Séries Temporais Financeiras

Aula 05

Propriedades da Função de Autocovariância

Seja $\{X_t, t \in Z\}$ um processo estacionário real com tempo discreto, de média zero e f.a.c.v. $\gamma_\tau = E\{X_t X_{t+\tau}\}$.

Proposição 2.1. *A f.a.c.v. γ_τ satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\gamma_0 > 0$,

(ii) $\gamma_{-\tau} = \gamma_\tau$,

(iii) $|\gamma_\tau| \leq \gamma_0$,

(iv) γ_τ *é não negativa definida, no sentido que*

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j a_k \gamma_{\tau_j - \tau_k} \geq 0, \tag{2.13}$$

para quaisquer números reais $a_1, \ldots, a_n$, e $\tau_1, \ldots, \tau_n$ de Z.

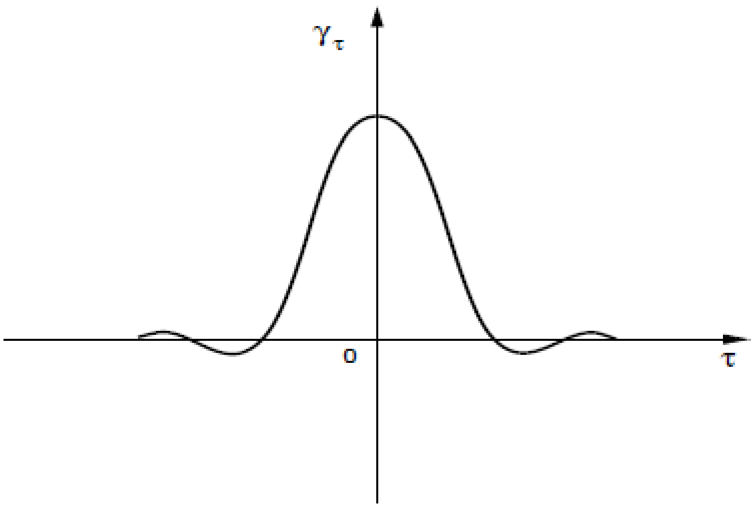

Figura 2.3: Função de autocovariância

A *função de autocorrelação* (f.a.c.) do processo é definida por

$$\rho_\tau = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0}, \quad \tau \in Z, \tag{2.14}$$

e tem as propriedades de γ_τ, exceto que agora $\rho_0 = 1$.

Dadas observações $X_1, \ldots, X_T$, a f.a.c. ρ_j é estimada por

$$r_j = \frac{c_j}{c_0}, \quad j = 0, 1, \ldots, T-1,$$

onde c_j é a estimativa da função de autocovariância γ_j,

$$c_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-j}[(X_t - \overline{X})(X_{t+j} - \overline{X})], \quad j = 0, 1, \ldots, T-1,$$

sendo $\overline{X} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t$ a média amostral. Aqui, colocamos $c_{-j} = c_j$ e $r_{-j} = r_j$.

Processos Lineares Estacionários

Exemplo 2.1. *Sequência Aleatória*

Consideremos $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ uma seqüência de v.a. definidas no mesmo espaço amostral Ω. Aqui, $\mathcal{T} = \{1, 2, \ldots\}$ e temos um processo com parâmetro discreto, ou uma sequência aleatória. Para todo $n \geq 1$, podemos escrever

$$\begin{aligned} &P\{X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n\} = P\{X_1 = a_1\} \times P\{X_2 = a_2 | X_1 = a_1\} \\ &\times \ldots \times P\{X_n = a_n | X_1 = a_1, \ldots, X_{n-1} = a_{n-1}\}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Em (2.20), os a_j's representam estados do processo e o espaço dos estados pode ser tomado como o conjunto dos reais. O caso mais simples é aquele em que temos uma sequência $\{X_n, n \geq 1\}$ de v.a. *mutuamente independentes* e neste caso (2.20) fica

$$P\{X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n\} = P\{X_1 = a_1\} \ldots P\{X_n = a_n\}. \tag{2.21}$$

Se as v.a. $X_1, X_2, \ldots$ tiverem todas a mesma distribuição, teremos, então, uma sequência de v.a. independentes e identicamente distribuídas(i.i.d., brevemente).

Neste caso, o processo X_n é estacionário. Se $E\{X_n\} = \mu, \mathrm{Var}\{X_n\} = \sigma^2$, para todo $n \geq 1$, então

$$\gamma_\tau = \mathrm{Cov}\{X_n, X_{n+\tau}\} = \begin{cases} \sigma^2, & \text{se } \tau = 0 \\ 0, & \text{se } \tau \neq 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

Segue-se que $\rho_\tau = 1$, para $\tau = 0$ e $\rho_\tau = 0$, caso contrário.

Definição 2.6. *Dizemos que* $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$ *é um ruído branco com tempo discreto se as v.a.* ε_t *são não correlacionadas, isto é,* $\text{Cov}\{\varepsilon_t, \varepsilon_s\} = 0, t \neq s$.

Um tal processo será estacionário se $E\{\varepsilon_t\} = \mu$ e $\text{Var}\{\varepsilon_t\} = \sigma^2$, para todo t. Segue-se que a f.a.c.v. de ε_t é dada por (2.22).

Obviamente, se as v.a. ε_t são independentes, elas também serão não correlacionadas. Uma sequência de v.a. i.i.d., como definida acima, é chamada um *processo puramente aleatório* ou *ruído branco forte*. O que definimos como ruído branco, seria chamado *ruído branco fraco*. Contudo, usaremos simplesmente a nomenclatura da definição 2.6.

Ilustramos na Figura 2.4 a função de autocorrelação de um ruído branco. De agora em diante vamos reservar a notação $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$ para um ruído branco com tempo discreto e iremos supor que $\mu = 0$. Escreveremos, brevemente,

$$\varepsilon_t \quad \sim \quad \text{RB}(0, \sigma^2).$$

No caso de um processo puramente aleatório, escreveremos

$$\varepsilon_t \quad \sim \quad \text{i.i.d. } (0, \sigma^2).$$

$$\varepsilon_t \quad \sim \quad \text{i.i.d. } (0, \sigma^2).$$

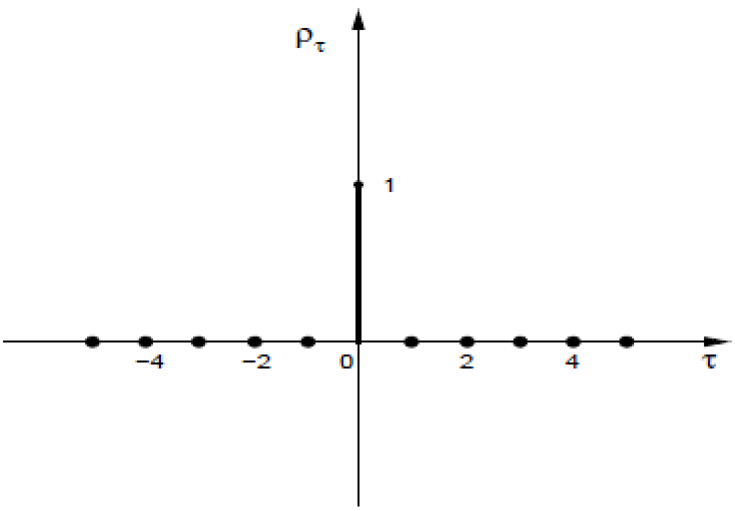

Figura 2.4: F.a.c. de um ruído branco

2.5.1 Processos Autorregressivos

Dizemos que $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ é um processo autorregressivo de ordem p, e escrevemos $X_t \sim AR(p)$, se satisfizer à equação de diferenças

$$X_t - \mu = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \phi_2(X_{t-2} - \mu) + \ldots + \phi_p(X_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t, \qquad (2.23)$$

onde $\mu, \phi_1, \ldots, \phi_p$ são parâmetros reais e $\varepsilon_t \sim \mathrm{RB}(0, \sigma^2)$. Segue-se que $E(X_t) = \mu$ e se escrevermos o processo na forma

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t,$$

então

$$\mu = E(X_t) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \ldots - \phi_p}.$$

Definamos o operador retroativo B por meio de $B^s X_t = X_{t-s}, s \geq 1$. Então (2.23) pode ser escrita

$$\phi(B)\tilde{X}_t = \varepsilon_t, \qquad (2.24)$$

onde $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p$ é o operador autoregressivo de ordem p e $\tilde{X}_t = X_t - \mu$. Aqui, 1 representa o operador identidade. Suponha $\mu = 0$ no que segue.

Um caso particular importante é o processo AR(1),

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t. \qquad (2.25)$$

Aqui, $\phi(B) = 1 - \phi B$. Por meio de substituições sucessivas obtemos

$$X_t = \sum_{j=0}^{r} \phi^j \varepsilon_{t-j} + \phi^{r+1} X_{t-r-1}.$$

Se X_t for estacionário, com variância finita σ_X^2, então

$$E[X_t - \sum_{j=0}^{r} \phi^j \varepsilon_{t-j}]^2 = \phi^{2r+2} E[X_{t-r-1}^2] = \phi^{2r+2}\sigma_X^2.$$

Se $|\phi| < 1$, $\phi^{2(r+1)} \to 0$, quando $r \to \infty$, portanto, sob esta suposição, podemos escrever

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}, \qquad (2.26)$$

onde a convergência é em média quadrática. Logo, a condição $|\phi| < 1$ é suficiente para X_t ser estacionário. Multiplicando ambos os membros de (2.25) por $X_{t-\tau}$, e tomando a esperança, obtemos

$$\gamma_\tau = \phi\gamma_{\tau-1} = \ldots = \phi^\tau \gamma_0.$$

Mas, de (2.26), obtemos

$$\gamma_0 = \sigma_X^2 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}, \tag{2.27}$$

do que segue

$$\gamma_\tau = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\phi^\tau \ , \quad \tau \geq 0.$$

Como γ_τ é simétrica, podemos escrever finalmente a f.a.c.v. de um processo AR(1) como

$$\gamma_\tau = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\phi^{|\tau|}, \quad \tau \in \mathbb{Z}. \tag{2.28}$$

A f.a.c. de X_t é obtida de (2.28), ou seja,

$$\rho_\tau = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0} = \phi^{|\tau|} \ , \quad \tau \in \mathbb{Z}. \tag{2.29}$$

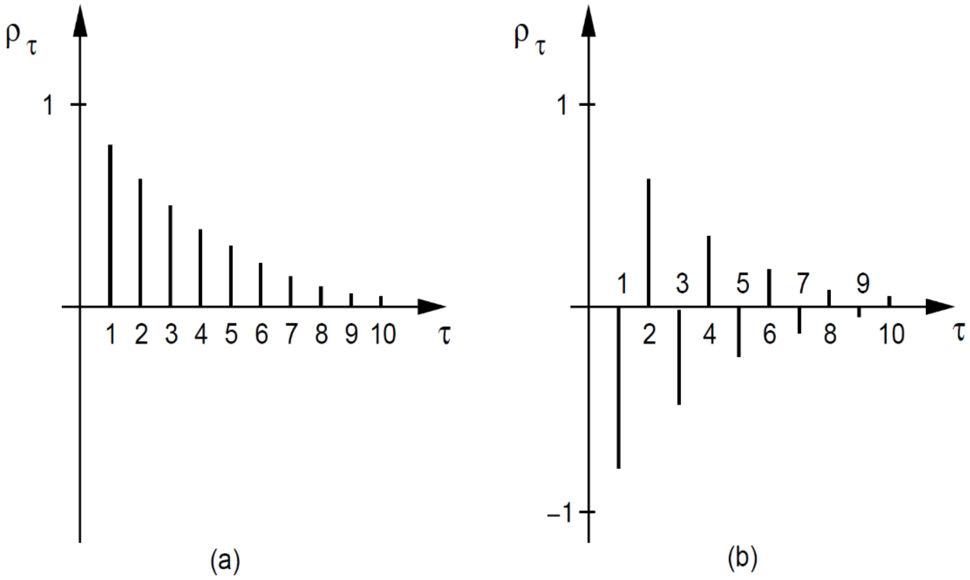

Figura 2.5: F.a.c. de um processo AR(1): (a) $\phi = 0,8$ (b) $\phi = -0,8$.

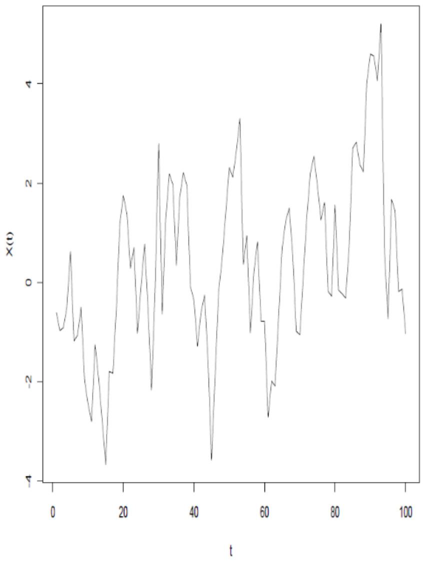

Figura 2.6: Processo AR(1) simulado, $\phi = 0,8$.

Procuremos solução para (2.23) na forma (2.26), isto é,

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}. \tag{2.30}$$

De (2.24), temos formalmente,

$$X_t = \phi(B)^{-1}\varepsilon_t = \psi(B)\varepsilon_t,$$

onde $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \ldots$. Em analogia com o caso AR(1), devemos ter $\sum_j \psi_j^2 < \infty$ para que (2.30) seja uma solução estacionária. Como $\phi(B)\psi(B) = 1$, os coeficientes ψ_j podem ser obtidos desta identidade, em função dos ϕ_j's.

Pode-se demonstrar (ver Box et al., 1994) que *a condição para que X_t seja estacionário é que todas as raízes de $\phi(B) = 0$ estejam fora do círculo unitário*. Em particular, para $p = 1$, $\phi(B) = 1 - \phi B = 0$ implica $B = \phi^{-1}$ e a condição enunciada acarreta $|\phi| < 1$.

Supondo o processo estacionário, multiplicando-se ambos os membros de (2.23) por $X_{t-\tau}$ e tomando valores esperados, obtemos

$$\sigma_X^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \ldots - \phi_p\rho_p}\,, \quad \text{para} \quad \tau = 0, \tag{2.31}$$

$$\gamma_\tau = \phi_1\gamma_{\tau-1} + \phi_2\gamma_{\tau-2} + \ldots + \phi_p\gamma_{\tau-p}\,, \quad \text{para} \quad \tau > 0. \tag{2.32}$$

A mesma equação de diferenças é satisfeita por ρ_τ, bastando dividir todos os termos de (2.32) por γ_0.

A solução geral desta equação é dada por (Miller, 1969)

$$\gamma_\tau = A_1 G_1^\tau + A_2 G_2^\tau + \ldots + A_p G_p^\tau, \tag{2.33}$$

onde os G_i's satisfazem

$$\phi(B) = \prod_{i=1}^{p}(1 - G_i B).$$

Como as raízes de $\phi(B) = 0$ devem estar fora do círculo unitário, devemos ter que $|G_i| < 1$, para todo $i = 1, \ldots, p$.

Se fizermos $\tau = 1, 2, \ldots, p$ em (2.32), obtemos

$$\mathbf{\Gamma}_p \boldsymbol{\phi}_p = \boldsymbol{\gamma}_p, \tag{2.34}$$

onde $\mathbf{\Gamma}_p = [\gamma_{ij}]$, com $\gamma_{ij} = \gamma_{|i-j|}$,$i, j = 1, \ldots, p$, $\boldsymbol{\phi}_p = (\phi_1, \ldots, \phi_p)'$ e $\boldsymbol{\gamma}_p = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p)'$.

A equação (2.34) pode ser utilizada para obter estimadores dos parâmetros ϕ_j's, substituindo-se as f.a.c.v.'s por suas estimativas. Esses estimadores são chamados *estimadores de Yule-Walker.*

Uma análise de (2.33) nos permite concluir que a f.a.c.v. de um processo autorregressivo de ordem p é uma mistura de exponenciais (correspondentes às raízes G_i reais) e/ou senoides (correspondentes a pares de raízes complexas conjugadas) amortecidas.

Na Figura 2.7 temos as f.a.c.'s de dois processos AR(2), um com $\phi_1 = 0,5, \phi_2 = 0,3$ e outro com $\phi_1 = 1,0, \phi_2 = -0,89$.

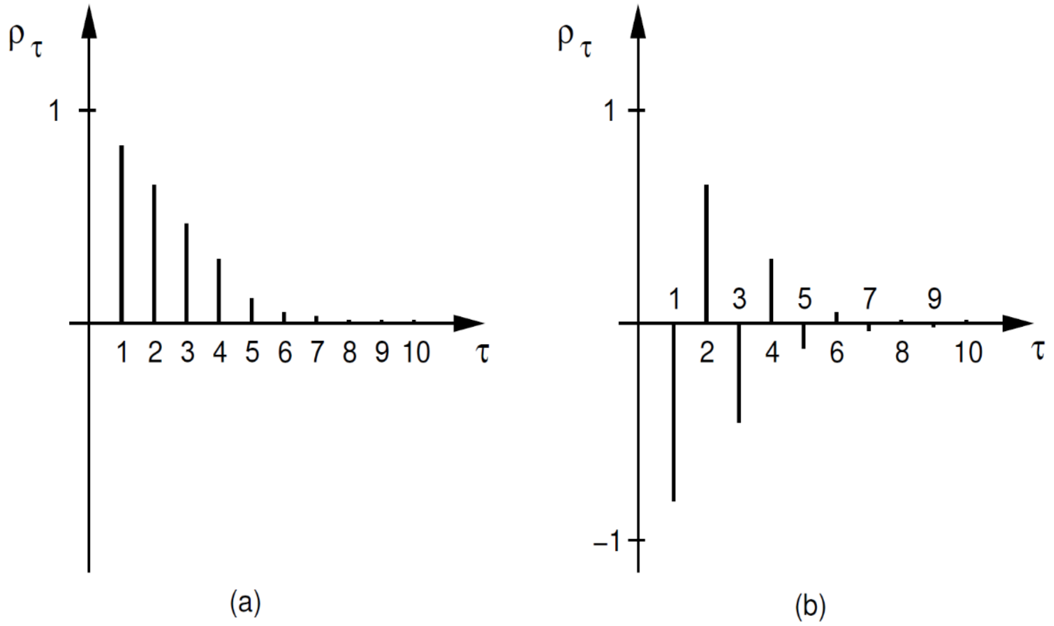

Figura 2.7: F.a.c. de dois processos AR(2) (a)$\phi_1 = 0,5,\ \phi_2 = 0,3$ (b) $\phi_1 = 1,0,\ \phi_2 = -0,89$.

2.5.2 Processos de Médias Móveis

Dizemos que $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ é um processo de médias móveis de ordem q, denotado por MA(q), se satisfizer à equação de diferenças

$$X_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \tag{2.35}$$

onde $\mu, \theta_1, \ldots, \theta_q$ são constantes reais e $\varepsilon_t \sim \mathrm{RB}(0, \sigma^2)$.

Segue-se que X_t é estacionário, de média μ e, como os ε_t são não correlacionados, podemos obter facilmente a variância do processo,

$$\sigma_X^2 = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \ldots + \theta_q^2). \tag{2.36}$$

Suponha $\mu = 0$. Quanto à f.a.c.v., temos

$$\gamma_\tau = E\{X_t X_{t-\tau}\} = \gamma_\varepsilon(\tau) - \sum_{k=1}^{q} \theta_k \gamma_\varepsilon(k - \tau)$$

$$- \sum_{\ell=1}^{q} \theta_\ell \gamma_\varepsilon(\tau + \ell) + \sum_{k=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{q} \theta_k \theta_\ell \gamma_\varepsilon(\tau + \ell - k),$$

onde $\mu, \theta_1, \ldots, \theta_q$ são constantes reais e $\varepsilon_t \sim \mathrm{RB}(0, \sigma^2)$.

Segue-se que X_t é estacionário, de média μ e, como os ε_t são não correlacionados, podemos obter facilmente a variância do processo,

$$\sigma_X^2 = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \ldots + \theta_q^2). \tag{2.36}$$

Suponha $\mu = 0$. Quanto à f.a.c.v., temos

$$\gamma_\tau = E\{X_t X_{t-\tau}\} = \gamma_\varepsilon(\tau) - \sum_{k=1}^{q} \theta_k \gamma_\varepsilon(k-\tau)$$

$$-\sum_{\ell=1}^{q} \theta_\ell \gamma_\varepsilon(\tau+\ell) + \sum_{k=1}^{q}\sum_{\ell=1}^{q} \theta_k \theta_\ell \gamma_\varepsilon(\tau+\ell-k),$$

onde estamos denotando por $\gamma_\varepsilon(\tau)$ a f.a.c.v. de ε_t. Resulta, então,

$$\gamma_\tau = \begin{cases} \sigma^2(-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \ldots + \theta_q\theta_{q-\tau}), & \text{se } \tau = 1,\ldots,\text{q} \\ 0, & \text{se } \tau > q \\ \gamma_{-\tau}, & \text{se } \tau < 0. \end{cases} \tag{2.37}$$

De (2.36) e (2.37) obtemos a f.a.c. do processo MA(q):

$$\rho_\tau = \begin{cases} \frac{-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \ldots + \theta_q\theta_{q-\tau}}{1+\theta_1^2+\ldots+\theta_q^2}, & \text{se } \tau = 1,\ldots,q \\ 0, & \text{se } \tau > q \\ \rho_{-\tau}, & \text{se } \tau < 0. \end{cases} \tag{2.38}$$

Observamos, então, que a f.a.c.v. (ou a f.a.c.) de um processo MA(q) anula-se para $|\tau| > q$. Em particular, para um processo $\boxed{\text{MA}(1)}$,

$$X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}, \tag{2.39}$$

obtemos

$$\text{Var}(X_t) = \sigma_X^2 = \sigma^2(1+\theta^2),$$

$$\rho_\tau = \begin{cases} \frac{-\theta}{1+\theta^2}, & \text{se } \tau = \pm 1 \\ 0, & \text{se } |\tau| > 1. \end{cases} \tag{2.40}$$

Definindo-se o operador de médias móveis de ordem q por

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q$$

o processo (2.35) pode ser escrito

$$X_t = \theta(B)\varepsilon_t. \tag{2.41}$$

Em particular, para o processo MA(1) temos $\boxed{\theta(B) = 1 - \theta B}$, de modo que podemos escrever

$$X_t = (1-\theta B)\varepsilon_t$$

de onde, formalmente, segue

$$\varepsilon_t = (1 - \theta B)^{-1} X_t = (1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \ldots) X_t,$$

ou seja, temos

$$X_t = -\theta X_{t-1} - \theta^2 X_{t-2} - \ldots + \varepsilon_t, \tag{2.42}$$

se $|\theta| < 1$, para que a série do lado direito de (2.42) convirja. Nesta equação, temos X_t escrito como um processo autoregressivo de ordem infinita. Dizemos que $|\theta| < 1$ é uma *condição de invertibilidade* para o processo MA(1).

De modo geral, o processo (2.35) poderá ser escrito na forma

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j} + \varepsilon_t, \tag{2.43}$$

se a seguinte condição de invertibilidade estiver satisfeita: *todas as raízes de* $\theta(B) = 0$ *devem estar fora do círculo unitário.* Ver Box et al. (1994) para detalhes.

A relação (2.43) pode ser escrita

$$\pi(B) X_t = \varepsilon_t, \tag{2.44}$$

onde $\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \ldots$, de modo que $\pi(B) = \theta(B)^{-1}$. Portanto, os coeficientes π_j podem ser obtidos da identidade $\theta(B)\pi(B) = 1$.

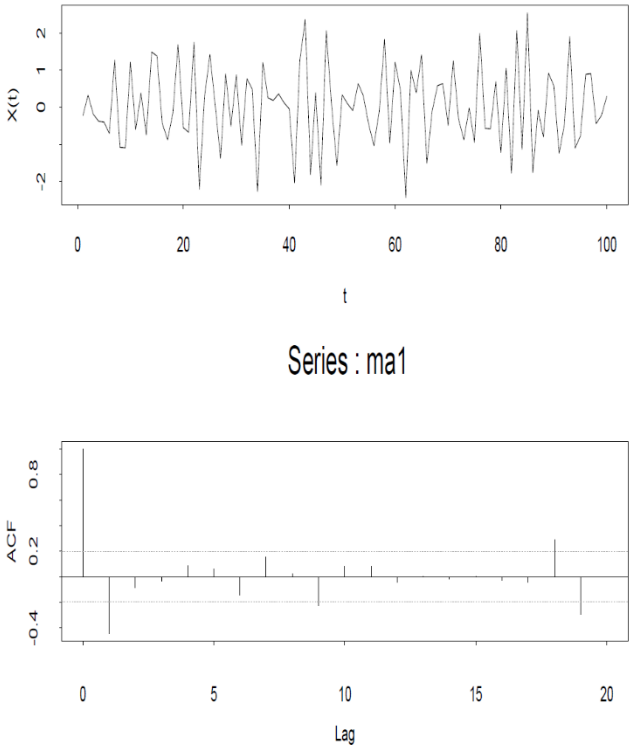

Figura 2.8: Processo MA(1) simulado, $\theta = 0,8$ e f.a.c.

2.5.3 Processos Autorregressivos e de Médias Móveis

Um processo autorregressivo e de médias móveis, de ordem (p, q), denotado por ARMA(p,q), é definido por

$$X_t - \mu = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \ldots + \phi_p(X_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q\varepsilon_{t-q}, \quad (2.46)$$

onde $\varepsilon_t \sim \text{RB}(0, \sigma^2)$. Segue-se que a média do processo é μ. Usando os operadores autorregressivo e de médias móveis, definidos anteriormente, podemos escrever (2.46) na forma

$$\phi(B)\tilde{X}_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad (2.47)$$

onde $\tilde{X}_t = X_t - \mu$. Suponha que, a partir de agora, $\mu = 0$.

Um modelo frequentemente usado é o ARMA(1,1), ou seja,

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}. \quad (2.48)$$

Para um processo ARMA(p,q) genérico, a condição de estacionariedade é a mesma que para processos AR(p), ou seja, as raízes de $\phi(B) = 0$ devem estar fora do círculo unitário, e a condição de invertibilidade é a mesma que para processos MA(q), ou seja, as raízes de $\theta(B) = 0$ devem estar fora do círculo unitário.

Multiplicando-se (2.46), com $\mu = 0$, por $X_{t-\tau}$ e tomando-se esperanças, obtemos

$$\begin{aligned}\gamma_\tau = {} & \phi_1\gamma_{\tau-1} + \phi_2\gamma_{\tau-2} + \ldots + \phi_p\gamma_{\tau-p} + \gamma_{X\varepsilon}(\tau) \\ & -\theta_1\gamma_{X\varepsilon}(\tau-1) - \ldots - \theta_q\gamma_{X\varepsilon}(\tau-q),\end{aligned} \tag{2.49}$$

onde $\gamma_{X\varepsilon}(\tau)$ é a covariância cruzada entre X_t e ε_t, definida por

$$\gamma_{X\varepsilon}(\tau) = E(\varepsilon_t X_{t-\tau}).$$

Como $X_{t-\tau}$ só depende de choques ε_t ocorridos até o instante $t-\tau$, temos que esta covariância cruzada só é diferente de zero para $\tau \leq 0$, logo

$$\gamma_\tau = \phi_1\gamma_{\tau-1} + \phi_2\gamma_{\tau-2} + \ldots + \phi_p\gamma_{\tau-p}\,, \quad \tau > q. \tag{2.50}$$

A conclusão é que as autocovariâncias (e, portanto, as autocorrelações, que satisfazem equação similar) de lags $1, 2, \ldots, q$ serão afetadas pelos parâmetros de médias móveis, mas para $\tau > q$, as mesmas comportam-se como nos modelos autorregressivos.

Modelo ARMA(1,1)

Para o caso do modelo (2.48), obtemos facilmente

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(1-\phi\theta)(\phi-\theta)}{1+\theta^2-2\phi\theta}$$

e, para $\tau > 1$,

$$\rho_\tau = \phi\rho_{\tau-1}.$$

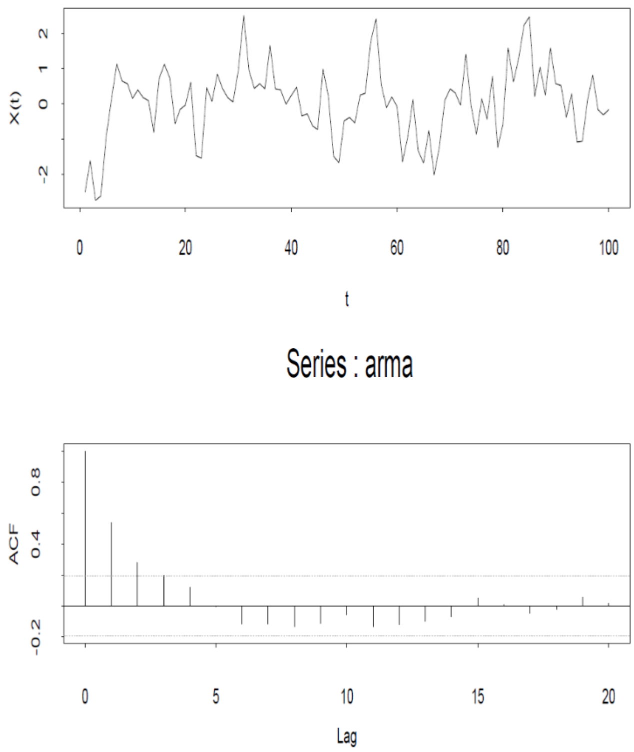

Figura 2.9: Processo ARMA(1,1) simulado, $\phi = 0,8, \theta = 0,3$ e f.a.c.

Exemplo 2.3. *Processo Linear Geral*

Os processos AR, MA e ARMA são casos particulares do chamado processo linear geral (PLG), que pode ser expresso na forma

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \tag{2.51}$$

onde $\varepsilon_t \sim \mathrm{RB}(0, \sigma^2)$ e ψ_j são constantes satisfazendo $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$. Essa condição implica que a variância do processo é finita e neste caso,

$$\sigma_X^2 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2. \tag{2.52}$$

Também, de (2.51), vemos que $E\{X_t\} = 0$ e para $\tau > 0$,

$$\gamma_\tau = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+\tau}, \tag{2.53}$$

admitindo-se que a série do segundo membro de (2.53) convirja para um valor finito. Mas como

$$|E\{X_t X_{t-\tau}\}| \leq [E\{X_t^2\} E\{X_{t-\tau}^2]^{1/2} < \infty,$$

usando o fato que $\sigma_X^2 < \infty$, vemos que $\gamma_\tau < \infty$ se $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$. Logo, essa é a condição de estacionariedade para o PLG.

De (2.52) e (2.53) segue-se que a f.a.c. de um PLG é dada por

$$\rho_\tau = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+\tau}}{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2}.$$

Teorema 2.1. (Wold) *Todo processo estacionário de segunda ordem, puramente não determinístico, pode ser escrito como*

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \psi_0 = 1, \tag{2.54}$$

com $\varepsilon_t \sim RB\ (0, \sigma^2)$.

Um processo diz-se puramente não determinístico se ele não puder ser previsto exatamente a partir de seu passado.