Mapa da cidade de São Paulo

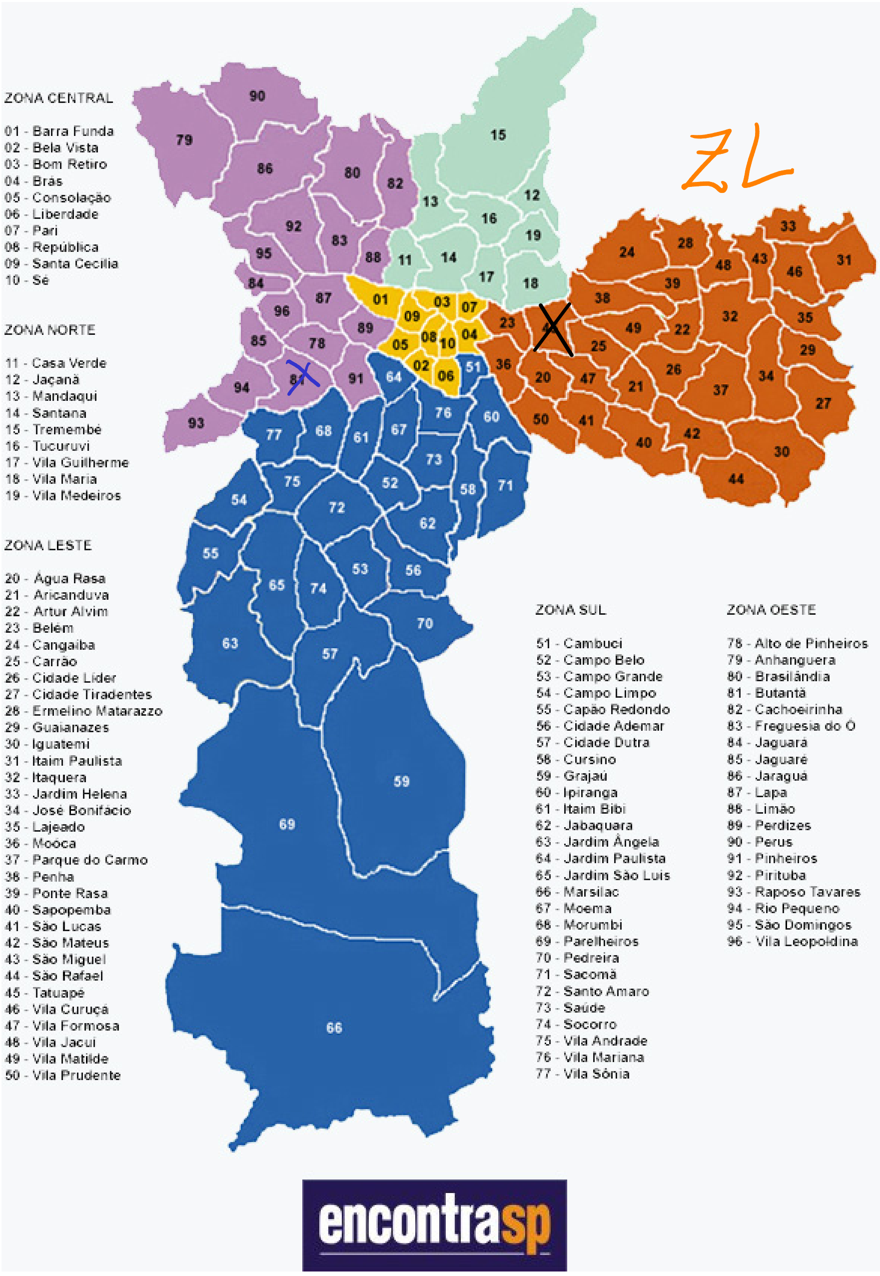


Figure 1: Fonte: Mapa de São Paulo, Mapa bairros SP - EncontraSP

Hoje: Matheus ou Sinai ganharam o concurso do fundo de tela.
Acho...

A maioria dos emojis foram copiados de Emoji Island.
Tem também emojis de NicePng, Pinterest,.

3 Reunião 03: 30/ABR/2021

3.1 Reuniões passadas

Números primos: 3, 5, 7, 11, 13, ...

Vimos uma demonstração do Teorema de Euclides

Teorema 1 (Teorema de Euclides)**.** *Existem infinitos números primos.*

Também vimos outra uma demonstração do Teorema de Euclides e conversamos sobre Números de Euclides.

Fomos apresentados ao chamado **algoritmo da divisão**:

$d = 2$

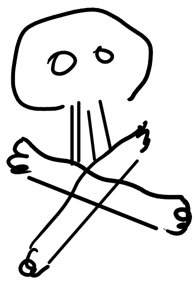
> *Sejam n e d são inteiros tais que $d > 0$.*
> *Então existe um único par de inteiros q e r tais que*
>
> $$n = q \times d + r \quad e \quad 0 \leq r < d.$$

$2q$	r
n par	0
n ímpar	1
$2q + 1$	

O número q é o **quociente** r é o **resto** da **divisão** de n por d.
Exemplos:

n d

- $2716/10 = 271 \times 10 + 6$
- $-11/7 = -2 \times 7 + 3$



```
In [1]: -11 // 7 # divisão inteira
Out[1]: -2

In [2]: -11 % 7 # resto de divisão
Out[2]: 3

In [3]: -11 == -2 * 7 + 3
Out[3]: True
```

Em programação tomem cuidado com divisão envolvendo números negativos
resultado depende da linguagem

Dizemos que a divide b (notação $a \mid b$) se $ak = b$ para algum inteiro k. C ≠ Python

3.2 Hoje

Pergunta: Quantos meses têm 28 dias?
Resposta: TODOS

Os tópicos principais de nossa reunião de hoje serão:

- proposições → afirmações → verd / falsa
- algumas demonstrações
- demonstração direta
- demonstração ⟺ →
- demonstração por contradição

se ⌒ então ⌒

⌒ se e somente se ⌒

as duas sempre juntas

bem caipirinha ⟺ vou tomar caipirinha se e somente se você tomar caipirinha

Pare, respire, relaxe e pense!

Figure 2: Fonte: depositphotos.com

3.3 Proposições

Um **proposição** ou **afirmação** é um sentença que é verdadeira ou falsa.

Para `Python` verdadeiro é `True` e false é `False`.
A propósito, utilizaremos alguns trechos de código de `Python` ao longo de MAC0105 para nos ajudar a entender as coisas. Bem, esparamos que ajude.

Exemplos de proposições

- `2 + 3 = 5`. Verd.
- `1 + 1 = 3`. Falso

Em Python

```
Python 3.8.8 | packaged by conda-forge | (default, Feb 20 2021, 1
Type 'copyright', 'credits' or 'license' for more information
IPython 7.22.0 -- An enhanced Interactive Python. Type '?' for he

In [1]: 2 + 3 == 5 # para Python igual é ==
Out[1]: True

In [2]: 1 + 1 == 3 # de depois de `#` é um cometário
Out[2]: False
```

Exemplos de não proposições

Há sentença que não são proposições:

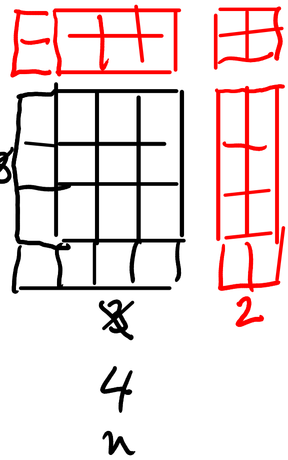
- "*Quero 10!*": não é verdadeiro ou falso
- "*Você é Sheldon Cooper?*": não é verdadeiro ou falso
- "*São 8 horas.*" : depende do momento...
- "*Corinthians será campeão brasileiro*": é ficção, especulação, ...

3.4 Algumas provas

$n^2 = 2(\;\;) + 1$

Proposição 2. *Se n é um número inteiro ímpar, então n^2 é ímpar.*

Pare, respire, relaxe e pense!



Se n é ímpar, então $n = 2q + 1$. 4

Então

$$n^2 = (2q+1)^2 = (2q+1)(2q+1)$$
$$= 4q^2 + 4q + 1$$
$$= 2(2q^2 + 2q) + 1.$$

Portanto, n^2 é ímpar. Fecho!

Prova. A demonstração é **direta**.

Se n é ímpar, então $n = 2q + 1$ para algum inteiro q.
Então,

$$n^2 = (2q+1)^2 = (2q+1)(2q+1) = 4q^2 + 2q + 2q + 1 = 4q^2 + 4q + 1$$
$$= 2(2q^2 + 2q) + 1.$$

Logo, n^2 é ímpar. □

Proposição 3. *Se n é um número inteiro par, então n^2 é par.*

se blá $\Rightarrow$ blá-blá

Pare, respire, relaxe e pense!

$= 2$

Se n é par, então $n = 2q$.

Então $n^2 = (2q)^2 = 4q^2 = 2(2q^2)$

Portanto, n^2 é par.

Prova. A demonstração é **direta**.

Se n é par, então $n = 2q$ para algum inteiro q.
Então,

$$n^2 = 2q^2 = 4q^2 = 2(2q^2).$$

Logo, n^2 é par. $\square$

Proposição 4.

$\Longrightarrow$ $\longleftrightarrow$ biconcidional

Se n é um número inteiro, então n é par $\boxed{\text{se e somente se}}$ n^2 é par.

$\Longleftarrow$ $\Longleftrightarrow$

 **Pare, respire, relaxe e pense!**

($\Longrightarrow$)

Se n é par, então pela proposição ~~2~~ 3 n^2 é par.

Agora temos que mostrar que se $\underbrace{n^2 \text{ é par}}$ então n é par.

Pela Proposição 2 sabemos que se n é impar, então n^2 é impar.

Portanto, n deve ser par,

pois se fosse impar n^2 seria impar e

// sabemos que n^2 é par

todo inteiro é par ou impar não ambos

usamos esse é ou não é não ambos

Prova. Se n é par, então da proposição 3 sabemos que n^2 é par.

Agora, devemos mostrar que se n^2 é par então n é par.

 Da proposição 2 sabemos que se n é ímpar, então n^2 é ímpar.
Como por hipótese n^2 é par, então não é possível que n seja ímpar.

Portanto, n é par.  □

Faz sentido? 

Proposição 5. *O número $\sqrt{\cancel{(}2\cancel{)}}$ é irracional.* ← apagar os parênteses em $\cancel{(}2\cancel{)}$

Um número x é **racional** se existem inteiros m e n tais que $x = \frac{m}{n}$. é int é int
Em caso contrário x é chamado de **irracional**.

Pare, respire, relaxe e pense!

$\frac{1}{5} = 0.2$

$\frac{1}{3} = 0.33333$

$$\frac{1}{7} = 0.\boxed{142857}\boxed{142857}\boxed{142857}\boxed{142857}\boxed{142857}\boxed{142857}14285714285\ldots = \frac{142857}{999999}$$

$$\sqrt{\cancel{(}2\cancel{)}} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907$$

$\frac{1}{3}$ $0.\underbrace{3}33333$ $= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{7}$ $0.\ldots\ldots$ $= \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$

Momento kinder

? MAC0210

Segundo o Python $\sqrt{(2)}$ é racional . . .

```
In [14]: 14142135623730951/10000000000000000 == math.sqrt(2)
Out[14]: True
```
←

Quero mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional

Pare, respire, relaxe e pense!

A ~~dem~~ prova é por contradição.

Suponha que $\sqrt{2}$ é racional.

Então existem inteiros m e n tais que

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \qquad \left[\ \frac{12}{18} \xrightarrow{\div 6} \frac{2}{3}\right.$$

Podemos supor que m/n é irredutível

Ou seja, não existe $\boxed{p>1}$ que divide m e divide n.

Temos que

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \implies 2 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$\implies \boxed{2n^2 = m^2} \qquad (*)$$

$$\implies m^2 \text{ é par}$$

$$\implies m \text{ é par}$$

Como m é par, então $m = 2k$, $k > 0$

Portanto de $(*)$, sabemos que

$$2n^2 = (2k)^2 \implies 2n^2 = 4k^2$$

$$\implies n^2 = 2k^2$$

$$\implies n^2 \text{ é par} \implies n \text{ é par}$$

Isso contradiz nossa escolha de m e n. ∎

Sobre frações irredutíveis

Uma fração m/n é **irredutível** se não existe inteiro $p > 1$ que divide ambos, m e n.

```
In [28]: print(Fraction(1,2))
1/2

In [29]: print(Fraction(123,246))
1/2

In [30]: print(Fraction(12353,236346))
1123/21486

In [31]: print(Fraction(12,48))
1/4

In [32]: print(Fraction(22,48))
11/24

In [33]: print(Fraction(142857,999999)) # :-)
1/7
```

Prova da proposição 5. A demonstração é **por contradição.**

Suponha que $\sqrt{\cancel{(}2\cancel{)}}$ é racional. parênteses são erro de cut-and-paste

Então existem inteiros m e n tais que

$$\sqrt{\cancel{(}2\cancel{)}} = \frac{m}{n}.$$

Podemos supor que m/n é irredutível, ou seja, não existe inteiro $p > 1$ que divide ambos, m e n.

Temos que

$$\begin{aligned}
\sqrt{\cancel{(}2\cancel{)}} = \frac{m}{n} &\Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \\
&\Rightarrow 2n^2 = m^2 && (1) \\
&\Rightarrow m^2 \text{ é par} \\
&\Rightarrow m \text{ é par.} && (2)
\end{aligned}$$

Como m é par, então $m = 2k$ para algum $k > 0$.

Portanto, de (1), temos que

$$\begin{aligned}
2n^2 = (2k)^2 &\Rightarrow 2n^2 = 4k^2 \\
&\Rightarrow n^2 = 2k^2 \\
&\Rightarrow n^2 \text{ é par.} \\
&\Rightarrow n \text{ é par.} && (3)
\end{aligned}$$

De (2) e (3), concluímos que 2 divide ambos, m e n e portanto m/n não é irredutível,

Isso contradiz a nossa escolha de m e n.  Por hoje é só $\square$