Séries Temporais Financeiras
Aula 4

MODELOS PARA SÉRIES TEMPOTAIS

1. Processos estocásticos

Definição 1. Seja T um conjunto arbitrário. Um processo estocástico é uma família X = {X(t), t Є T}, tal que, para cada t Є T , X(t) é uma variável aleatória.

Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias definidas num mesmo espaço de probabilidade (Ω, A, P).

Para t Є T, X(t) é uma v.a. definida sobre Ω, na realidade X(t) é uma função de dois argumentos, X(t,w), t Є T, w Є Ω.

Para cada t fixo, X(t, w) é uma v.a. com uma distribuição de probabilidade. È possível que a função de densidade de probabilidade (fdp) no instante t_1 seja diferente da fdp no instante t_2, mas a situação usual é aquela que a fdp de X(t, w) é mesma, para todos os t.

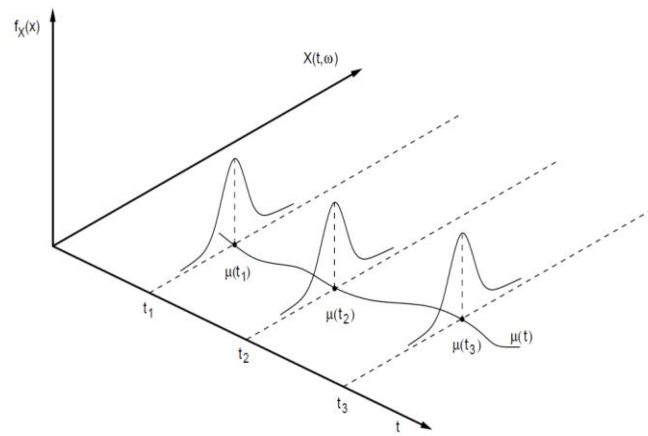

Figura 2.1: Processo estocástico como uma família de variáveis aleatórias.

Para cada w fixo, uma função de t, ou seja, uma realização ou trajetória do processo, uma série temporal.

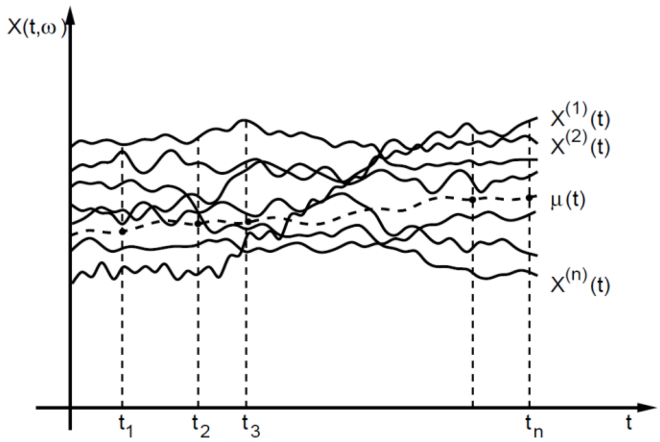

Figura 2.2: Processo estocástico como uma família de trajetórias

2. Especificação de um processo estocástico

Sejam $t_1, t_2, \ldots, t_n$ elementos quaisquer de $\mathcal{T}$, e consideremos

$$F(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, \ldots, X(t_n) \leq x_n\}. \tag{2.1}$$

Então, o processo estocástico $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ estará especificado se forem conhecidas as *distribuições finito-dimensionais* (2.1), para todo $n \geq 1$. Isto significa que, para $n = 1$, nós conhecemos as distribuições unidimensionais da v.a. $X(t_1), t_1 \in \mathcal{T}$, para $n = 2$, nós conhecemos as distribuições bidimensionais da v.a. $(X(t_1), X(t_2)), t_1, t_2 \in \mathcal{T}$, e assim por diante. As funções de distribuição (2.1) devem satisfazer às duas condições seguintes:

(i)(*Condição de simetria*): para qualquer permutação $j_1, \ldots, j_n$, dos índices $1, 2, \ldots, n$, temos

$$F(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}; t_{j_1}, \ldots, t_{j_n}) = F(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n). \tag{2.2}$$

(ii)(*Condição de compatibilidade*): para $m < n$,

$$F(x_1, \ldots, x_m, \infty, \ldots, \infty; t_1, \ldots, t_m, \ldots, t_n) = F(x_1, \ldots, x_m; t_1, \ldots, t_m). \tag{2.3}$$

O lado esquerdo de (2.3) deve ser entendido como

$$\lim_{x_{m+1}, \ldots, x_n \to \infty} F(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n).$$

Pode-se demonstrar que qualquer conjunto de funções de distribuição da forma (2.1), satisfazendo as condições (2.2) e (2.3), define um processo estocástico $X(t)$ sobre $\mathcal{T}$. Este resultado é conhecido como o teorema da extensão de Kolmogorov.

Contudo, o conhecimento de todas essas distribuições finito-dimensionais é muito difícil de ocorrer na prática, senão impossível. O que se faz é estudar certas características associadas a (2.1) e que sejam simples de calcular e interpretar. Consideremos os momentos de ordem n das v.a.'s $X(t_1), \ldots, X(t_n)$, para qualquer $n \geq 1$, ou seja,

$$\begin{aligned}\mu(r_1, \ldots, r_n; t_1, \ldots, t_n) &= E\{X^{r_1}(t_1) \cdots X^{r_n}(t_n)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n} dF(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n).\end{aligned} \tag{2.4}$$

A função média:

$$\mu(t) = E(X(t))$$

A função de autocovariancia (facv) de X é:

$$\gamma(t_1, t^2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} - E\{X(t_1)\}E\{X(t_2)\}$$

se $t_1 = t_2 = t$,

$$\gamma(t, t) = var\{X(t)\} = E\{X(t)^2\} - E^2\{X(t)\}$$

A função de auto-correlação (fac) de X é:

$$\rho(t_1,t_2) = \gamma(t_1, t_2)/(\gamma(t_1, t_1)\ \gamma(t_2, t_2))^{1/2}$$

A função de covariancia cruzada entre X e Y é:

$$\gamma_{xy}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)Y(t_2)\} - E\{X(t_1)\}E\{Y(t_2)\}$$

A função de correlação cruzada entre X e Y é:

$$\rho_{xy}(t_1,t_2) = \gamma_{xy}(t_1, t_2)/(\gamma_x(t_1, t_1)\ \gamma_y(t_2, t_2))^{1/2}$$

Observemos, também, que na prática, teremos que estimar as quantidades $\mu(t)$, $\sigma^2(t)$ e $\gamma(t_1, t_2)$. Observando a Figura 2.2, vemos que uma maneira de fazê-lo é considerar um número m de trajetórias $X^{(1)}(t), \ldots, X^{(m)}(t)$ e utilizá-las para estimar os parâmetros acima. Por exemplo, podemos estimar a média no instante t por

$$\hat{\mu}(t) = \frac{X^{(1)}(t) + \ldots + X^{(m)}(t)}{m}.$$

O problema que surge é que usualmente temos uma só trajetória do processo, observada entre dois instantes de tempo.

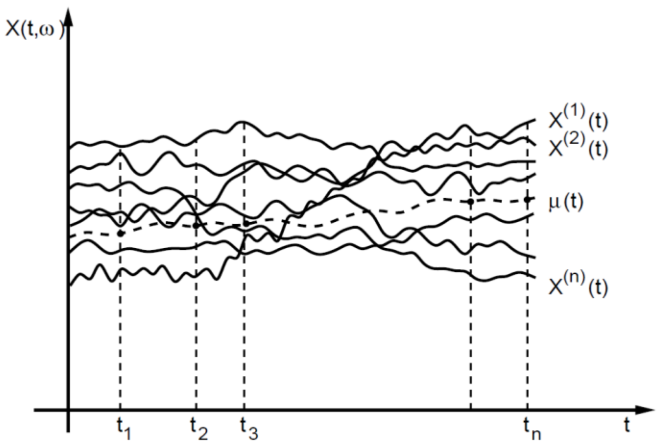

Figura 2.2: Processo estocástico como uma família de trajetórias

3. Processos estacionários

Séries estacionárias são aquelas que desenvolvem no tempo ao redor de uma média constante.

Definição 2: Um processo estocástico X = {X(t), t Є T} diz-se **estritamente estacionário** se todas as distribuições finito-dimensionais permanecem as mesmas sob translações no tempo, ou seja,

$$F(X_1, \ldots, X_n; t_{1+\tau}, \ldots, t_{n+\tau}) = F(X_1, \ldots, X_n; t_1, \ldots, t_n)$$

Definição 3: Um processo estocástico $X = \{X(t), t \in T\}$ diz-se fracamente estacionário ou estacionário de segunda ordem se e somente se

a) $E\{X(t)\} = \mu(t) = \mu$, constante;

b) $E\{X(t)^2\}$ finita

c) $\gamma(t_1, t_2) = Cov\{X(t_1)X(t_2)\}$ é uma função de $|t_1 - t_2|$.

A partir de agora, estaremos interessados principalmente nesta classe de processo, que denominaremos simplesmente de processos estacionários. Note-se que, se $X(t)$ for estritamente estacionário, ele não necessita ser fracamente estacionário, pois a condição (b) da Definição 3 pode não estar satisfeita.

Um processo tal que (b) esteja satisfeita diz-se um processo de segunda ordem.

Definição 4: um processo estocástico $X = \{X(t), t \in T\}$ diz-se Gaussiano se, para qualquer conjunto $t_1, t_2, ..., t_n$ de T, as v.a. $X(t_1), ..., X(t_n)$ têm distribuição normal n-variada.

Definição 5: As séries $\{X(t), Y(t), t \in T\}$ são conjuntamente estacionárias se a covariância cruzada depende apenas de $|t_1 - t_2|$, isto é, $\gamma_{xy}(t_1, t_2) = \gamma_{xy}(|t_1 - t_2|)$.

4. Função de autocovariância

Definição 6: Uma função real K é não negativa definida se e somente se

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\, a_j\, K(\tau i-\tau j) \geq 0$$

para quaisquer números reais $a_1, \ldots, a_n$ e $\tau_{1}, \ldots, \tau_{n} \in R$.

Propriedades da Função de Autocovariância

Seja $\{X_t,\ t \in T\}$ um processo estacionário real discreto, de média zero e facv $\gamma_\tau = E\{X_t X_{t+\tau}\}$.

Proposição 1: A facv γ_τ satisfaz as seguintes propriedades:

a) $\gamma_0 > 0$;

b) $\gamma_\tau = \gamma_{-\tau}$;

c) $|\gamma_\tau| \leq \gamma_0$

d) γ_τ é não negativa definida, no sentido que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\, a_j\, \gamma_{\tau i-\tau j} \geq 0$$

para quaisquer números reais $a_1, \ldots, a_n$ e $\tau_{1}, \ldots, \tau_{n} \in R$.

Observação: a recíproca da propriedade d) também é verdadeira, isto é, dada uma função γ_τ, tendo a propriedade d), existe um processo estocástico X_t, tendo γ_τ como facv.

Tipicamente, a facv de um processo estacionário tende a zero, para $|\tau| \to \infty$.

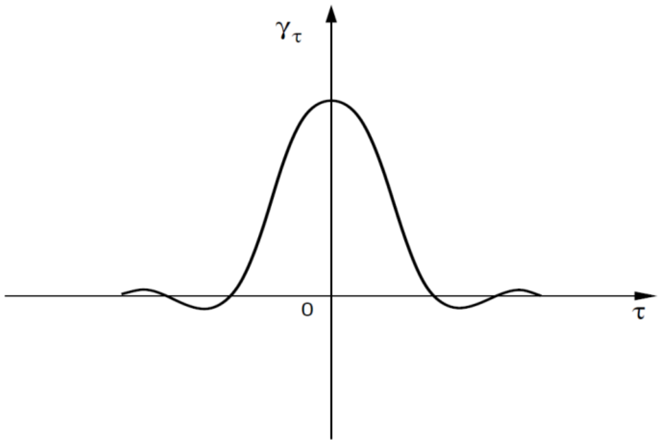

Figura 2.3: Função de autocovariância.

Teorema: uma função real definida sobre Z é a função de auto-covariância de um processo estacionário se e somente se ela for não **negativa definida e par**.

A *função de autocorrelação* (f.a.c.) do processo é definida por

$$\rho_\tau = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0}, \quad \tau \in \mathbb{Z}, \tag{2.14}$$

e tem as propriedades de γ_τ, exceto que agora $\rho_0 = 1$.

Continuidade de um processo estocástico tem que ser definida de maneira apropriada.

Definição 2.5. *Seja $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ um processo de segunda ordem. Dizemos que $X(t)$ é contínuo em média quadrática no ponto t_0 se e somente se*

$$\lim_{t \to t_0} E\{|X(t) - X(t_0)|^2\} = 0. \tag{2.15}$$

Escreveremos $X(t) \to X(t_0)$ mq.

Continuidade em mq de $X(t)$ está relacionada com continuidade da f.a.c.v. $\gamma(\tau)$.

Proposição 2.2. *Continuidade de $\gamma(\tau)$ para $\tau = 0$ implica continuidade de $\gamma(\tau)$ para todo τ.*

Proposição 2.3. *Se $\gamma(\tau)$ for contínua, então $X(t)$ é contínuo em média quadrática.*

Estimação:

Dadas observações $X_1, \ldots, X_T$, a f.a.c. ρ_j é estimada por

$$\boxed{r_j = \frac{c_j}{c_0},} \quad j = 0, 1, \ldots, T-1,$$

onde c_j é a estimativa da função de autocovariância γ_j,

$$\boxed{c_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-j} [(X_t - \overline{X})(X_{t+j} - \overline{X})],} \quad j = 0, 1, \ldots, T-1,$$

sendo $\overline{X} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} X_t$ a média amostral. Aqui, colocamos $c_{-j} = c_j$ e $r_{-j} = r_j$.

Exemplos:

Example 1.8 White Noise

A simple kind of generated series might be a collection of uncorrelated random variables, w_t, with mean 0 and finite variance σ_w^2. The time series generated from uncorrelated variables is used as a model for noise in engineering applications, where it is called *white noise*; we shall sometimes denote this process as $w_t \sim wn(0, \sigma_w^2)$. The designation white originates from the analogy with white light and indicates that all possible periodic oscillations are present with equal strength.

We will, at times, also require the noise to be independent and identically distributed (iid) random variables with mean 0 and variance σ_w^2. We shall distinguish this case by saying white independent noise, or by writing $w_t \sim \text{iid}(0, \sigma_w^2)$. A particularly useful white noise series is Gaussian white noise, wherein the w_t are independent normal random variables, with mean 0 and variance σ_w^2; or more succinctly, $w_t \sim \text{iid N}(0, \sigma_w^2)$.

Mean Function of a Moving Average Series

If w_t denotes a white noise series, then $\mu_{wt} = E(w_t) = 0$ for all t. The top series in Figure 1.8 reflects this, as the series clearly fluctuates around a mean value of zero. Smoothing the series as in Example 1.9 does not change the mean because we can write

$$\mu_{vt} = E(v_t) = \tfrac{1}{3}[E(w_{t-1}) + E(w_t) + E(w_{t+1})] = 0.$$

$$v_t = \tfrac{1}{3}\left(w_{t-1} + w_t + w_{t+1}\right),$$

Autocovariance of White Noise

The white noise series w_t has $E(w_t) = 0$ and

$$\gamma_w(s,t) = \operatorname{cov}(w_s, w_t) = \begin{cases} \sigma_w^2 & s = t, \\ 0 & s \neq t. \end{cases} \tag{1.12}$$

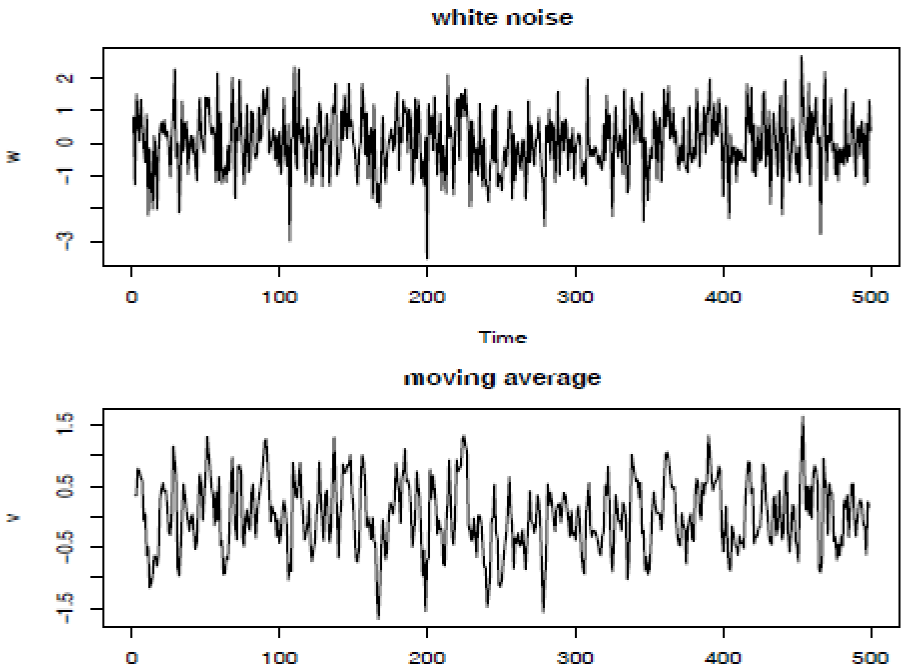

Fig. 1.8. Gaussian white noise series (top) and three-point moving average of the Gaussian white noise series (bottom).

Autocovariance of a Moving Average

Consider applying a three-point moving average to the white noise series w_t of the previous example as in Example 1.9. In this case,

$$\gamma_v(s,t) = \text{cov}(v_s, v_t) = \text{cov}\left\{\tfrac{1}{3}\left(w_{s-1}+w_s+w_{s+1}\right), \tfrac{1}{3}\left(w_{t-1}+w_t+w_{t+1}\right)\right\}.$$

When $s = t$ we have[3]

$$\begin{aligned}\gamma_v(t,t) &= \tfrac{1}{9}\text{cov}\{(w_{t-1}+w_t+w_{t+1}), (w_{t-1}+w_t+w_{t+1})\} \\ &= \tfrac{1}{9}[\text{cov}(w_{t-1}, w_{t-1}) + \text{cov}(w_t, w_t) + \text{cov}(w_{t+1}, w_{t+1})] \\ &= \tfrac{3}{9}\sigma_w^2.\end{aligned}$$

When $s = t+1$,

$$\begin{aligned}\gamma_v(t+1,t) &= \tfrac{1}{9}\text{cov}\{(w_t+w_{t+1}+w_{t+2}), (w_{t-1}+w_t+w_{t+1})\} \\ &= \tfrac{1}{9}[\text{cov}(w_t, w_t) + \text{cov}(w_{t+1}, w_{t+1})] \\ &= \tfrac{2}{9}\sigma_w^2,\end{aligned}$$

using (1.12). Similar computations give $\gamma_v(t-1,t) = 2\sigma_w^2/9$, $\gamma_v(t+2,t) = \gamma_v(t-2,t) = \sigma_w^2/9$, and 0 when $|t-s| > 2$. We summarize the values for all s and t as

$$\gamma_v(s,t) = \begin{cases} \frac{3}{9}\sigma_w^2 & s = t, \\ \frac{2}{9}\sigma_w^2 & |s-t| = 1, \\ \frac{1}{9}\sigma_w^2 & |s-t| = 2, \\ 0 & |s-t| > 2. \end{cases} \tag{1.13}$$

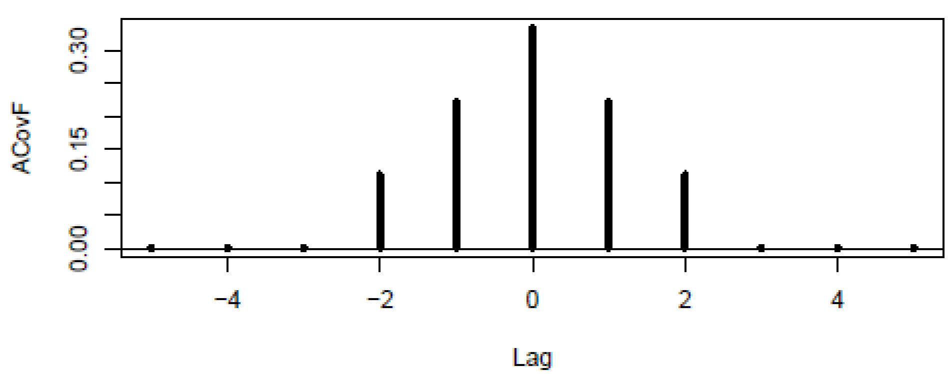

Fig. 1.12. Autocovariance function of a three-point moving average.

Example 1.11 Random Walk with Drift

A model for analyzing trend such as seen in the global temperature data in Figure 1.2, is the random walk with drift model given by

$$x_t = \delta + x_{t-1} + w_t \tag{1.3}$$

for $t = 1, 2, \ldots$, with initial condition $x_0 = 0$, and where w_t is white noise. The constant δ is called the drift, and when $\delta = 0$, (1.3) is called simply a random walk. The term random walk comes from the fact that, when $\delta = 0$, the value of the time series at time t is the value of the series at time $t - 1$ plus a completely random movement determined by w_t. Note that we may rewrite (1.3) as a cumulative sum of white noise variates. That is,

$$x_t = \delta\, t + \sum_{j=1}^{t} w_j \tag{1.4}$$

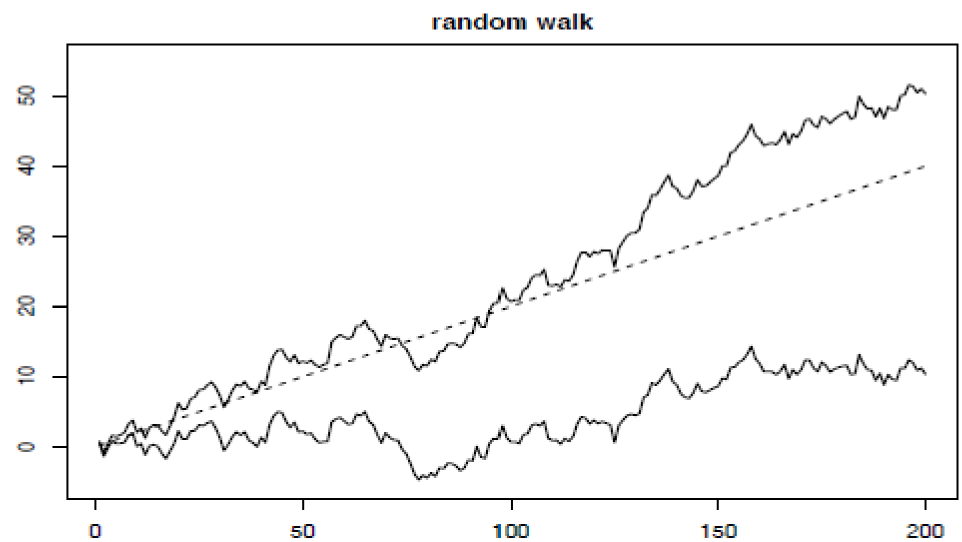

Fig. 1.10. Random walk, $\sigma_w = 1$, with drift $\delta = .2$ (upper jagged line), without drift, $\delta = 0$ (lower jagged line), and a straight line with slope .2 (dashed line).

Mean Function of a Random Walk with Drift

Consider the random walk with drift model given in (1.4),

$$x_t = \delta\, t + \sum_{j=1}^{t} w_j, \qquad t = 1, 2, \dots\ .$$

Because $E(w_t) = 0$ for all t, and δ is a constant, we have

$$\mu_{xt} = E(x_t) = \delta\, t + \sum_{j=1}^{t} E(w_j) = \delta\, t$$

Autocovariance of a Random Walk

For the random walk model, $x_t = \sum_{j=1}^{t} w_j$, we have

$$\gamma_x(s,t) = \operatorname{cov}(x_s, x_t) = \operatorname{cov}\left(\sum_{j=1}^{s} w_j, \sum_{k=1}^{t} w_k\right) = \min\{s,t\}\, \sigma_w^2,$$

Example 1.12 Signal in Noise

Many realistic models for generating time series assume an underlying signal with some consistent periodic variation, contaminated by adding a random noise. For example, it is easy to detect the regular cycle fMRI series displayed on the top of Figure 1.6. Consider the model

$$x_t = 2\cos(2\pi t/50 + .6\pi) + w_t \tag{1.5}$$

for $t = 1, 2, \dots, 500$, where the first term is regarded as the signal, shown in the upper panel of Figure 1.11. We note that a sinusoidal waveform can be written as

$$A\cos(2\pi\omega t + \phi), \tag{1.6}$$

where A is the amplitude, ω is the frequency of oscillation, and ϕ is a phase shift. In (1.5), $A = 2$, $\omega = 1/50$ (one cycle every 50 time points), and $\phi = .6\pi$.

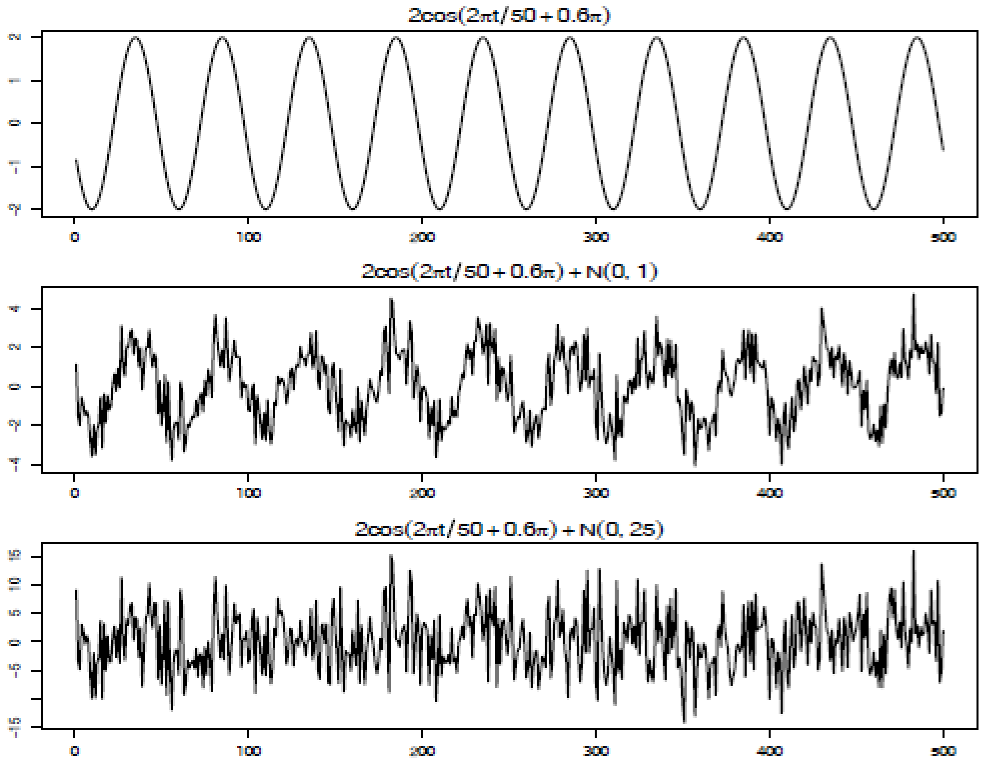

Fig. 1.11. Cosine wave with period 50 points (top panel) compared with the cosine wave contaminated with additive white Gaussian noise, $\sigma_w = 1$ (middle panel) and $\sigma_w = 5$ (bottom panel); see (1.5).

Example 1.15 Mean Function of Signal Plus Noise

A great many practical applications depend on assuming the observed data have been generated by a fixed signal waveform superimposed on a zero-mean noise process, leading to an additive signal model of the form (1.5). It is clear, because the signal in (1.5) is a fixed function of time, we will have

$$\begin{aligned}\mu_{xt} \;=\; E(x_t) &= E\big[2\cos(2\pi t/50 + .6\pi) + w_t\big] \\ &= 2\cos(2\pi t/50 + .6\pi) + E(w_t) \\ &= 2\cos(2\pi t/50 + .6\pi),\end{aligned}$$

and the mean function is just the cosine wave.

Example 1.10 Autoregressions

Suppose we consider the white noise series w_t of Example 1.8 as input and calculate the output using the second-order equation

$$x_t = x_{t-1} - .9x_{t-2} + w_t \tag{1.2}$$

successively for $t = 1, 2, \ldots, 500$. Equation (1.2) represents a regression or prediction of the current value x_t of a time series as a function of the past two values of the series, and, hence, the term autoregression is suggested

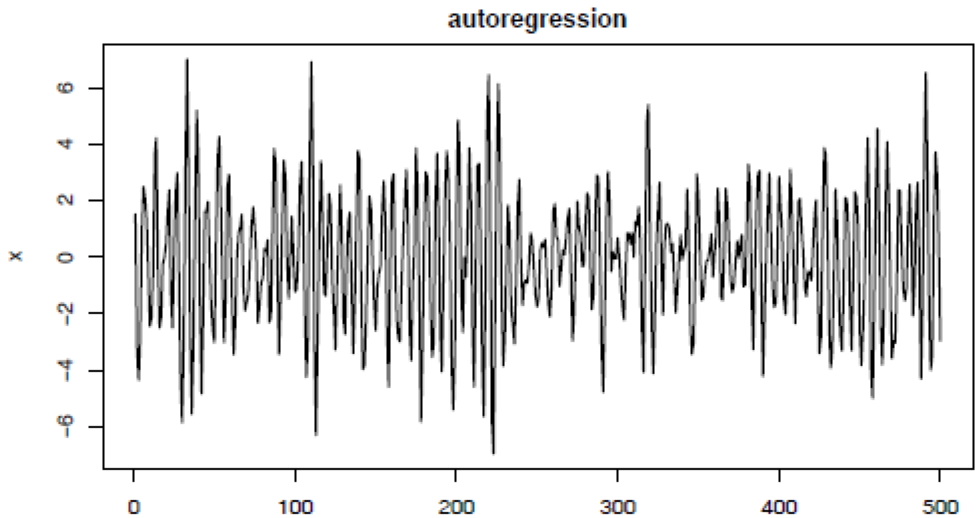

Fig. 1.9. Autoregressive series generated from model (1.2).

Example 1.21 Joint Stationarity

Consider the two series, x_t and y_t, formed from the sum and difference of two successive values of a white noise process, say,

$$x_t = w_t + w_{t-1}$$

and

$$y_t = w_t - w_{t-1},$$

where w_t are independent random variables with zero means and variance σ_w^2. It is easy to show that $\gamma_x(0) = \gamma_y(0) = 2\sigma_w^2$ and $\gamma_x(1) = \gamma_x(-1) = \sigma_w^2, \gamma_y(1) = \gamma_y(-1) = -\sigma_w^2$. Also,

$$\gamma_{xy}(1) = \text{cov}(x_{t+1}, y_t) = \text{cov}(w_{t+1} + w_t, w_t - w_{t-1}) = \sigma_w^2$$

because only one term is nonzero (recall footnote 3 on page 20). Similarly, $\gamma_{xy}(0) = 0, \gamma_{xy}(-1) = -\sigma_w^2$. We obtain, using (1.27),

$$\rho_{xy}(h) = \begin{cases} 0 & h = 0, \\ 1/2 & h = 1, \\ -1/2 & h = -1, \\ 0 & |h| \geq 2. \end{cases}$$

Clearly, the autocovariance and cross-covariance functions depend only on the lag separation, h, so the series are jointly stationary.

5. Processos Estocásticos Complexos

Em algumas situações é conveniente considerar processos estocásticos complexos, isto é, temos uma família $\{X(t), t \in T\}$, onde para cada $t \in T$, $X(t)$ é uma v.a. complexa. Ou seja, podemos escrever

$$X(t) = Y(t) + iZ(t),$$

onde $Y(t)$ e $Z(t)$ são processos estocásticos reais.

Neste caso, $X(t)$ estará especificado se conhecermos as funções de distribuição das 2n v.a. reais $Y(t_1), \ldots, Y(t_n)$, $Z(t_1), \ldots, Z(t_n)$, para qualquer conjunto $t_1, \ldots, t_n$ de T .

Definimos a média de $X(t)$ por

$$E\{X(t)\} = E\{Y(t)\} + iE\{Z(t)\}, \tag{2.16}$$

e a variância por

$$\mathrm{Var}\{X(t)\} = E\{|X(t) - E\{X(t)\}|^2\}. \tag{2.17}$$

Vemos, pois, que a média é um número complexo, mas a variância é um número real. A f.a.c.v. de $X(t)$ é definida por

$$\gamma(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - E\{X(t_1)\}]\overline{[X(t_2) - E\{X(t_2)\}]}\}, \tag{2.18}$$

para $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$.

Se o processo complexo $X(t)$ for estacionário, então (2.16) e (2.17) serão constantes (a primeira complexa e a segunda real) e a f.a.c.v. (2.18) dependerá apenas de $|t_1 - t_2|$, de modo que podemos escrever

$$\gamma(\tau) = E\{X(t+\tau)\overline{X(t)}\}, \tag{2.19}$$

supondo a média zero. As propriedades de $\gamma(\tau)$ no caso real, são facilmente adaptadas para o caso complexo.