau), \quad j < 0, \tau \in \mathbb{Z}. \quad (6.42)$$

Para processos estacionários, a dependência em  $u$  em (6.41) desaparece.

**Exemplo 6.6.** Para o processo MA de Haar  $X^{(1)}(t)$ , temos que  $c_X^{(1)}(\tau) = \sigma^2(\delta_{\tau,0} - 1/2\delta_{|\tau|,1})$ , que resulta ser  $\Psi_{-1}(\tau)$ .

Uma questão que surge naturalmente é: o espectro evolucionário de ondaletas é o inverso da função de autocovariância local? A resposta é afirmativa e para detalhes veja Nason et al. (2000). Veja, também, a semelhança de (6.41) com (6.35).

A proposição seguinte fornece a ligação entre processos estacionários e processos de ondaletas localmente estacionários. Para a prova, veja Nason et al. (2000).

**Proposição 6.1.** *(a) Todo processo estacionário com função de autocovariância absolutamente somável é um processo de ondaleta localmente estacionário. (b) Reciprocamente, todo processo de ondaleta localmente estacionário, com a condição adicional  $\sum_j 2^{-j} S_j < \infty$ , é estacionário com autocovariância absolutamente somável.*