

Análise de Ondas

Espectro de Ondas

$$\psi_{a,b}(t) = a^{-1/2}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad b \in \mathbb{R}, a > 0. \quad (7.1)$$

Como vimos, uma escolha conveniente para a e b é $a = 2^{-j}$, $b = k2^{-j}$, $j, k \in \mathbb{Z}$, de tal sorte que

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (7.2)$$

Como antes,

$$\Psi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}\psi(t)dt \quad (7.3)$$

é a transformada de Fourier de $\psi(t)$, que pertence a $L_2(\mathbb{R})$. Note que se $\Psi_{a,b}(\lambda)$ é a transformada de Fourier de $\psi_{a,b}(t)$, então $\Psi_{a,b}(\lambda) = a^{1/2}e^{-ib\lambda}\Psi(a\lambda)$. Podemos pensar $\psi_{a,b}(t)$ como um filtro linear, com função de transferência $\Psi_{a,b}(\lambda)$.

7.2.1 Processos com tempo contínuo

Consideremos um processo estocástico $X(t)$ com tempo contínuo, de média zero e função de autocovariância (f.a.c.v.) $\gamma(s, t) = E[X(s)X(t)]$, $s, t \in \mathbb{R}$. Se $X(t)$ for estacionário, sabemos que $\gamma(s, t) = \gamma(|s - t|)$ e podemos escrever $\gamma(\tau) = \text{Cov}[X(t)X(t+\tau)] = E[X(t)X(t+\tau)]$. Nessa seção, nos baseamos em Li e Oh (2002).

Suponha $X(t)$ com valores reais, contínuo em m.q. e $X(t) \in L_2(\mathbb{R})$, para cada $t \in \mathbb{R}$. Considere o filtro

$$W_{a,b}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(s)\psi_{a,b}(s-t)ds, \quad (7.4)$$

que essencialmente é a transformada de ondaleta contínua de $X(t)$. Essa integral deve ser entendida em m.q.

No caso em que $a = 2^{-j}$, $b = k2^{-j}$, $j, k \in \mathbb{Z}$, (7.4) fica

$$W_{j,k}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(s)\psi_{j,k}(s-t)ds, \quad (7.5)$$

que é a transformada de ondaleta discreta de $X(t)$.

Proposição 7.1. Para t, a, b fixos, a integral (7.4) será bem definida se $\psi_{a,b}(u)\psi_{a,b}(v)\gamma(u+t, v+t)$ for integrável sobre $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ e $|\psi_{a,b}(s)|^2\gamma(s+t, s+t)$ for integrável sobre $s \in \mathbb{R}$. Nesse caso,

$$E\{|W_{a,b}(t)|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a,b}(u)\overline{\psi_{a,b}(v)}\gamma(u+t, v+t)dudv. \quad (7.6)$$

Segue-se que a f.a.c.v. de $W_{a,b}(t)$ é dada por

$$\begin{aligned}\gamma_W(s, t; a, b, a', b') &= E[W_{a,b}(s)W_{a',b'}(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a,b}(u) \overline{\psi_{a',b'}(v)} \gamma(u+s, v+t) dudv. \quad (7.7)\end{aligned}$$

Se $a = a'$, $b = b'$, $s = t$ obtemos (7.6).

Observação: As condições da Proposição 7.1 estarão satisfeitas para qualquer ondaleta ψ e $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, se $\gamma(s, s)$, $\int |\gamma(u, v)| dv$ e $\int |\gamma(u, v)| du$ forem funções limitadas de s, u, v , respectivamente. Essas condições estarão satisfeitas para todos os processos com variação limitada e se $\psi(t) \in L_1(\mathbb{R})$.

Definição 7.1. O espectro de ondaleta instantâneo de $X(t)$ no instante t é definido por

$$\eta(t; a, b) = E\{|W_{a,b}(t)|^2\}. \quad (7.8)$$

Se $\eta(t; a, b)$ for independente de t , como no caso de $X(t)$ ser estacionário, então $\eta(a, b)$ é chamado *espectro de ondaleta de $X(t)$* , para todo $t \in \mathbb{R}$. Nesse caso, e com $a = 2^{-j}$, $b = k2^{-j}$, $j, k \in \mathbb{Z}$, o espectro de ondaletas fica

$$\eta_{j,k} = E\{|W_{j,k}|^2\}, \quad (7.9)$$

e

$$W_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \psi_{j,k}(t) dt. \quad (7.10)$$

Para uma ondaleta fixa ψ , o espectro de ondaleta pode ser visto como uma transformação de segunda ordem do processo estacionário $X(t)$. Dizemos que o espectro de ondaleta η possui a *propriedade de caracterização* se e somente se essa transformação for biunívoca. Se $\gamma(\tau)$ e $f(\lambda)$ representam a f.a.c.v. e densidade espectral de $X(t)$, estacionário, respectivamente, escreveremos

$$\eta(a, b) \leftrightarrow \gamma(\tau) \leftrightarrow f(\lambda)$$

Teorema 7.1. Dada $\psi(t)$, se $\psi(t) \in L_1(\mathbb{R})$ e se $\int_0^{\infty} \lambda^{-1-\alpha} |\Psi(\lambda)|^2 d\lambda < \infty$ valer para algum $\alpha > 0$, então o espectro de ondaleta tem a propriedade de caracterização para processos estacionários.

Corolário 7.1. Para qualquer ondaleta satisfazendo as condições do Teorema 7.1, com $\gamma(\tau) \in L_1(\mathbb{R})$, o espectro de ondaleta correspondente tem a propriedade de caracterização para processos estacionários.

7.2.2 Processos com tempo discreto

Considere um processo estocástico com tempo discreto $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Nesse caso, (7.4) é substituída por

$$W_{j,k}(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} X_s \psi_{j,k}(s-t), \quad (7.11)$$

para $j, k \in \mathbb{Z}$. As definições de espectro instantâneo e espectro de ondaletas não mudam. A equação (7.6) fica

$$E\{|W_{j,k}(t)|^2\} = \sum_u \sum_v \psi_{j,k}(u) \psi_{j,k}(v) \gamma(u+t, v+t), \quad (7.12)$$

e a f.a.c.v de $W_{j,k}(t)$ fica

$$\gamma_W(s, t; j, k, j', k') = \sum_u \sum_v \psi_{j,k}(u) \psi_{j',k'}(v) \gamma(u+s, v+t). \quad (7.13)$$

No caso estacionário, teremos

$$W_{j,k} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} X_t \psi_{j,k}(t), \quad (7.14)$$

de modo que

$$E\{|W_{j,k}|^2\} = \sum_t \sum_s \psi_{j,k}(t) \overline{\psi_{j,k}(s)} \gamma(|t-s|) \quad (7.15)$$

e

$$\gamma_W(j, k, j', k') = \sum_t \sum_s \psi_{j,k}(t) \overline{\psi_{j',k'}(s)} \gamma(|t-s|), \quad (7.16)$$

respectivamente. Podemos, então, dar a seguinte definição.

Definição 7.2. Para o processo estacionário $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, o espectro de ondaleta é definido por

$$\eta_{j,k} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \gamma(\tau) \Psi_{j,k}(\tau), \quad (7.17)$$

na qual $\Psi_{j,k}(\tau)$ é a função de autocovariância de ondaleta, dada por

$$\Psi_{j,k}(\tau) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(t) \overline{\psi_{j,k}(t+|\tau|)}, \quad j, k, \tau \in \mathbb{Z}. \quad (7.18)$$

A Proposição 7.1 continua a valer com as devidas adaptações.

7.3 Estimação do Espectro de Ondaletas

Nessa seção vamos considerar apenas o caso de um processo com tempo discreto.

7.3.1 Caso estacionário

Suponha que tenhamos T observações $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots, X_{T-1})'$ obtidas do processo estacionário X_t , com $T = 2^j$.

Definição 7.2. A *transformada discreta de ondaletas* de \mathbf{X} é definida como

$$d_{j,k} = \sum_{t=0}^{T-1} X_t \psi_{j,k}(t). \quad (7.19)$$

Agora, (7.19) será calculada para $j = 0, 1, \dots, k$ e $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$, perfazendo $T - 1$ coeficientes, mais c_{00} correspondente à função escala.

Considere as seguintes **suposições**, que serão utilizadas a seguir.

- (S1) $\sum_u |\gamma(u)| < \infty$.
- (S2) $\sum_u (1 + |u|) |\gamma(u)| < \infty$.
- (S3) $\sum_{u_1} \dots \sum_{u_{k-1}} |u_j| |C_k(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty$, onde $C_k(u_1, \dots, u_{k-1})$ é o cumulante de ordem k de X_t , $u_1, \dots, u_{k-1} = 0, \pm 1, \dots$, $k \geq 2$.

Segue-se que, se (S2) estiver satisfeita, então (Veja Chiann e Morettin, 1998)

$$E\{d_{j,k}\} = 0$$

e

$$Var\{d_{j,k}\} = E\{|d_{j,k}|^2\} \rightarrow \eta_{j,k}, \quad \text{quando } T \rightarrow \infty. \quad (7.20)$$

Sob a suposição (S2), **$\eta_{j,k}$ existe, é limitado e não negativo.** Note que o espectro de ondaleta decompõe a variância do processo em componentes, cada uma associada a uma particular escala 2^j e uma localização temporal $2^j k$.

Vamos investigar, agora, a estrutura de covariância da transformada de ondaletas discreta. Vamos redefinir (7.16) na forma

$$\eta(j, j', k, k') = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(u) \psi_{j',k'}(v) \gamma(|u-v|), \quad (7.21)$$

$$(7.22)$$

para $j, j', k, k' \in \mathbb{Z}$, como a covariância (assintótica) da transformada de ondaletas. Então, sob (S1), é imediato que

(i) $E\{d_{j,k}d_{j',k'}\} \rightarrow \eta(j, j', k, k')$, quando $T \rightarrow \infty$;

ii) Se $j = j', k = k'$, então $\eta(j, j', k, k') = \eta_{j,k}$.

A covariância assintótica da transformada de ondaletas discreta em dois pares distintos (j, k) e (j', k') não é necessariamente zero, o que contrasta com o caso da transformada discreta de Fourier. Em algumas situações, podemos ter independência.

A relação (7.20) sugere que $\eta_{j,k}$ pode ser estimado pela estatística

$$I_{j,k} = |d_{j,k}|^2 = \left| \sum_{t=0}^{T-1} X_t \psi_{j,k}(t) \right|^2. \quad (7.23)$$

Essa estatística é chamada *periodograma de ondaleta* de \mathbf{X} . O seguinte resultado é válido.

Proposição 7.2. *Suponha (S2) satisfeita. Então:*

$$E[I_{j,k}] = \eta_{j,k} + O(T^{-1}), \quad \text{quando } T \rightarrow \infty. \quad (7.24)$$

Se, além de (S2), (S3) estiver satisfeita com $k = 4$, então

$$\text{Cov}\{I_{j,k}, I_{j',k'}\} = 2\{\eta(j, j', k, k')\}^2 + O(1), \quad \text{quando } T \rightarrow \infty. \quad (7.25)$$

Em particular, se $j = j', k = k'$, obtemos a variância

$$\text{Var}[I_{j,k}] = 2\{\eta_{j,k}\}^2 + O(1). \quad (7.26)$$

A Proposição 7.2 mostra que o periodograma de ondaletas não é consistente, pois sua variância não tende a zero para $T \rightarrow \infty$. Para a prova da Proposição 7.2, veja Chiann e Morettin (1998).

O periodograma dá a ‘energia’ do processo em cada (j, k) . Podemos considerar como a energia total da série está decomposta pelas diversas escalas (ou níveis). Para tanto, consideramos o *escalograma na escala 2^j* como sendo

$$S(j) = \sum_{k=0}^{2^j-1} |d_{j,k}|^2 = \sum_{k=0}^{2^j-1} I_{j,k}, \quad j = 0, \dots, J-1. \quad (7.27)$$

Veja também Scargle (1993) e Ariño et al. (2004).

Sob as suposições da Proposição 7.2 pode-se provar que

$$E\{S(j)\} = \eta_{j,\cdot} + O(2^j T^{-1}), \quad (7.28)$$

$$\text{Cov}\{S(j), S(j')\} = 2 \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{k'=0}^{2^{j'}-1} \{\eta(j, j', k, k')\}^2 + O(1), \quad (7.29)$$

onde

$$\eta_{j,\cdot} = \sum_{k=0}^{2^j-1} \eta_{j,k}.$$

A quantidade $\eta_{j,\cdot}$ pode ser pensada como a energia associada à escala j e $S(j)$ o seu estimador.

Vejamos, agora, um exemplo de Ariño et al. (2004), que mostra como podemos recuperar componentes não observadas de uma série temporal. Esse é um exemplo simulado e na seção 7.4 veremos uma aplicação a dados reais.

Exemplo 7.1. Consideremos uma série temporal artificial, que é a soma de duas séries perfeitamente periódicas. Por meio do escalograma da decomposição de ondaletas, iremos separá-la em duas partes. Depois iremos recuperar as duas componentes usando o escalograma.

A Figura 7.1 (a) mostra duas séries discretas, igualmente espaçadas, $y = \{y_t\}$ e $z = \{z_t\}$, obtidas de duas funções periódicas, a saber, uma função senoidal com quatro ondas e uma função em forma de serra, com 32 dentes. A Figura 7.1 (b) mostra sua soma $x = \{x_t\}$, dada por $x_t = y_t + z_t$, para $t = 1, \dots, T$, com $T = 2^{12}$. Como $\{x_t\}$ é uma amostra de uma função contínua, devemos escolher uma base de ondaletas cujos elementos sejam contínuos. Escolhemos a base de Daubechies d8, cuja ondaleta mãe tem 8 momentos nulos.

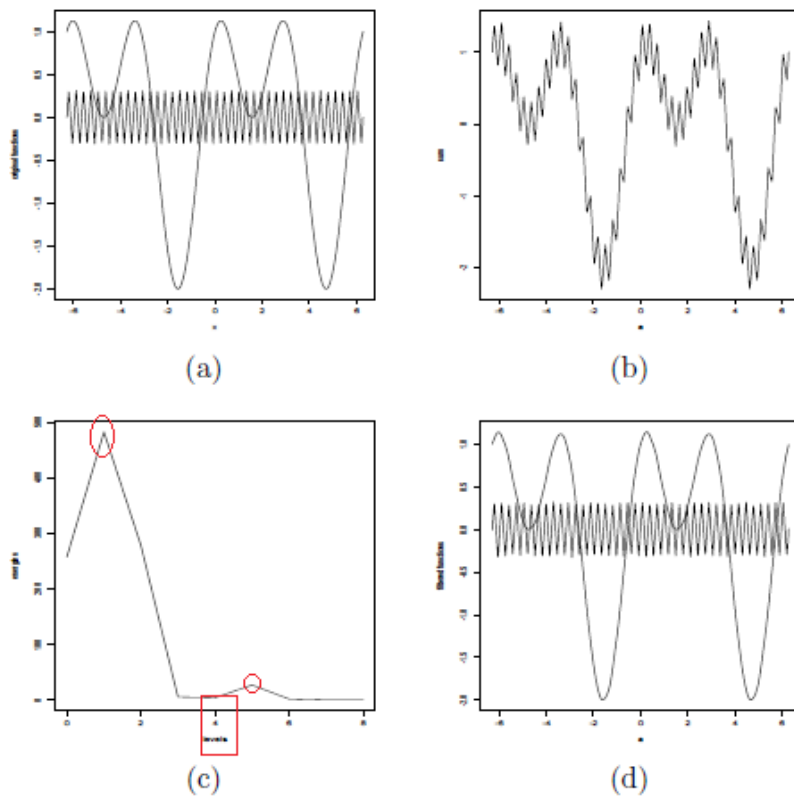


Figura 7.1. (a) Componentes da soma, (b) série composta, (c) escalograma, (d) decomposição cíclica.

¹O primeiro nível (zero), correspondente a c_{00}^2 , é omitido no gráfico

A existência de um pico no escalograma em um nível j indica que uma componente de alta frequência está presente na série. Por outro lado, quando há um pico em um nível baixo, isto significa que uma componente de baixa frequência está presente. Quando dois ou mais picos estão presentes no escalograma, podemos identificar as componentes correspondentes separando-se a decomposição em ondaletas da série em duas decomposições: a primeira, com coeficientes ao redor do primeiro pico, acrescentando-se zeros, e a segunda, com coeficientes ao redor do segundo pico, também com zeros acrescentados. A maneira como analisamos os níveis entre os picos será explicada mais abaixo.

A partir do escalograma apresentado na Figura 7.1 (c), concluímos que a decomposição em ondaletas de x pode ser separada em duas: a primeira tem coeficientes do nível 0 ao nível 4; a segunda, tem coeficientes do nível 5 ao nível 11. Analiticamente,

$$d_{j,k}^{(1)} = \begin{cases} d_{j,k}, & \text{para } j = 0, 1, \dots, 4 \\ 0, & \text{para } j = 5, \dots, 11 \end{cases}$$

$$d_{j,k}^{(2)} = \begin{cases} 0, & \text{para } j = 0, 1, \dots, 4 \\ d_{j,k}, & \text{para } j = 5, \dots, 11 \end{cases}$$

$$c_{00}^{(1)} = c_{00}, \text{ e } c_{00}^{(2)} = 0.$$

Essas duas decomposições em ondaletas são as transformadas de ondaletas discretas de dois vetores de dados, $\mathbf{y}' = \{y'_t\}$ e $\mathbf{z}' = \{z'_t\}$. Especificamente,

$$\mathbf{y}' = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{d}^{(1)},$$

e

$$\mathbf{z}' = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{d}^{(2)}.$$

Na Figura 7.1 (d) apresentamos as séries reconstruídas \mathbf{y}' e \mathbf{z}' . Podemos ver que ambas são muito semelhantes a \mathbf{y} and \mathbf{z} , exceto nos extremos do intervalo $[0, 8\pi]$. Isso é devido a efeitos de fronteira no algoritmo de decomposição em ondaletas. Embora o exemplo apresentado seja simples, o mesmo ilustra como uma série temporal pode ser decomposta em componentes de frequências distintas.

Observe que não foi necessário usar limiar aqui, pois a série artificialmente construída $\{x_t\}$ não tem ruído incluso. Num caso real, como no exemplo 7.4 abaixo, teremos que usar limiar para remover o ruído, antes de determinar as componentes ocultas.

Vejamos, agora, como proceder analiticamente em uma situação real. O argumento é baseado em Ariño et al. (2004). A decomposição de uma série temporal em componentes não observadas, ilustrada no exemplo, é baseada na análise do escalograma da série, com respeito a uma base de ondaletas fixada. Se dois picos estão presentes no escalograma, propõe-se separar a decomposição em ondaletas \mathbf{d} da série $\{x_t\}$ em duas novas decomposições, $\mathbf{d}^{(1)}$ e $\mathbf{d}^{(2)}$, da seguinte maneira: os coeficientes $d_{j,k}$ de \mathbf{d} que correspondem a níveis j próximos ao primeiro pico são associados a $\mathbf{d}^{(1)}$ ($d_{j,k}^{(1)} = d_{j,k}$). Os coeficientes correspondentes em $\mathbf{d}^{(2)}$ serão postos iguais a zero, ($d_{j,k}^{(2)} = 0$).

De modo similar, os coeficientes $d_{j,k}$ de \mathbf{d} para níveis j próximos ao segundo pico, são associados a $\mathbf{d}^{(2)}$, e os correspondentes coeficientes em $\mathbf{d}^{(1)}$ serão anulados. Um problema aparece quando um nível ocorre entre os picos, pois então não fica claro como associar coeficientes.

Duas propostas de separar coeficientes de níveis intermediários são propostas pelos autores do artigo citado. O primeiro método é aditivo com respeito a energias,

mas não com respeito aos coeficientes de ondaletas. Ou seja, não é aditivo no domínio das escalas. O segundo método é aditivo com respeito aos coeficientes de ondaletas, mas não preserva energias.

Seja j um nível tal que sua energia $S(j)$ esteja entre dois picos no escalograma. O método que preserva a energia separa os coeficientes como segue:

$$d_{j,k}^{(1)} = \sqrt{\frac{a}{a+b}} d_{j,k} \quad (7.30)$$

e

$$d_{j,k}^{(2)} = \sqrt{\frac{b}{a+b}} d_{j,k}, \quad (7.31)$$

onde

$$a = d_{j-1, [k/2]}^2 \quad (7.32)$$

e

$$b = \frac{d_{j+1, 2k}^2 + d_{j+1, 2k+1}^2}{2}. \quad (7.33)$$

O racional para esse procedimento é o seguinte: cada coeficiente $d_{j,k}$ tem um “gerador” no seu nível superior $j-1$, que é $d_{j-1, [k/2]}$. Também, cada $d_{j,k}$ gera os dois coeficientes $d_{j+1, 2k}$ e $d_{j+1, 2k+1}$, no seu nível inferior $j+1$. O coeficiente $d_{j,k}^{(1)}$ é “proporcional” ao tamanho relativo de seu gerador com respeito ao tamanho total de seu gerador e a média de ambos os coeficientes que $d_{j,k}$ gera no nível $j+1$.

Sob essa separação, temos

$$(d_{j,k})^2 = \left(d_{j,k}^{(1)}\right)^2 + \left(d_{j,k}^{(2)}\right)^2,$$

mas

$$d_{j,k} \neq d_{j,k}^{(1)} + d_{j,k}^{(2)}.$$

Logo, dizemos que esse método preserva a energia, mas não é aditivo.

Contudo, se os coeficientes são separados como

$$d_{j,k}^{(1)} = \frac{a}{a+b} d_{j,k} \quad (7.34)$$

e

$$d_{j,k}^{(2)} = \frac{b}{a+b} d_{j,k}, \quad (7.35)$$

onde a e b são dados por (7.32) e (7.33), então o método é aditivo, mas as energias não são mais preservadas. Isso segue de

$$(d_{j,k})^2 \neq \left(d_{j,k}^{(1)}\right)^2 + \left(d_{j,k}^{(2)}\right)^2,$$

mas

$$d_{j,k} = d_{j,k}^{(1)} + d_{j,k}^{(2)}.$$

Ao determinar como separar os coeficientes de um certo nível j , sugere-se examinar a energia daquele nível, $S(j)$. Quando $S(j)$ é grande comparado com os dois picos do escalograma, deve-se usar o método aditivo de separação. Se não, as componentes nas quais a série temporal de interesse é decomposta não somariam a série total. Por outro lado, se $S(j)$ for pequeno comparado com os picos, é melhor usar o método que preserva energias. Mesmo que a soma das componentes não seja igual à série total, a parte remanescente é bem pequena e pode ser desprezada. Para cada série temporal particular, o analista tem que decidir qual método usar.