Séries Temporais Financeiras

aula 03

1. Distribuição de Retornos

- Distribuição conjunta

  N ativos com retornos r_{it} em T instantes de tempo; considerar as distribuições

$$F(r_{11}, \ldots, r_{N1}; \ldots; r_{1T}, \ldots, r_{NT});$$

  dependem de outras variáveis e parâmetro desconhecidos.

- Distribuições condicionais:

$$F(r_1, \ldots, r_n) = F_1(r_1)F_2(r_2|r_1)\ldots F_n(r_n|\mathcal{F}_{n-1}).$$

- Versão da hipótese do Passeio Aleatório (mercado eficiente):

$$F_t(r_t|\mathcal{F}_{t-1}) = F_t(r_t),$$

- Distribuições incondicionais:

  - retornos independentes temporalmente e **normais**;

  - $r_t \sim N(\mu, \sigma^2) \longrightarrow 1 + R_t \sim$ log-Normais.

  - distribuições estáveis.

Assimetria e Curtose

Uma suposição muitas vezes utilizada é que os retornos r_t sejam independentes, identicamente distribuídos e normais (gaussianos). Contudo há argumentos contrários a essa suposição. Se supusermos que os log-retornos r_t são normais, os retornos brutos serão log-normais, o que parece ser mais razoável.

se $r_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, então, como $r_t = \log(1 + R_t)$, segue-se que $1 + R_t$ será log-normal, com

$$E(R_t) = e^{\mu+\sigma^2/2} - 1, \tag{1.22}$$

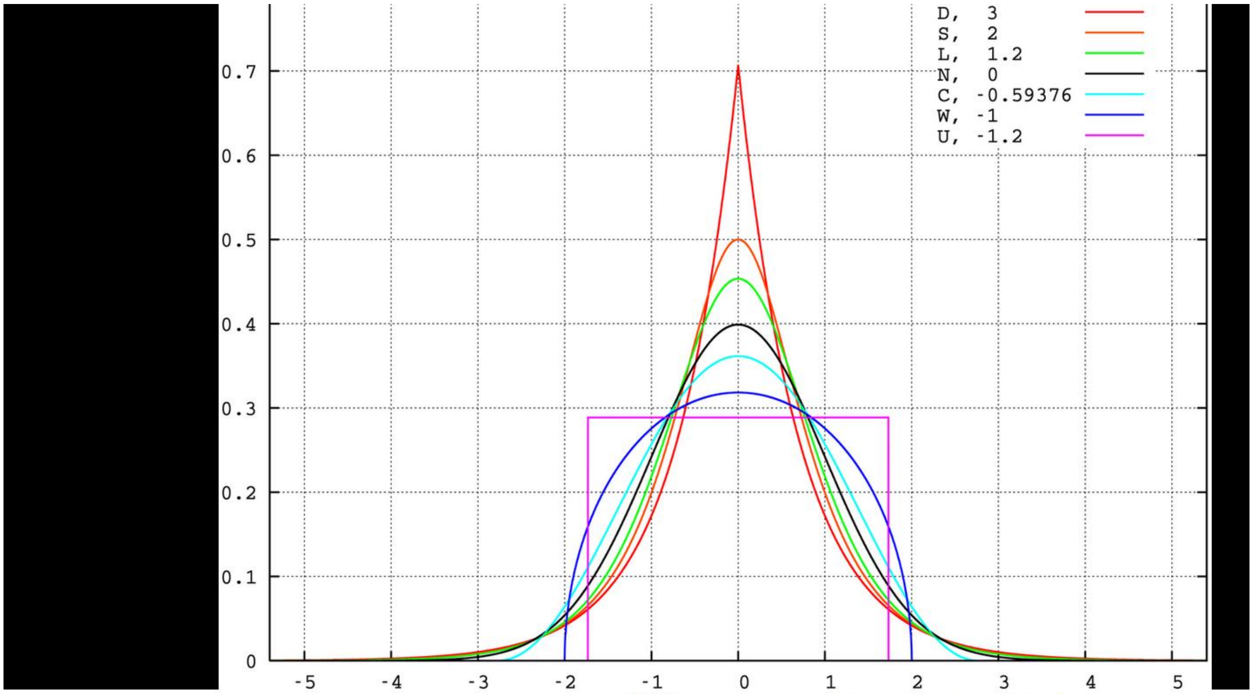
$$\text{Var}(R_t) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1). \tag{1.23}$$

Quando se considera a distribuição amostral dos retornos, nota-se que esta é aproximadamente simétrica, mas com *excesso de curtose*. Vamos discutir brevemente os conceitos de *assimetria* e *curtose*.

1. Assimetria e Curtose

- X: média μ e variância σ^2.
- **assimetria** $A(X) = E\left[\frac{(X-\mu)^3}{\sigma^3}\right]$.
- **Curtose**: $K(X) = E\left[\frac{(X-\mu)^4}{\sigma^4}\right]$.
- Normal: $A = 0, K = 3$.
- Distribuições com caudas longas: $K > 3$ ou $K = \infty$.

e(X) = K(X) – 3: excesso de curtose. Distribuições com caudas pesadas têm curtose maior do que 3, e esta pode mesmo ser infinita.



Plot of several symmetric unimodal probability densities with unit variance. From highest to lowest peak: red, kurtosis 3, Laplace (D)ouble exponential distribution; orange, kurtosis 2, hyperbolic (S)ecant distribution; green, kurtosis 1.2, (L)ogistic distribution; black, kurtosis 0, (N)ormal distribution; cyan, kurtosis −0.593762..., raised (C)osine distribution; ...

Significado [editar | editar código-fonte]

- Se o valor da curtose for = 0 (ou 3, pela segunda definição), então tem o mesmo achatamento que a distribuição normal. Chama-se a estas funções de mesocúrticas
- Se o valor é > 0 (ou > 3), então a distribuição em questão é mais alta (afunilada) e concentrada que a distribuição normal. Diz-se desta função probabilidade que é leptocúrtica, ou que a distribuição tem *caudas pesadas* (o significado é que é relativamente fácil obter valores que não se aproximam da média a vários múltiplos do desvio padrão)
- Se o valor é < 0 (ou < 3), então a função de distribuição é mais "achatada" que a distribuição normal. Chama-se-lhe platicúrtica

- Estimativas:

$$\widehat{A} = \frac{1}{T\widehat{\sigma}^3}\sum_{t=1}^{T}(X_t - \overline{X})^3,$$

$$\widehat{K} = \frac{1}{T\widehat{\sigma}^4}\sum_{t=1}^{T}(X_t - \overline{X})^4.$$

- Dados normais: $\widehat{A} \approx N(0, 6/T)$,

  $\widehat{K} \approx N(3, 24/T)$.

- $\widehat{K} - 3$: excesso de curtose.

- **Teste de Normalidade**

- Jarque e Bera (1981).

- $$S = (\frac{t}{6})\hat{A}^2 + (\frac{T}{24})(\hat{K} - 3)^2.$$

- H_0 série é normal

- Sob H_0, $S \sim \chi^2(2)$.

- Outros testes:

  - qui-quadrado de aderência

  - Kolmogorov-Smirnov

Os programas S+FinMetrics e EViews, ao calcularem várias estatísticas descritivas da série, calculam também ***S*** e fornecem o respectivo p-valor.

Fatos Estilizados Sobre os Retornos

Séries econômicas e financeiras apresentam algumas características que são comuns a outras séries temporais, como:

(a) tendências;

(b) sazonalidade;

(c) pontos influentes (atípicos);

(d) heteroscedasticidade condicional;

(e) não linearidade.

De um modo bastante geral, podemos dizer que uma série econômica ou financeira é não linear quando responde de maneira diferente a choques grandes ou pequenos, ou ainda, a choques negativos ou positivos.
Por exemplo, uma queda de um índice da Bolsa de Valores de São Paulo pode causar maior volatilidade no mercado do que uma alta.

Os retornos financeiros apresentam, por outro lado, outras características peculiares, que muitas séries não apresentam.

Retornos raramente apresentam tendências ou sazonalidades, com exceção eventualmente de retornos intradiírios.

Séries de taxas de câmbio e séries de taxas de juros podem apresentar tendências que variam no tempo.

Os principais ***fatos estilizados*** relativos a retornos financeiros podem ser resumidos como segue:

1. retornos não são, em geral, autocorrelacionados;
2. os **quadrados** dos retornos são **autocorrelacionados**, apresentando uma correlação de **lag um** pequena e depois uma queda lenta das demais;
3. séries de retornos apresentam agrupamentos de volatilidades ao longo do tempo;
4. a distribuição (incondicional) dos retornos apresenta **caudas mais pesadas** do que uma distribuição normal; além disso, a distribuição, embora aproximadamente simétrica, é, em geral, **leptocúrtica (*caudas pesadas*)**;
5. algumas séries de retornos são **não lineares**, no sentido explicado acima.

Exemplo 1.1. (continuação) Na Figura 1.1 (b), temos a série de retornos do Ibovespa, na qual notamos os fatos estilizados apontadas antes, quais sejam, aparente estacionariedade, média ao redor de zero e agrupamentos de volatilidades. Períodos de alta volatilidade coincidem com épocas nas quais ocorreram crises em diversos países e no Brasil, que influenciaram o mercado financeiro brasileiro. Entre essas, destacamos a crise no México, em fevereiro e março de 1995; a crise na Ásia, em outubro de 1997; moratória na Rússia, em agosto de 1998; desvalorização do Real em janeiro de 1999; queda da bolsa Nasdaq, em abril de 2000; início do governo Lula, em 2002; crise da sub-prime americana, em 2007 e a crise econômica internacional, em 2008.

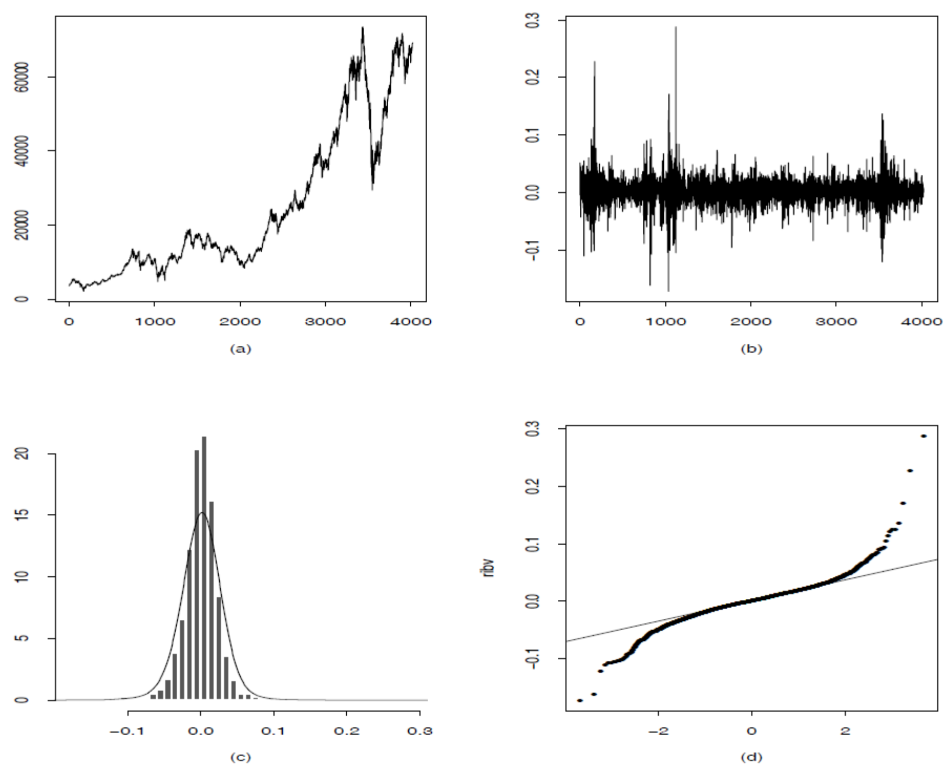


Figura 1.1: (a) Gráfico da série Ibovespa (b) série dos retornos (c) histograma dos retornos com densidade ajustada (d) gráfico $Q \times Q$

Na Tabela 1.1, apresentamos algumas estatísticas das séries Ibovespa e DJIA. Notamos que as curtoses são altas enquanto que os coeficientes de assimetria indicam distribuições aproximadamente simétricas. Já havíamos comentado que os dados não são normalmente distribuídos, fato apontado pelos gráficos $Q \times Q$.

Tabela 1.1: Estatísticas para as séries de retornos do Ibovespa e DJIA.

Estatística	Ibovespa	DJIA
Média	0,000737	0,000410
Mediana	0,001364	0,000606
Desvio padrão	0,023983	0,011705
Assimetria	0,396310	-0,302922
Curtose	11,385750	4,0184030
Mínimo	-0,172258	-0,074541
Máximo	0,288248	0,061554

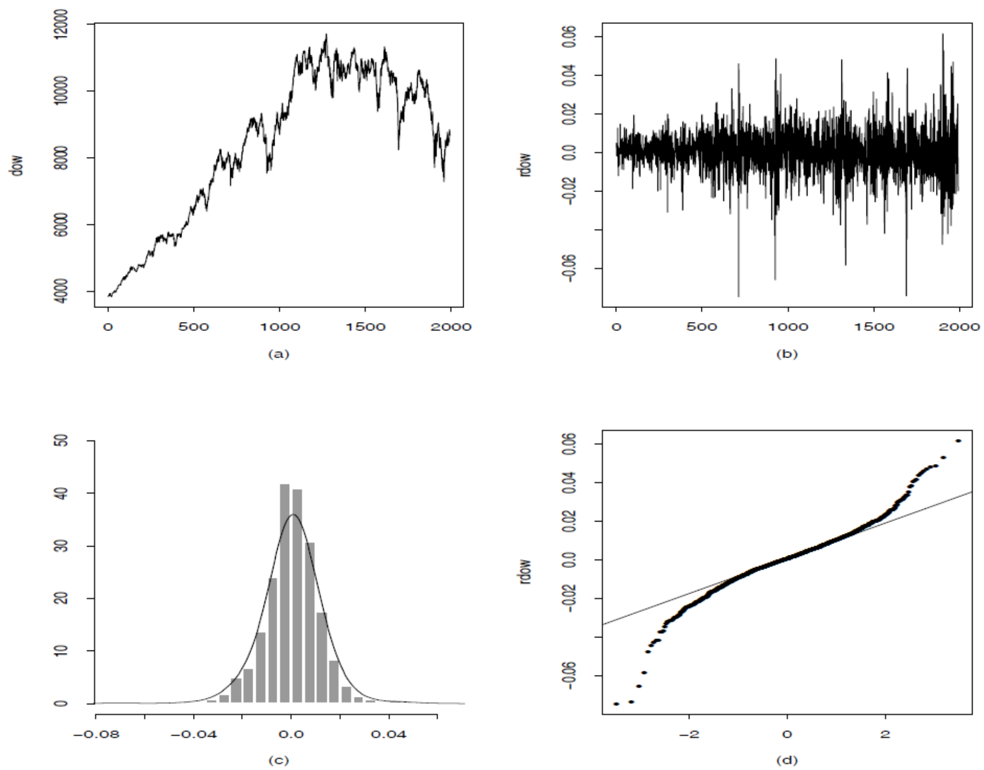


Figura 1.2: (a) Gráfico da série DJIA (b) série dos retornos (c) histograma dos retornos com densidade ajustada (d) gráfico $Q \times Q$

Exemplo 1.6. Na Figura 1.6 (a), temos a série de preços diários das ações da Petrobras PN, no período de 18 de agosto de 1998 a 29 de setembro de 2010(arquivo d-petro98.10.dat), com $T = 2999$ observações. Mostramos as mesmas quantidades do exemplo 1.1 nas figuras 1.6 (b), 1.6 (c) e 1.6(d). Notam-se os mesmos fatos estilizados e o comportamento similar das duas séries, Ibovespa e Petrobras; a correlação contemporânea entre elas é alta. Veja o Capítulo 7.

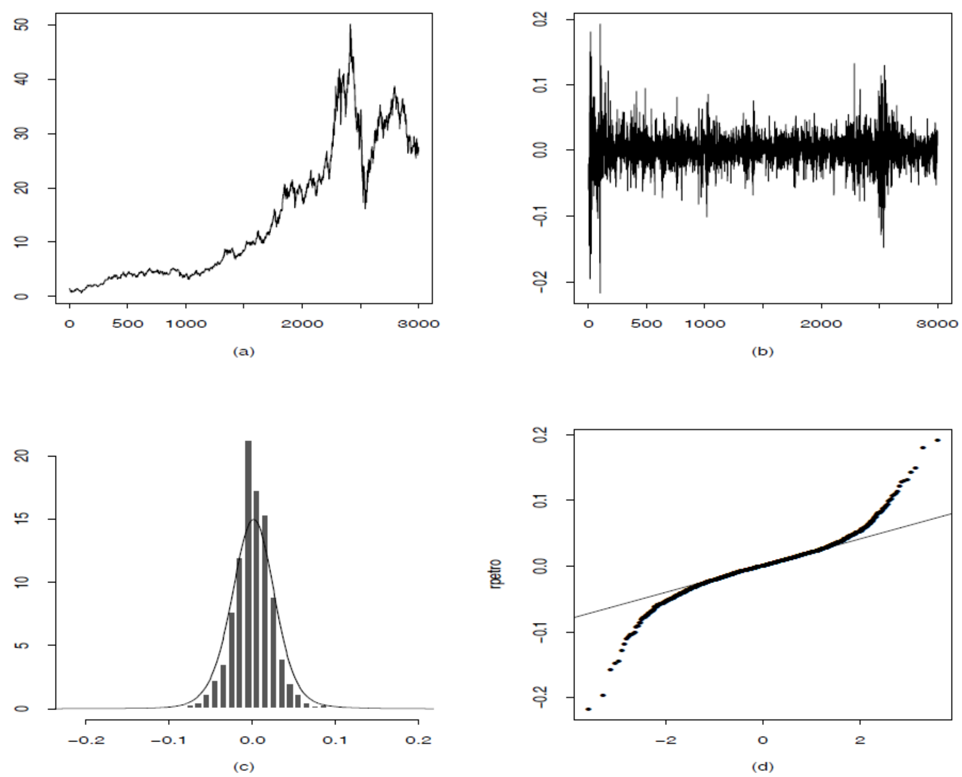


Figura 1.6: (a) Gráfico da série Petrobras (b) Retornos diários da Petrobras (c) Histograma com densidade ajustada (d) Gráfico $Q \times Q$

Exemplo 1.7. Considere a série diária de taxas de câmbio USD/Real, de 30 de junho de 1994 a 1 de julho de 1998 (arquivo d-usre94.98.dat), contendo $T = 997$ observações. A série, retornos, histograma e gráfico $Q \times Q$ estão apresentados na Figura 1.7. Observe a grande variabilidade no início da série de retornos, comparada com a parte final.

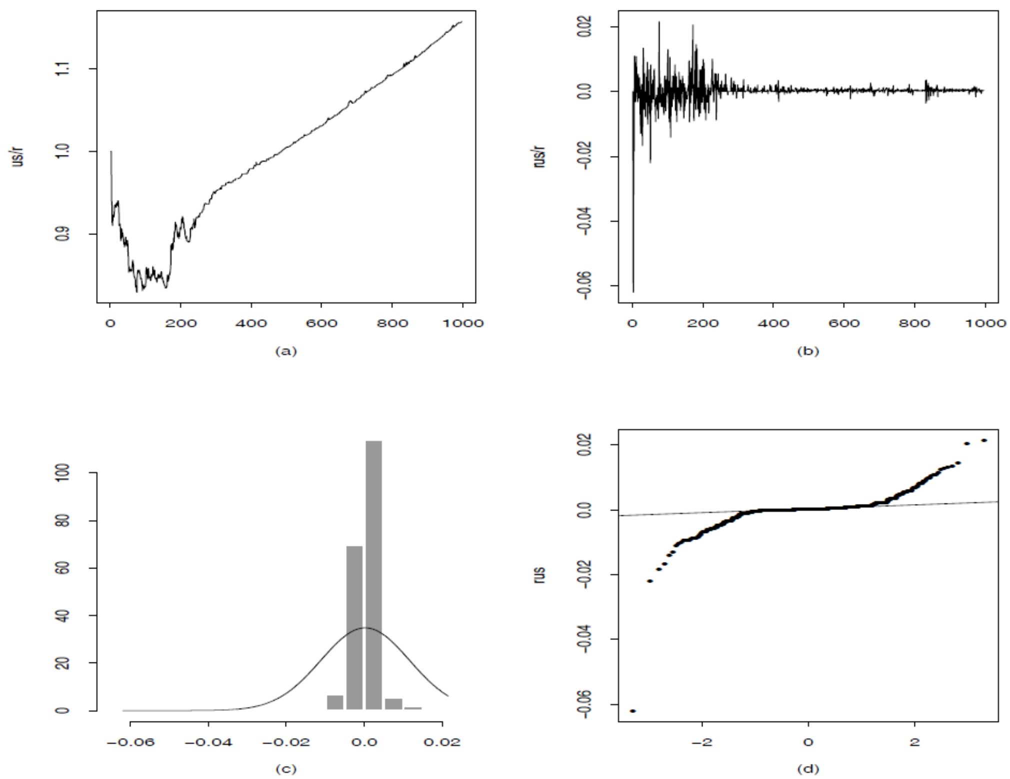


Figura 1.7: (a) Gráfico da série de taxas de câmbio USD/Real (b) Série dos retornos (c) Histograma com densidade ajustada (d) Gráfico $Q \times Q$

Volatilidade

Um dos objetivos deste curso será o de modelar o que se chama de *volatilidade*, que é o desvio padrão condicional de uma variável, comumente um retorno.

Embora não seja medida diretamente, a volatilidade manifesta-se de várias maneiras numa série financeira.

Há três enfoques para o cálculo de volatilidades:

(i) uma maneira é equacionar um preço de mercado observado com o preço modelado de uma opção. Obtemos o que se chama de *volatilidade implícita*, que usualmente é baseada na fórmula de Black-Scholes para opções europeias. Essa fórmula supõe normalidade dos preços e volatilidade constante;

(ii) outra maneira é modelar diretamente a volatilidade da série de retornos, usando alguma família, como a dos modelos ARCH; obtemos a chamada *volatilidade estatística*;

(iii) uma alternativa é modelar a volatilidade por meio de uma média de uma função dos últimos k retornos, digamos. Obtemos o que se chama de *volatilidade histórica*. Podemos considerar os quadrados dos retornos ou os valores absolutos dos retornos nesta média móvel. Uma definição geral calcula a volatilidade, para cada instante t, como uma média de k retornos passados, a saber,

$$v_t = \left[\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} |r_{t-j}|^p \right]^{\frac{1}{p}},$$

onde $p > 0$. Como dissemos acima, casos usuais são $p = 2$ e $p = 1$.

No lugar de uma média podemos calcular a volatilidade por meio de um procedimento EWMA (*exponentially weighted moving average*), usado pelo RiskMetrics, desenvolvido pelo banco J.P. Morgan.

Outra possibilidade é utilizar os preços de abertura, mínimo, máximo e de fechamento (veja o exemplo 1.2, para o caso do índice Dow Jones) para o cálculo de uma estimativa da volatilidade diíaria.

Para dados intradários, pode-se estimar a volatilidade diária por meio da *volatilidade realizada*, que é a soma dos quadrados dos retornos obtidos em intervalos regulares durante este dia, por exemplo, a cada 15 minutos.

Os valores obtidos pelas diversas abordagens acima descritas podem ser muito diferentes. De qualquer modo, a volatilidade é uma medida de variabilidade de preços de ativos e normalmente é difícil prever variações de preços.

Mas em toda atividade financeira (gestão de risco, apreçamento de derivativos e “hedging”, seleção de carteiras, etc) há a necessidade de se prever volatilidade.

Por exemplo, um gestor de risco quer saber hoje a probabilidade de que uma carteira sua perca valor num futuro de curto prazo (um dia, por exemplo) ou razoavelmente longo (como 30 dias).

Vamos introduzir uma notação que será utilizada em capítulos seguintes. Seja r_t uma série de retornos. Defina

$$\mu_t = E(r_t|\mathcal{F}_{t-1}) = E_{t-1}(r_t), \tag{1.29}$$

$$h_t = E((r_t - \mu_t)^2|\mathcal{F}_{t-1}) = E_{t-1}((r_t - \mu_t)^2), \tag{1.30}$$

a média e variância condicionais de r_t, dada a informação até o instante $t-1$, $\mathcal{F}_{t-1}$.

Um modelo típico para a volatilidade é da forma

$$r_t = \mu_t + \sqrt{h_t}\varepsilon_t, \tag{1.31}$$

onde $E_{t-1}(\varepsilon_t) = 0$, $\mathrm{Var}_{t-1}(\varepsilon_t) = 1$ e tipicamente ε_t é i.i.d. com distribuição F. A média e variância incondicionais de r_t serão denotadas por $\mu = E(r_t)$ e $\sigma^2 = \mathrm{Var}(r_t)$, respectivamente, e seja G a distribuição de r_t. É claro que (1.29), (1.30) e F determinam μ, σ^2 e G, mas não o contrário.

Aspectos Computacionais

EViews,

o módulo S+FinMetrics do SPlus,

o software livre R,

o MatLab,

o STAMP.