

Aplicações

Exemplo 7.2. A Figura 7.2 (a) ilustra duas séries temporais $\{X_t^{(i)}\}$, $t = 1, \dots, 64$, $i = 1, 2$, que diferem apenas em um ponto: $X_{28}^{(2)} = -X_{28}^{(1)}$. Na Figura 7.2(b) temos o periodograma (3.67), neste caso calculado para λ_j , $j = 0, 1, \dots, 32$. As duas séries têm a mesma “energia”, e, pela relação de Parseval, teremos

$$\sum_{t=1}^{64} X_t^2 = \sum_{j=0}^{32} I(\lambda_j).$$

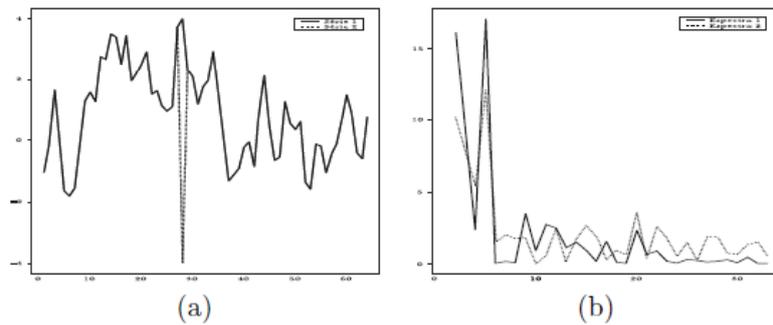


Figura 7.2: (a) Duas séries diferindo num só ponto; (b) Periodogramas de Fourier.

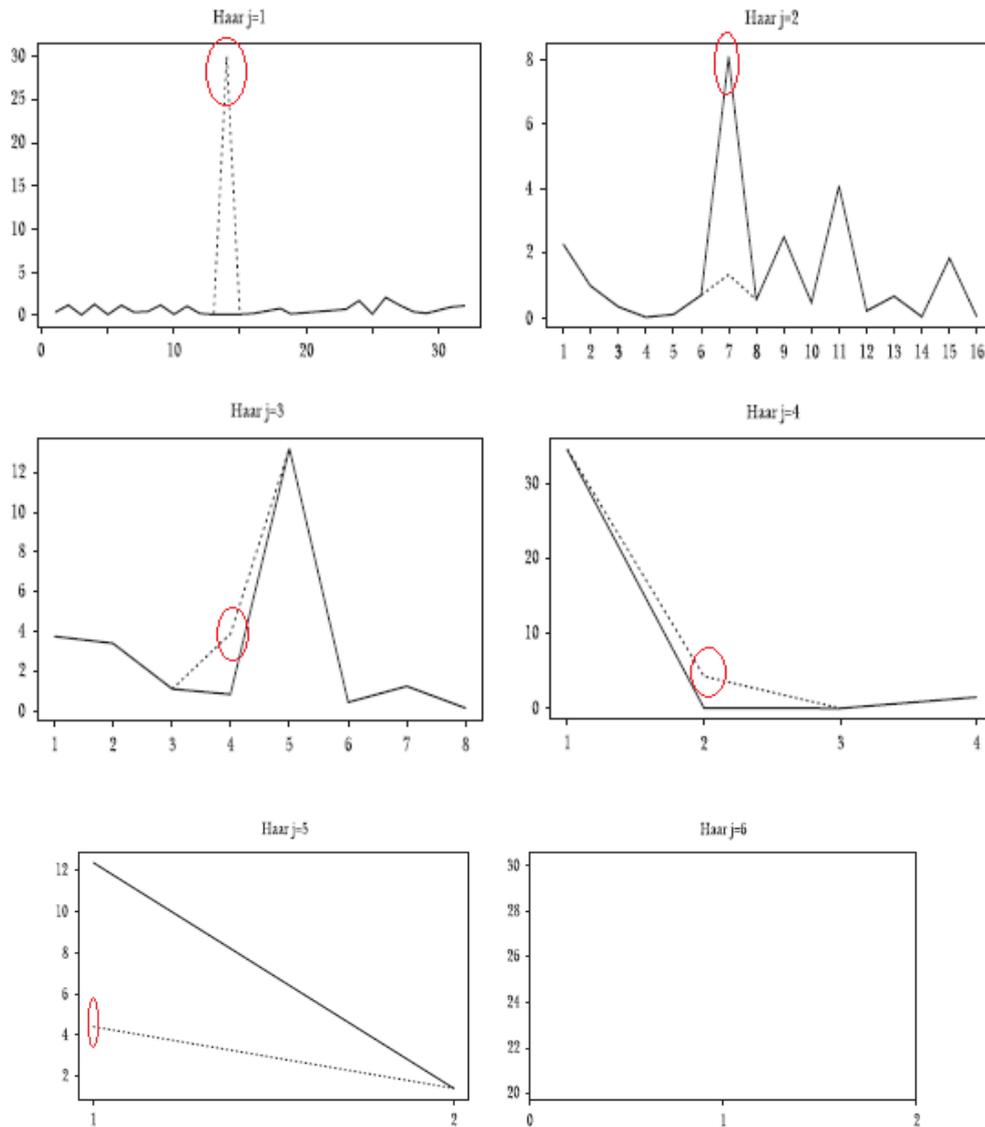


Figura 7.3: Periodogramas de ondaletas para as duas séries da Figura 7.2.

Vemos que todos as ordenadas do periodograma foram alteradas. Isso mostra que os coeficientes de Fourier não são “localizados” no tempo, ou seja, cada um é determinado por valores da série espalhados num intervalo grande de tempo.

O periodograma de ondaleta para cada série é mostrado na Figura 7.3. Foi usada a ondaleta de Haar e temos os gráficos para cada escala. Vemos que somente um ponto em cada escala é alterado, mostrando a boa localização dos coeficientes de ondaletas.

Exemplo 7.3 Considere as séries de estados de sonos de recém-nascidos, apresentadas no Exemplo 1.5 (Figura 1.10). Nas Figuras 7.4(a) e 7.4(b) temos, respectivamente, os coeficientes de ondaletas de “não exposto” e “exposto”, enquanto seus periodogramas de ondaletas estão nas Figuras 7.5(a) e 7.5(b). Imagens desses periodogramas estão mostradas na Figura 7.6, onde regiões mais escuras indicam componentes com maior energia. Em particular, vemos que as escalas maiores contribuem mais para a energia de cada série e que, para a série de expostos, a energia é mais concentrada em altas escalas do que para a série de não expostos. Na Figura 7.7, temos os escalogramas para as duas situações. Note que há um pico na escala $j = 5$, indicando que um período longo está presente nas duas séries. As figuras foram obtidas usando o *software* S+WAVELETS, logo deve-se tomar cuidado com a interpretação devido à mudança de notação das escalas.

Exemplo 1.5. A Figura 1.12(a) apresenta a série de estados de sono de um recém-nascido cuja mãe não ingeriu bebida alcóolica durante a gravidez (brevemente, “não exposto”). Esta é uma série temporal categorizada, sendo que os estados são categorizados, a cada minuto, da seguinte maneira:

- 1: sono tranquilo – *trace alternant*;
- 2: sono tranquilo – *high-voltage*;
- 3: sono indeterminado;
- 4: sono ativo – *low-voltage*;
- 5: sono ativo – *mixed*;

6: acordado.

Na Figura 1.12(b), apresentamos a série de estados de sono de um recém-nascido cuja mãe ingeriu bebida alcóolica moderadamente durante a gravidez (“exposto”). Ambas as séries consistem de 128 dados, observados a cada minuto. Essas séries são parte de um conjunto maior de dados analisados por Stoffer *et al* (1988), com o objetivo de estudar os efeitos do consumo moderado de álcool, por parte das mães, sobre os padrões de sono dos recém-nascidos. Os dados estão listados no arquivo *min-sono*.

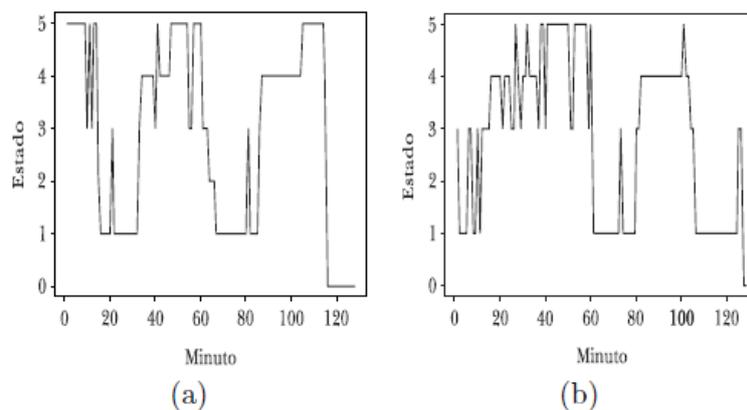


Figura 1.12: Estados de sono de recém-nascido. (a) Não exposto (b) Exposto.

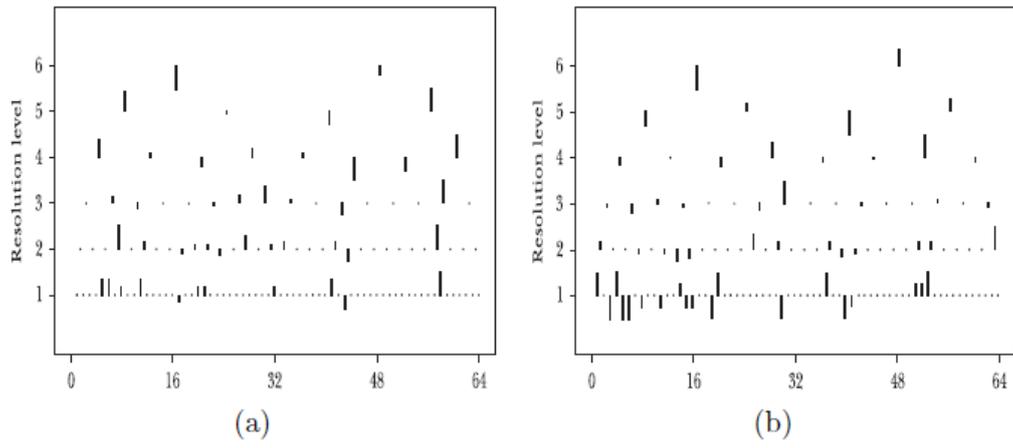


Figura 7.4: Coeficientes de ondaletas para estados de sono.
 (a) Não exposto; (b) Exposto.

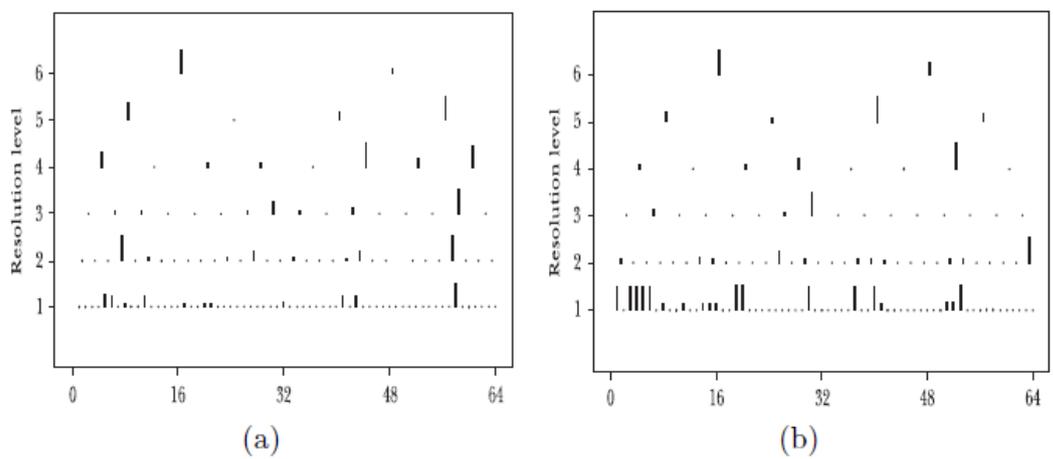


Figura 7.5: Periodograma de ondaletas para estados de sono.
 (a) Não exposto; (b) Exposto.

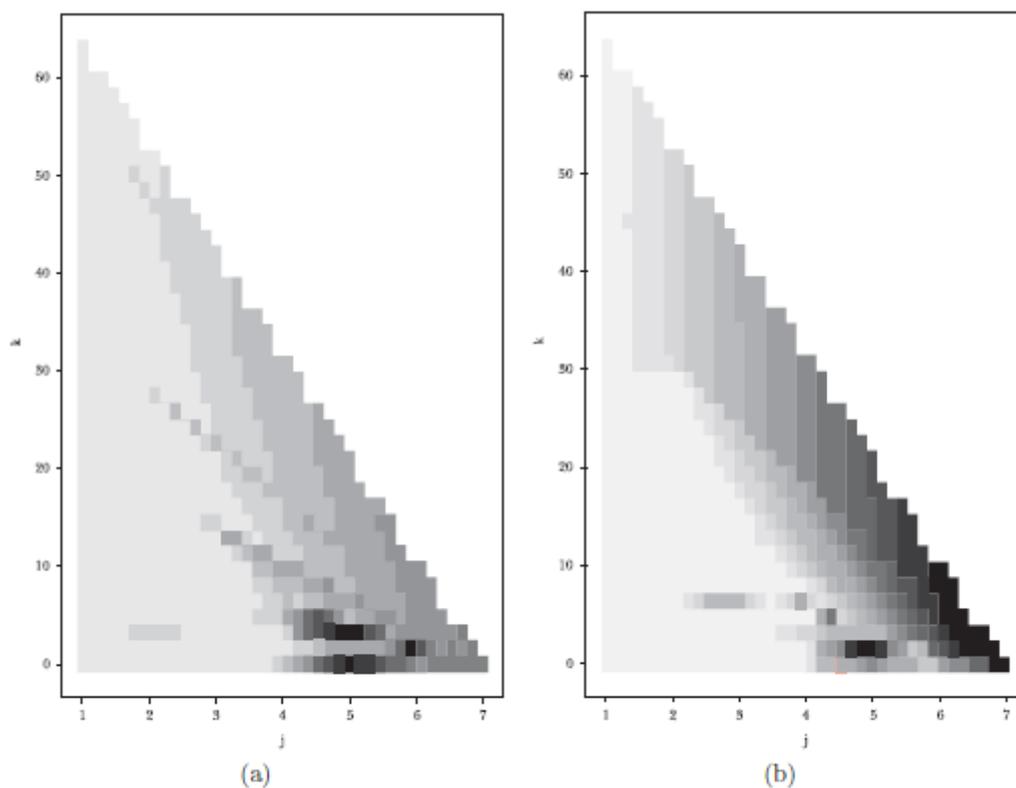


Figura 7.6: Imagens dos periodogramas para estados de sono.
 (a) Não exposto; (b) Exposto.

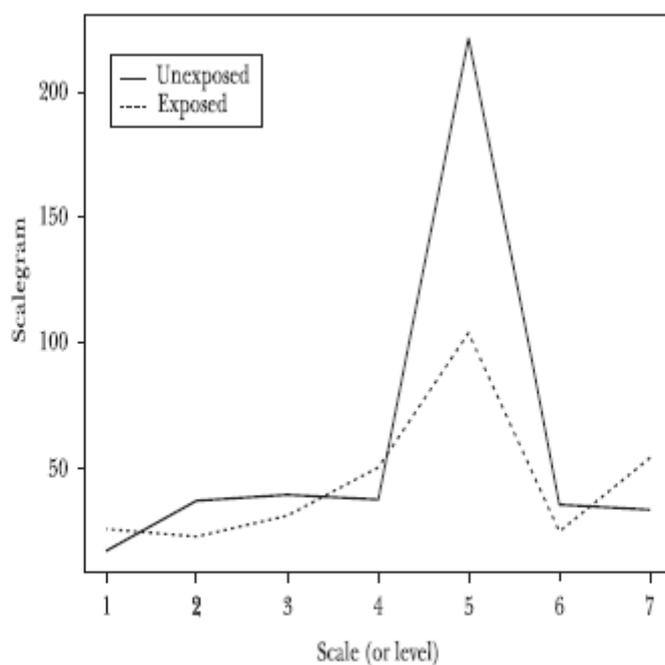


Figura 7.7: Escalogramas para estados de sono.

Exemplo 7.4. Vamos considerar a série de produção mensal de cimento na Espanha, de janeiro de 1955 a janeiro de 1995. Um gráfico dessa série é dado na Figura 1.12. Os dados estão em milhares de toneladas. Para detalhes sobre essa série, veja o Capítulo 1, Seção 1.5.

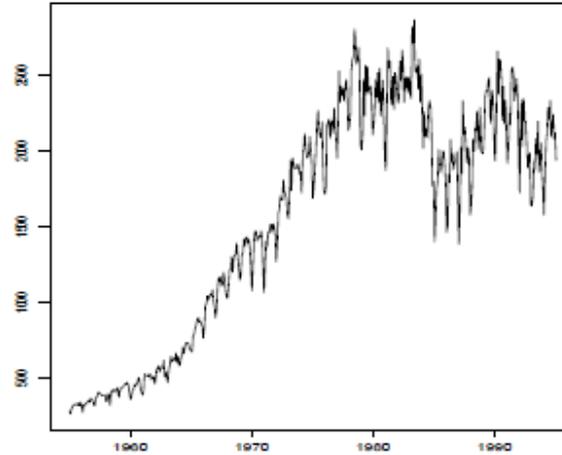


Figura 1.14: Produção mensal de cimento na Espanha, 1955-1994.

Vemos claramente uma flutuação sazonal na série: produção menor no inverno e verão (principalmente em agosto).

Denotemos por $\{x_t\}$ a série de produção mensal de concreto na Espanha. Para estabilizar a variância, tomamos o logaritmo natural e seja $x'_t = 1000 \log x_t$. Depois, ajustamos uma parábola a $\{x'_t\}$ para remover a tendência e estudamos a série residual

$$y_t = 1000 \log x_t - 5450,92 - 12,7917t + 0,01773t^2. \quad (7.38)$$

Seja F a transformação que faz $F(x_t) = y_t$. Um gráfico dos resíduo $y = \{y_t\}$ é apresentado na Figura 7.8(a).

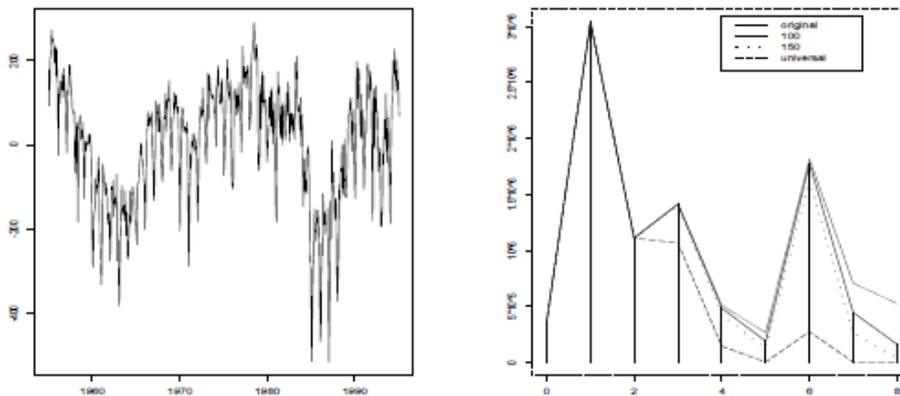


Figura 7.8: (a) Série residual $\{y_t\}$, e (b) escalogramas da DWT de \underline{d} sob vários limiares.

Supomos que a série y seja estacionária, com média zero. Para analisar o escalograma, escolhemos decompor a série com a base de ondaletas $d8$. Para decompor $\{y_t\}$ é conveniente que o tamanho da série seja uma potência de dois. Como temos 481 dados, adicionamos 31 zeros no início, de modo que tenhamos y com $512 = 2^9$ observações. Após obter a decomposição

$$d = Wy,$$

usamos um limiar para remover o ruído, zerando os coeficientes menores do que 100. Esse limiar foi escolhido de modo que o escalograma da decomposição limiarizada mantenha os picos que tinha antes quase iguais, enquanto o ruído foi removido. Coeficientes pequenos $d_{j,k}$ em níveis afastados dos picos podem ser encarados como ruído. O limiar universal de Donoho e Johnstone é igual a 358. Usando esse limiar eliminaria os efeitos sazonais da série. Os escalogramas da série não limiarizada, e aqueles das séries limiarizadas com limiares 100, 150 e universal são mostrados na Figura 7.8 (b). O conjunto dos coeficientes limiarizados será denotado por \tilde{d} .

Os níveis 1 e 6 apresentam os dois picos mais importantes do escalograma de \tilde{d} . Agora usamos o procedimento apresentado após o Exemplo 7.1. Decomponha \tilde{d} em $\tilde{d}^{(1)}$ e $\tilde{d}^{(2)}$, cada um com tamanho 2^9 ; $\tilde{d}^{(1)}$ contém os coeficientes dos níveis 0 a 4 de \tilde{d} e $\tilde{d}^{(2)}$ contém os coeficientes dos níveis 6 a 8 de \tilde{d} . Os coeficientes do nível 5 são separados de acordo com o algoritmo que preserva a energia visto acima. Se tivéssemos escolhido o método aditivo, a diferença seria mínima, pois a energia é pequena. Os demais coeficientes de $\tilde{d}^{(1)}$ e $\tilde{d}^{(2)}$ são iguais a 0.

Para extrair os ciclos em y aplicamos a transformada discreta de ondaleta inversa a $\tilde{d}^{(1)}$ e $\tilde{d}^{(2)}$. Obtemos

$$y^{(1)} = W^{-1}\tilde{d}^{(1)}, \quad (7.39)$$

e

$$y^{(2)} = W^{-1}\tilde{d}^{(2)}. \quad (7.40)$$

O último passo é extrair as componentes da série original $\{x_t\}$ usando a transformação inversa F^{-1} . Essa série é decomposta como

$$\{x_t\} = \{x_t^{(1)}\} + \{x_t^{(2)}\} + \{e_t\}. \quad (7.41)$$

A primeira componente² $x_t^{(1)}$ é

$$x_t^{(1)} = F^{-1}\left(y_t^{(1)}\right). \quad (7.42)$$

Essa série $\{x_t^{(1)}\}$ captura o ciclo de negócios que afeta todas as indústrias, e não somente o setor de construção.

²As 31 observações adicionadas ao começo da série devem ser removidas

Como $\{e_t\}$ é o termo de ruído removido pela limiarização, temos

$$e_t = x_t - F^{-1} \left(\underline{y}_t^{(1)} + \underline{y}_t^{(2)} \right). \quad (7.43)$$

Finalmente, a segunda componente é a parte restante

$$x_t^{(2)} = x_t - x_t^{(1)} - e_t, \quad (7.44)$$

que captura a sazonalidade do setor.

Um gráfico da série original $\{x_t\}$, juntamente com o ciclo de negócios $\{x_t^{(1)}\}$, e a componente sazonal $\{x_t^{(2)}\}$, é apresentado na Figura 7.9.

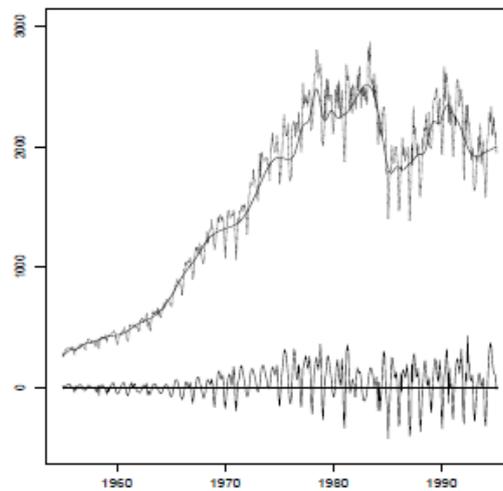


Figura 7.9: Série original de produção de concreto e decomposição da série em ciclos.