12 Reunião 12: 02/JUN/2021

Figure 1: Mafalda de Quino

12.1 Reuniões passadas

Nas reuniões passadas discutimos o assunto mais fundamental do Universo:

Princípio da Indução Finita.

Figure 2: stgabrielshuyton.net

O Princípio da Indução é útil para provar afirmações indexadas por um número natural. Pense em aplicar indução quando vir afirmações indexadas por números naturais. Seja $P(n)$ um predicado aberto em um inteiro n.

SE

1. $P(0)$ é verdadeiro, E (**base**)
2. para todo $n \geq 0$ temos que $P(n) \implies P(n+1)$ (**passo**)

ENTÃO,

$P(n)$ é verdadeiro para todo inteiro $n \geq 0$. (**conclusão**)

Exemplo 1. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

Figure 3: Fonte: Pinterest

O **passo inicial** ou **base não** precisa ser provar que $P(0)$ ou $P(1)$ é verdadeiro.

SE

1. $P(b)$ é verdadeiro, $b \in \mathbb{Z}$, E (**base**)
2. para todo $n \geq b$ temos que $P(n) \implies P(n+1)$ (**passo**)

ENTÃO,

$P(n)$ é verdadeiro para todo inteiro $n \geq b$. (**conclusão**)

Exemplo 2. *Para todo inteiro $n \geq 5$ vale que $2^n > n^2$.*

O **passo da indução não** precisa ser $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

SE

1. $P(b)$ e $P(b+1)$ são verdadeiros, $b \in \mathbb{Z}$, E (**passo**)
2. para todo $n \geq b+1$ temos que $P(n-1) \wedge P(n) \implies P(n+1)$ (**passo**)

ENTÃO,

$P(n)$ é verdadeiro para todo inteiro $n \geq b$. (**conclusão**)

Figure 4: Fonte: Fanart.tv

Os números de Fibonacci $F(0), F(1), F(2), \ldots$ são definidos como

$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 1, & \text{se } n = 1 \\ F(n-1) + F(n+2) & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Exemplo 3. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *vale que*

$$F_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}},$$

em que $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *e* $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Podemos combinar a **base** e o **passo da indução**.

SE

1. $P(b)$ é verdadeiro, $b \in \mathbb{Z}$, E (**base**)
2. para todo $n \geq b$ temos que

   $P(b) \ \wedge \ P(b+1) \ \wedge \ \cdots \wedge \ P(n) \implies \ P(n+1)$ (**passo**)

ENTÃO,

$P(n)$ é verdadeiro para todo inteiro $n \geq b$. (**conclusão**)

Figure 5: Fonte: We Heart it

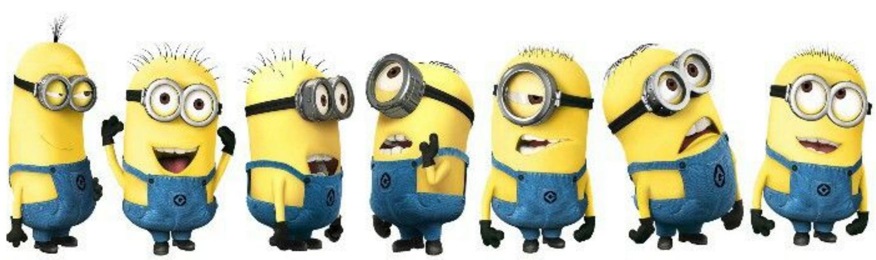


Figure 6: Fonte: Pinterest

Exemplo 4 (Teorema fundamental da aritmética)**.**
Todo número natural n *maior que 1 é o produto de primos. Mais precisamente,*

$$n = p_1^{a_1} \ p_2^{a_2} \ p_3^{a_3} \ \cdots \ p_t^{a_t},$$

em que $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_t$ *são primos distintos e* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_t$ *são inteiros positivos.*

12.2 Hoje

Algumas vezes a abordagem simples é a melhor.

Ditado popular

Continuaremos a olhar para o *Princípio da Indução Finita*, mas de uma perspectiva um pouco mais ambiciosa. Esta perspectiva combina prova por casos, contradição e indução. Talvez haja ainda mais alguma coisa escondida. A novidade é que gostaríamos de, pelo menos um pouco, chamar a atenção para o poder algorítmico, e portanto computacional, de indução. Frequentemente, uma demostração por indução fornece um processo ou algoritmo para construirmos um objeto. Por exemplo, a demonstração indutiva do Teorema Fundamental da Aritmética nos descreve um processo para escrevermos um número inteiro $n \geq 1$ como um produto de números primos.

Hoje usaremos como pretexto para as nossas investigações o **Problema da Galeria de Arte**. Este problema envolve geometria, isso por si só já tem um sabor um pouco diferente do que temos feito. O Teorema Fundamental da Aritmética nos diz como decompor um número em *pedaços mais simples*, os número primos. Hoje discutiremos que em geometria, ou qualquer área (nada como exagerar…), de maneira semelhante, procuramos *trazer o objeto de estudo para nossa zona de comforto*.

Pretensiosamente, os ingredientes da reunião de hoje serão:

1. indução
2. contradição
3. casos
4. decomposição ou simplificação
5. geometria
6. algoritmos

Para brincar um pouco com o problema que trataremos vejam Art Gallery Theorem no Geogebra.

Alguns dos programas que veremos se apoiam em predicados geométricos como Esquerda(p, q, r). Esse predicado recebe três pontos p, q e r e é verdadeiro se e somente se r está à esquerda do *reta orientada* determinada pelo segmento que vai de p a q. Isso é implementado usando **produto vetorial** que vocês estudam em MAT0112 Vetores e Geometria.

12.3 Galeria de arte

Problema 5 (Victor Klee). *Suponha que tenhamos uma galeria de arte contendo pinturas e esculturas de valor inestimável. Quantos guardas são necessários para vigiar toda a galeria?*

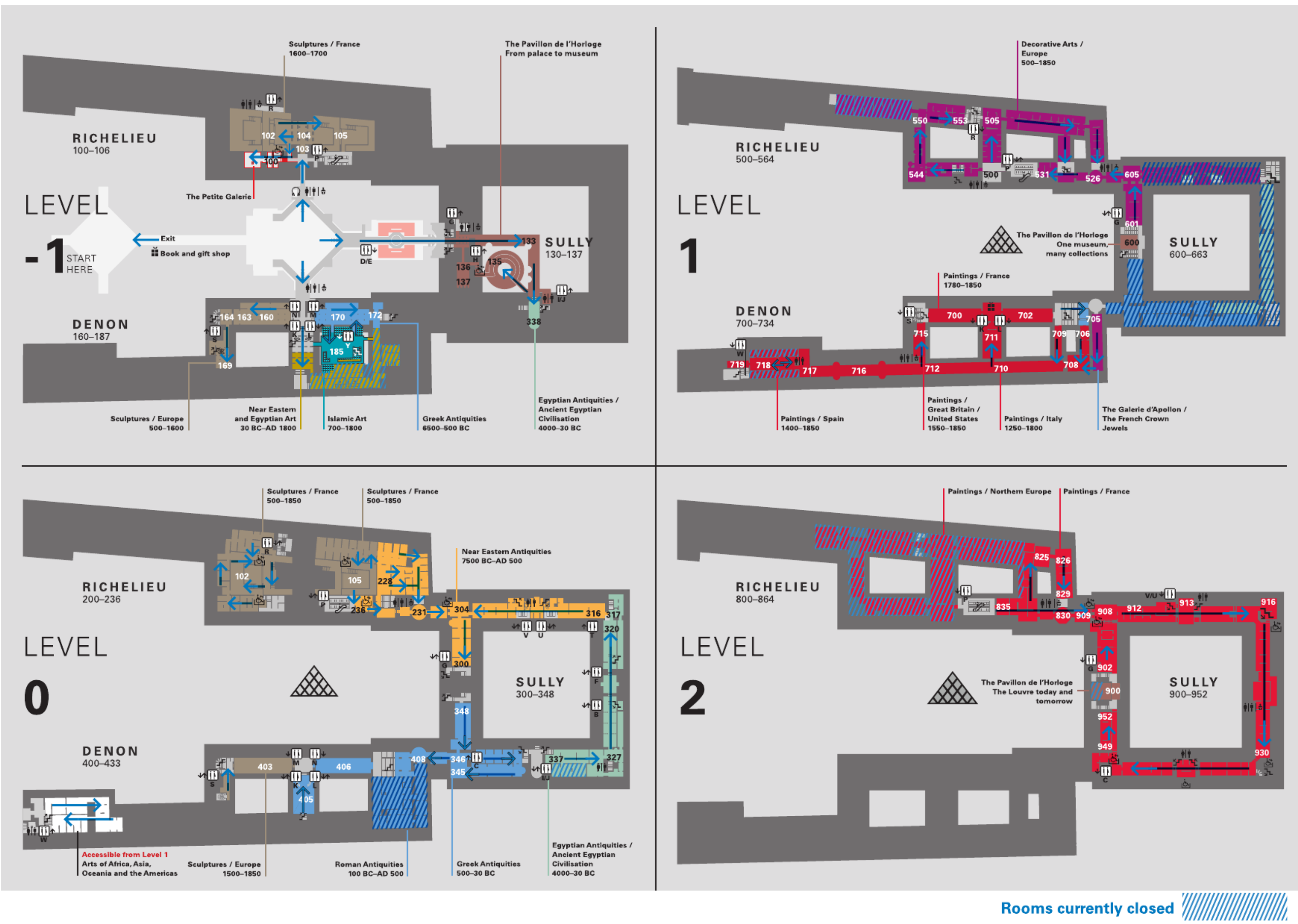
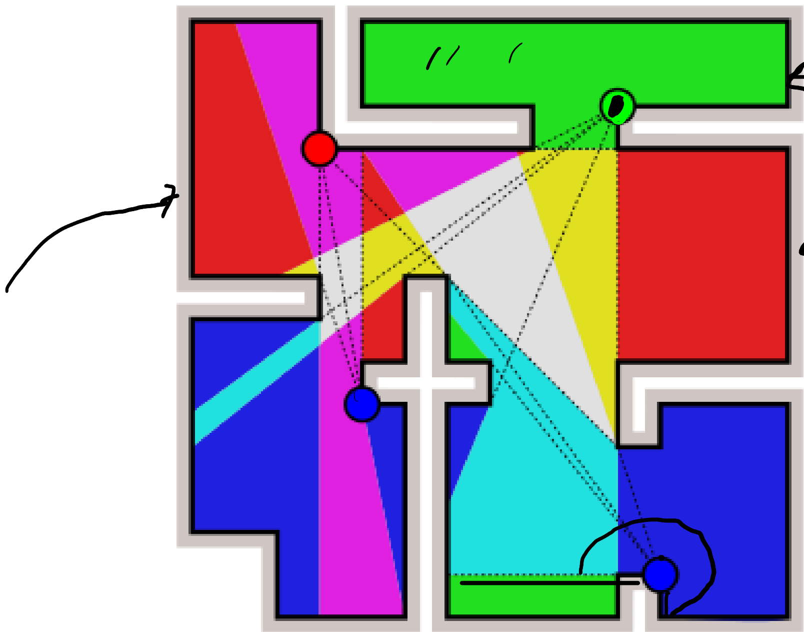


Figure 7: Fonte: www.louvre.fr



4 guardas

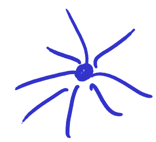
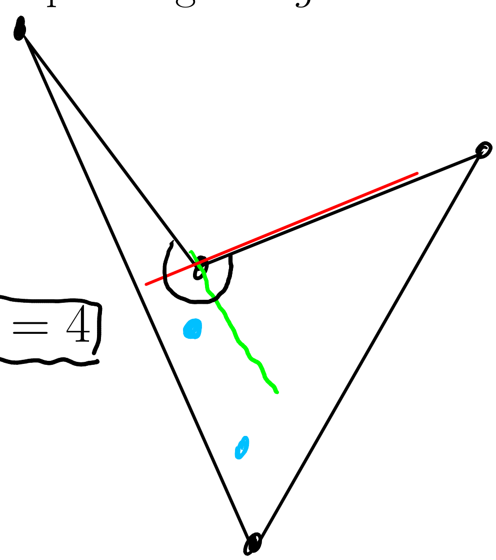


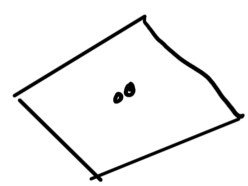
Figure 8: Fonte: Wikipedia

Cada guarda fica parado em um ponto fixo e sua visibilidade é de 2π (= 360 graus).

Quantos guardas são necessários para vigiar a *galeria* abaixo?

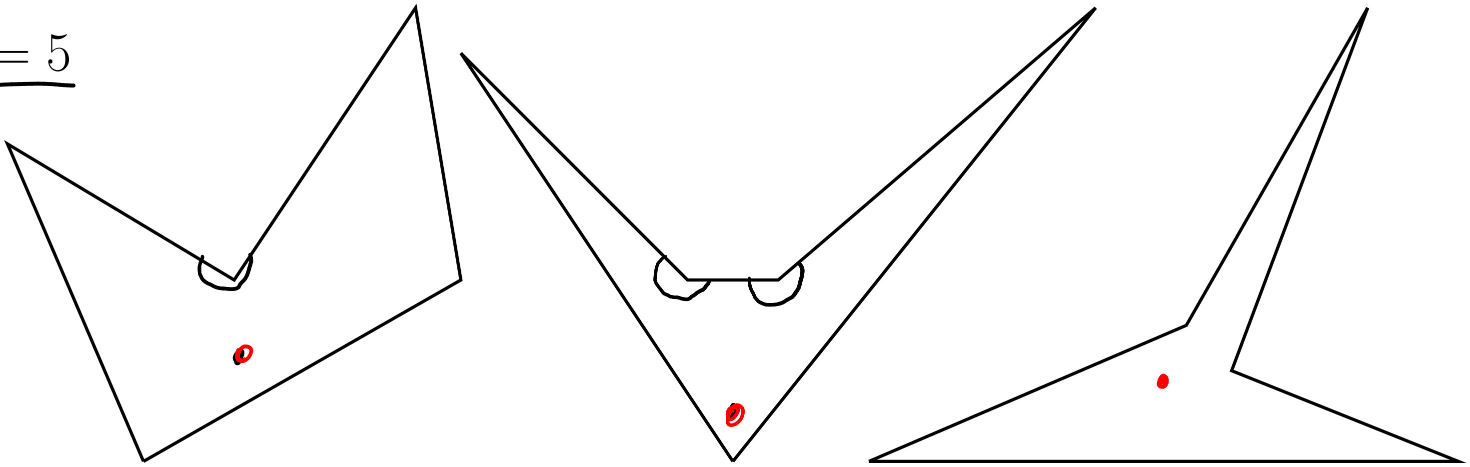


$\boxed{n = 4}$



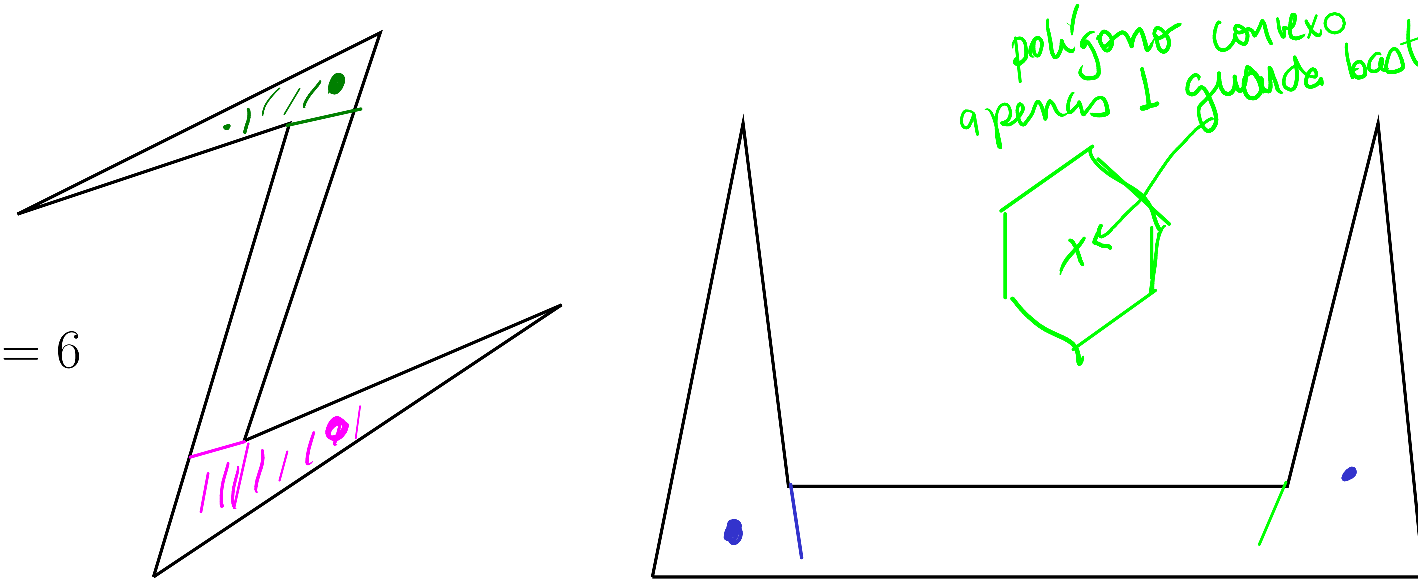
Quantos guardas são necessários para vigiar as *galerias* abaixo?

$n = 5$

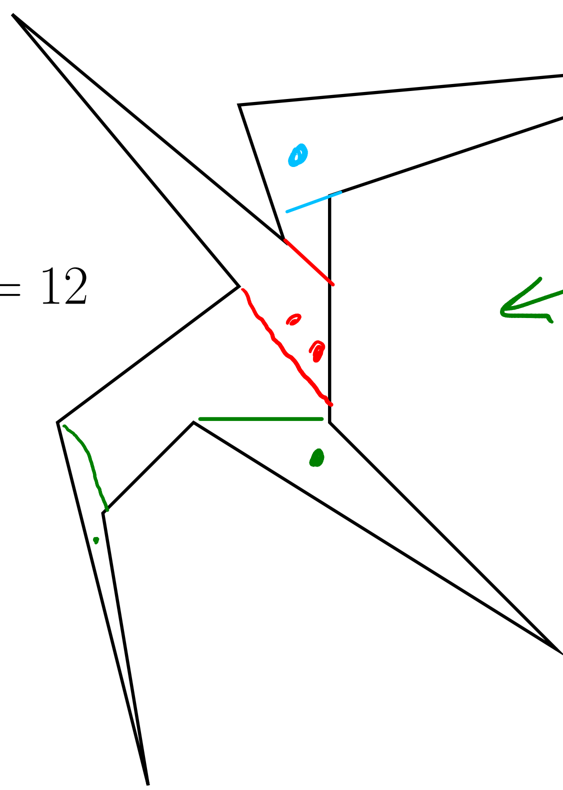


polígono convexo apenas 1 guarda basta

$n = 6$



$n = 12$

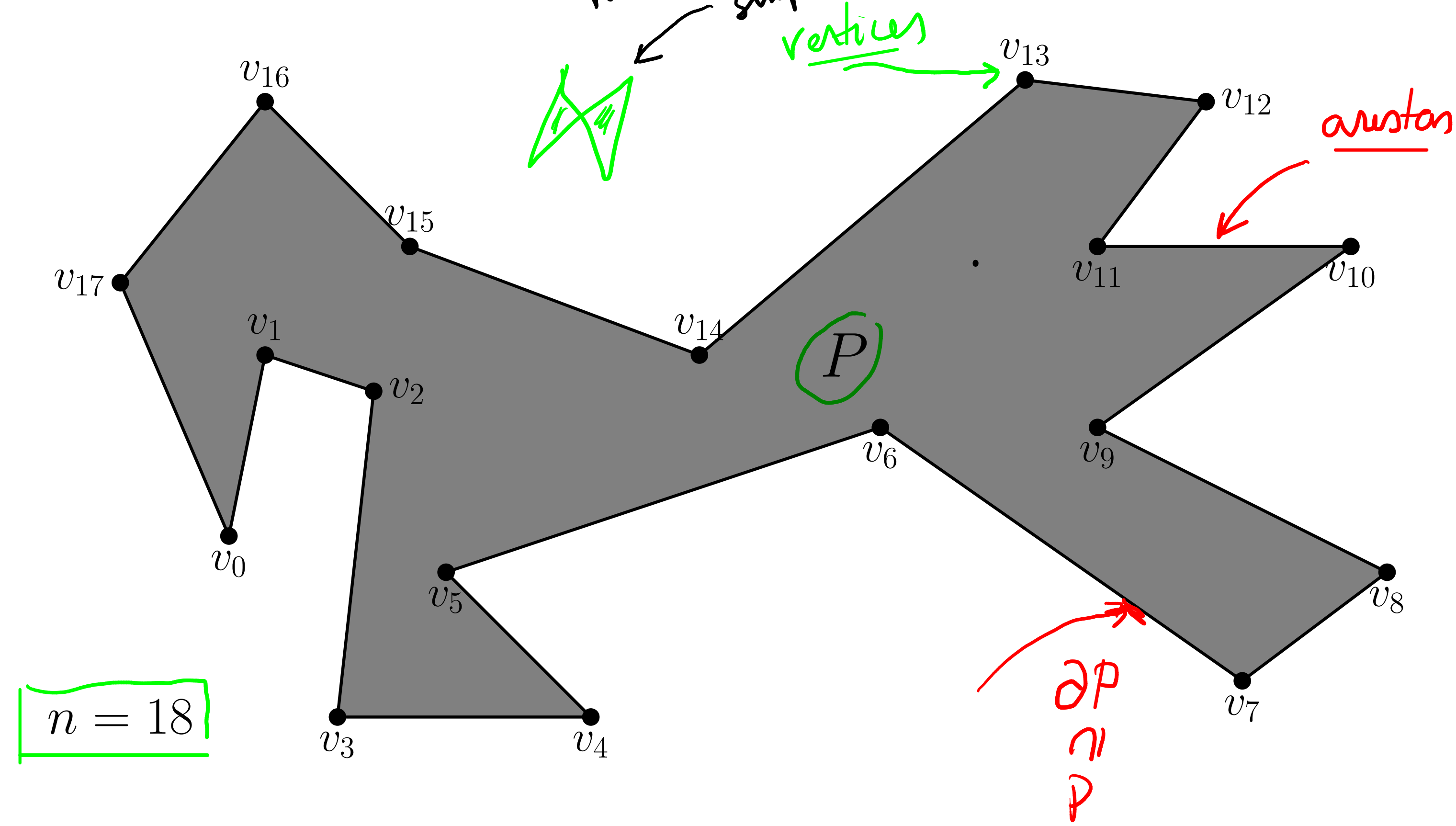


4 guardas

12.4 Polígonos

Um **polígono** (*simples*) é uma figura plana descrita por um número finito de segmentos de linha reta conectados para formar uma *curva poligonal fechada* que se intersectam apenas nas extremidades. A região (*fechada*) do plano delimitada pela curva, junto com a curva, é o polígono.

não é polígono simples



A curva poligonal é a sequência $(v_0, e_0, v_1, e_1, \ldots, e_{n-2}, v_{n-1}, e_{n-1}, v_0)$ em que $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ são pontos e para $i = 0, 1, \ldots, n-1$, e_i é um segmento de reta com extremidades v_i e v_{i+1} sendo que $v_n = v_0$.

$v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ são também chamados **vértices** do polígono

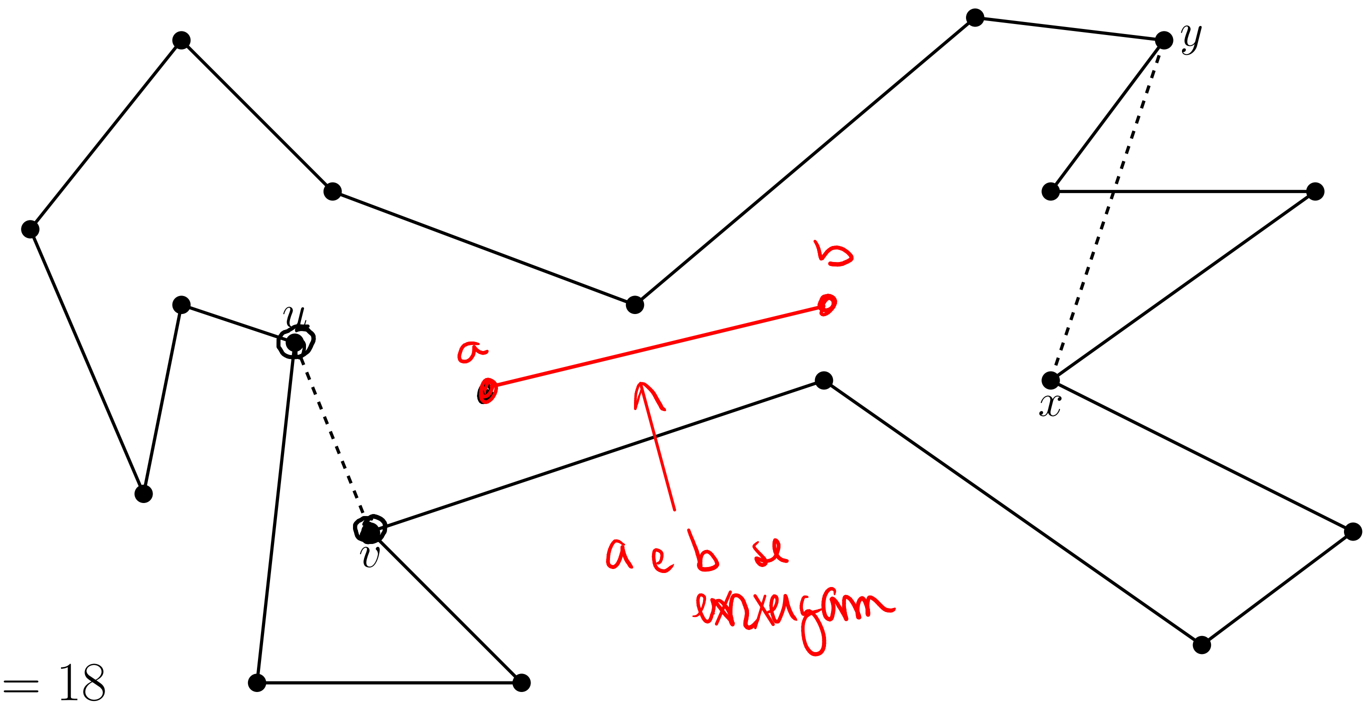
$v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}v_0$ são também chamadas **arestas** do polígono

∂P é a fronteira do polígono P, $\partial P \subseteq P$.

12.5 Visibilidade

Dois pontos p e q se **vêem** ou se **enxergam** se o segmento pq está inteiramente contido em P.

Por exemplo, no polígono abaixo u e v se enxergam e x e y não se enxergam.



$n = 18$

Um **guarda** é um ponto de P. Um conjunto de guardas **cobre** ou **guarda** P se todo ponto de P pode ser visto por um dos guardas do conjunto.

Problema 6. *Qual é o **menor número** de guardas suficiente para guardar **qualquer** polígono de n vértices?*

$g(P)$ = menor número de guardas necessários para guardar P.

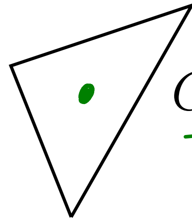
$G(n)$:= menor número de guardas suficientes para guardar qualquer polígono com n vértices.

$$G(n) := \max\{g(P) : P \text{ tem } n \text{ vértices}\}$$

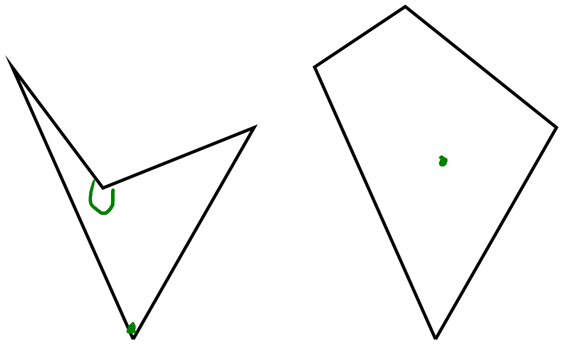
Ver Art Gallery Theorem no Geogebra.

clique ali

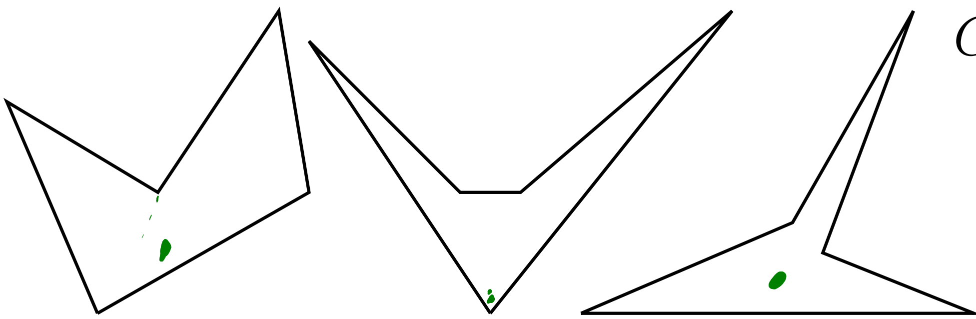
Problema 7. *Quanto vale $G(n)$?*



$G(3) = 1$

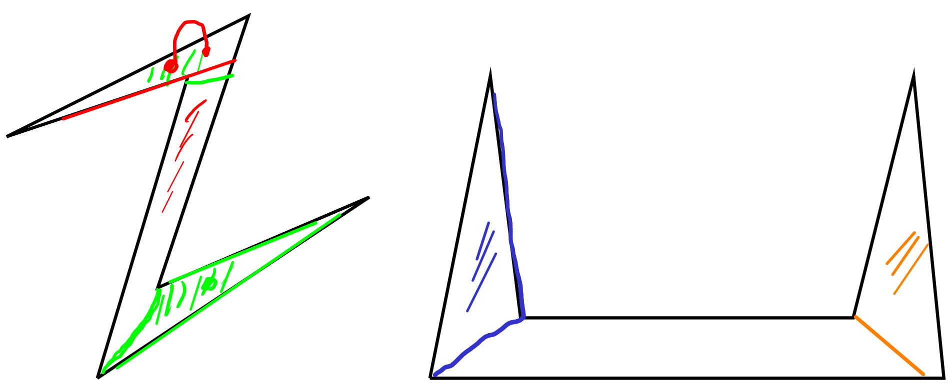


$G(4) = 1$

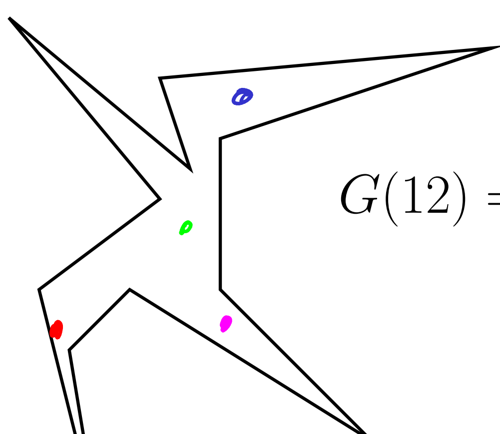


$G(5) = 1$

Catalan
número de triang.
de polígonos
convexos e ...
muito mais



$G(6) = 2$



$G(12) = 4$

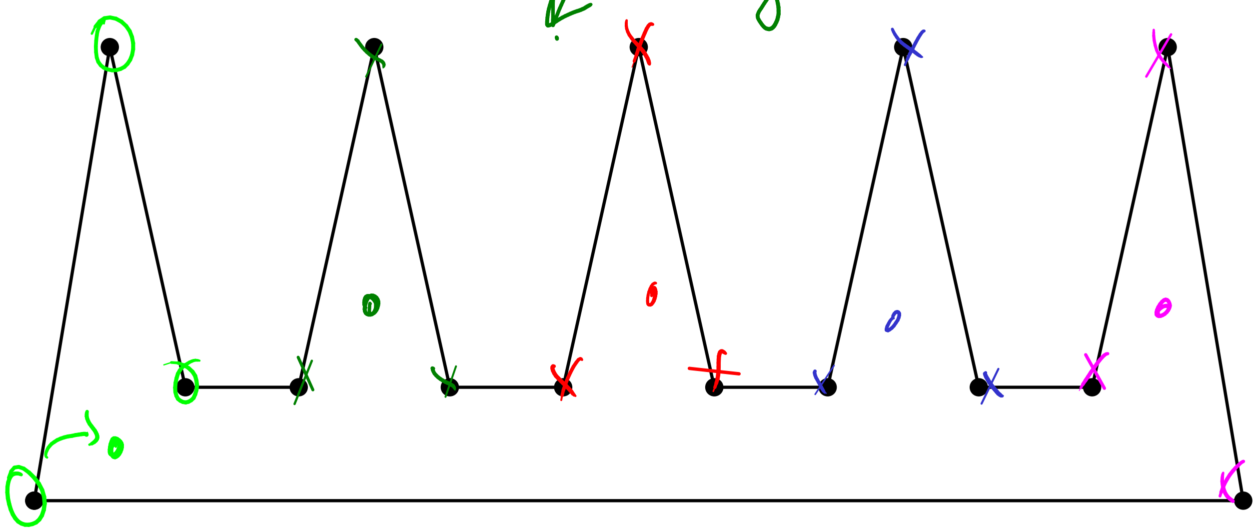
$\lfloor 3.9 \rfloor = 3 \quad \lfloor 1.2 \rfloor = 1$

12.6 Teorema da galeria de arte

$\lfloor x \rfloor$ = maior inteiro menor ou igual a x

Teorema 8. *(**Teorema da Galeria de Arte**, Václav (Vašek) Chvátal): Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja vigiado por pelo menos um guarda.*

precisamos de $\frac{n}{3}$ guardas



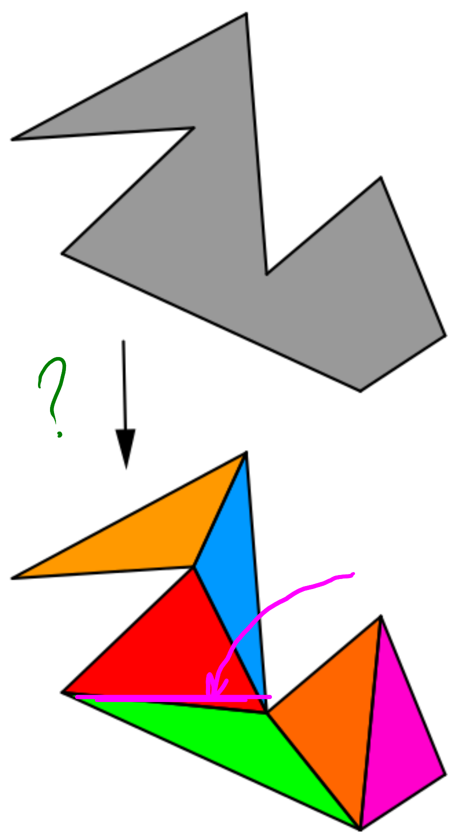


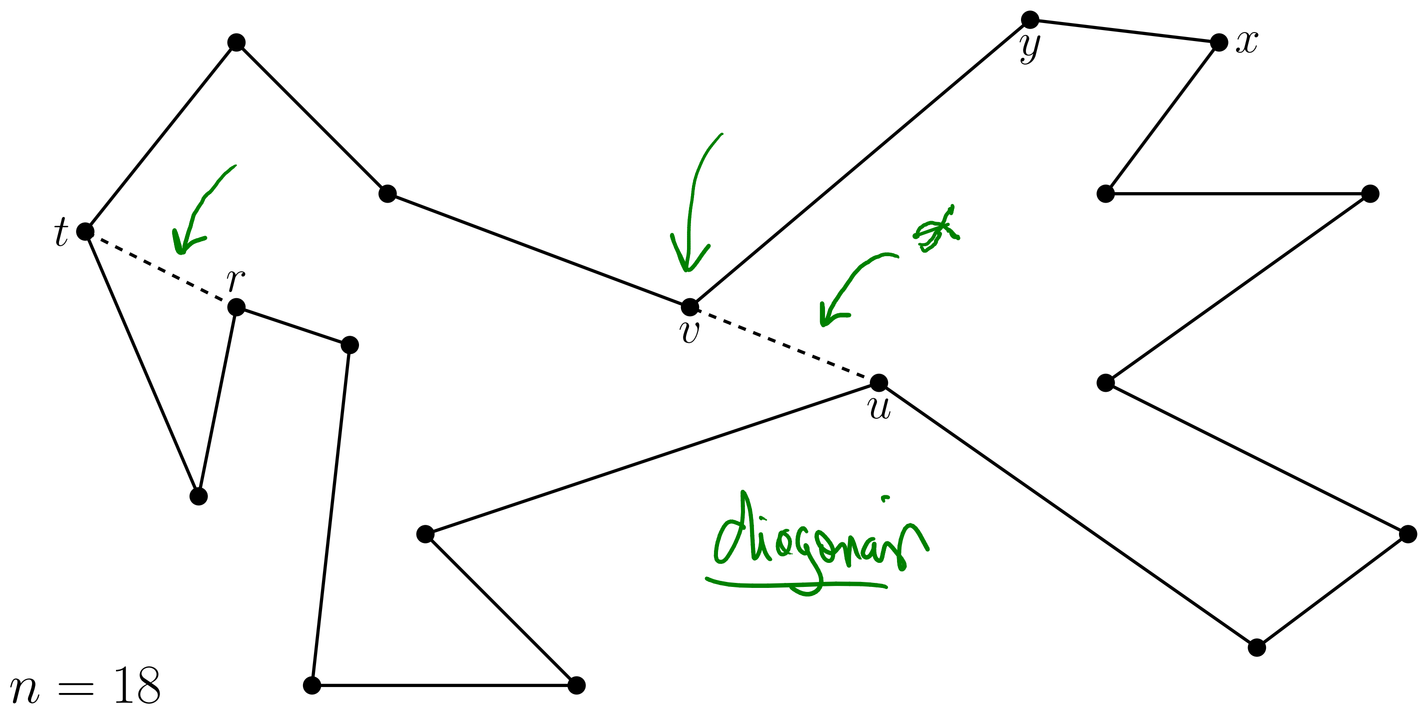
Figure 9: Fonte: Wikipedia

12.7 Diagonais

Dois pontos p e q se **vêem** ou se **enxergam claramente** se além de pq estar inteiramente contido em P temos que $pq \cap \partial P \subseteq \{p, q\}$.

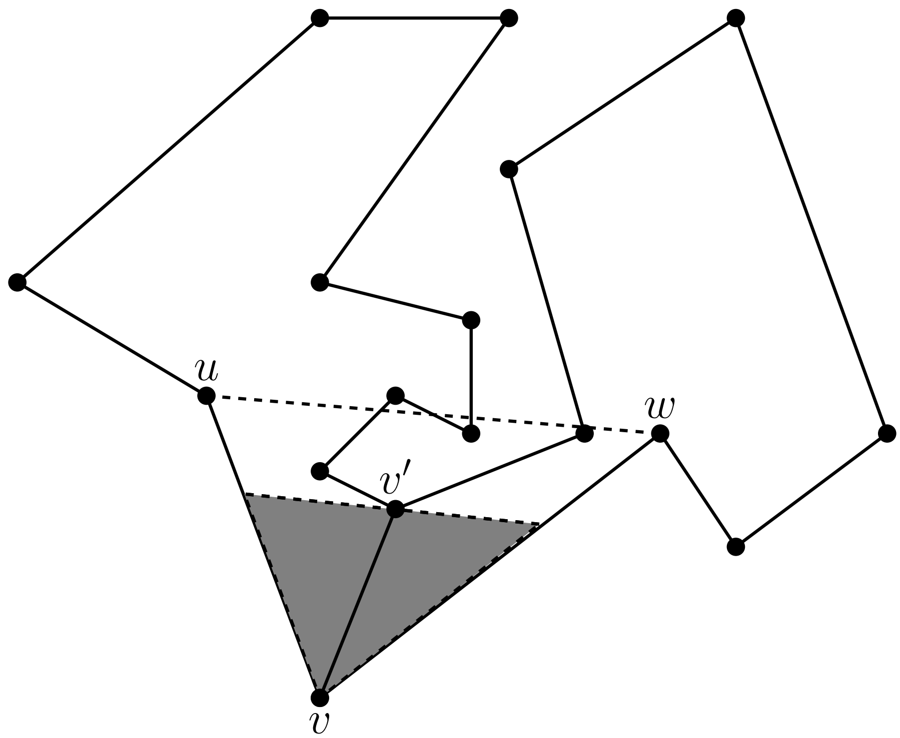
Um **diagonal** de um polígono P é um segmento pq em que p e q são vértices que se vêem claramente.

Por exemplo, no polígono abaixo uv e rs são diagonais e xy não é diagonal.



Lema 9. *Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui uma diagonal.*

Prova. Seja P um polígono com $n \geq 4$ vertices. Seja v o vértice de P menor de y-coordenada (mais embaixo). Em caso de empate escolha o de menor x-coordenada (mais à esquerda).

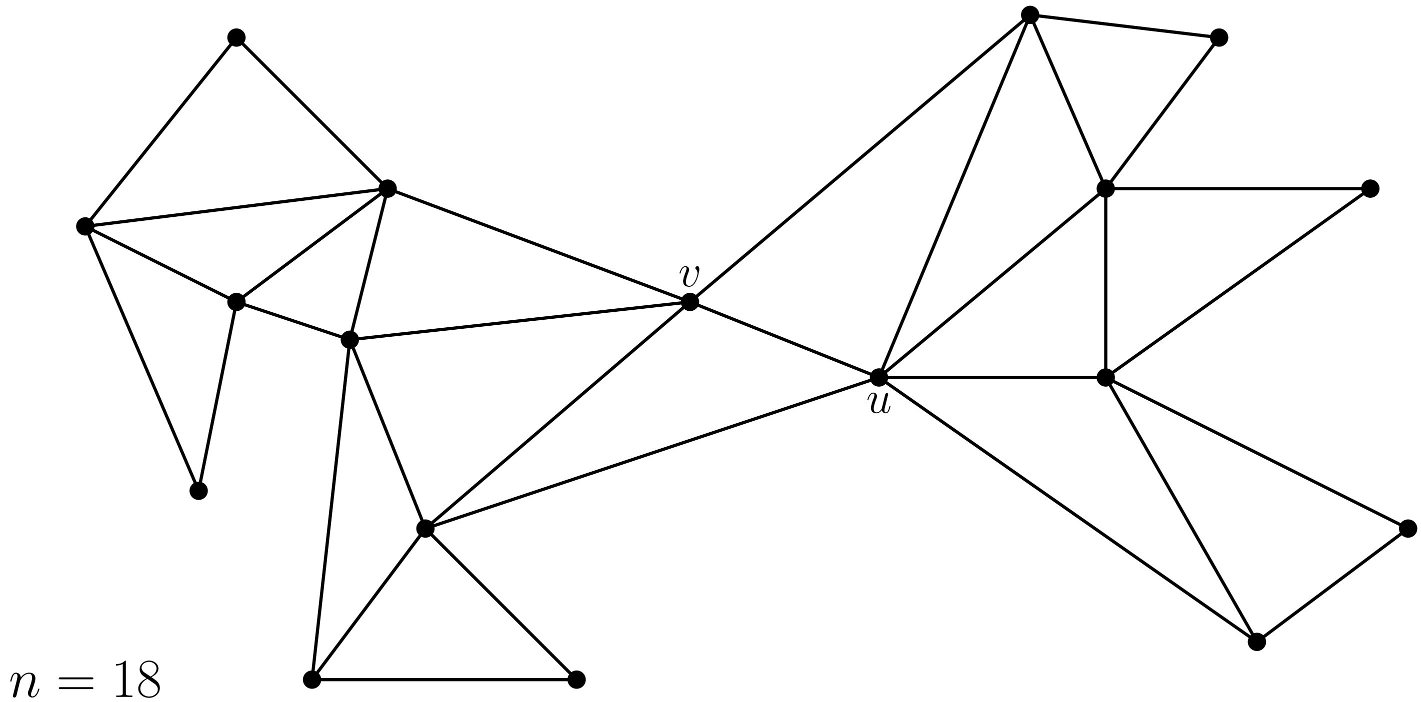


Sejam u e w os dois vértices vizinhos de v na fronteira de P. Se o segmento aberto uw está no interior de P, encontramos uma diagonal. Em caso contrário, há um ou mais vértices no triângulo determinado por u, v e w. Entre estes vértices, seja v' um que é está mais longe do segmento uw.

O segmento conectando v e v' não pode intersectar um aresta de P, pois esta aresta teria um vértice que é mais distante de vw do que v', contradizendo a escolha de v'. Logo, vv' é uma diagonal de P. $\square$

12.8 Triangulação

A decomposição de um polígono em triângulos através de um conjunto (maximal) de diagonais que não se cruzam (pode se intersectar apenas, possivelmente, nas suas extremidades) é chamada um **triangulação** do polígono.



só para impressionar

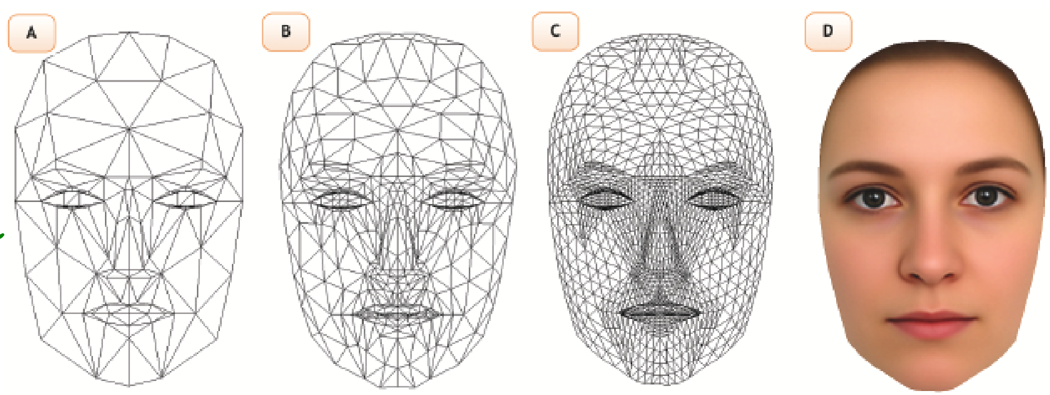


Figure 10: Fonte: https://web.colby.edu/t

Teorema 10 (Triangulação)**.** *Todo polígono pode ser decomposto em triângulos pela adição de zero ou mais diagonais que não se cruzam.*

Prova. Seja $A(n)$ o predicado "*todo polígono com n vértices pode ser decomposto em triângulos pela adição de zero ou mais diagonais que não se cruzam*"

A **prova é por indução** no número n de vértices.

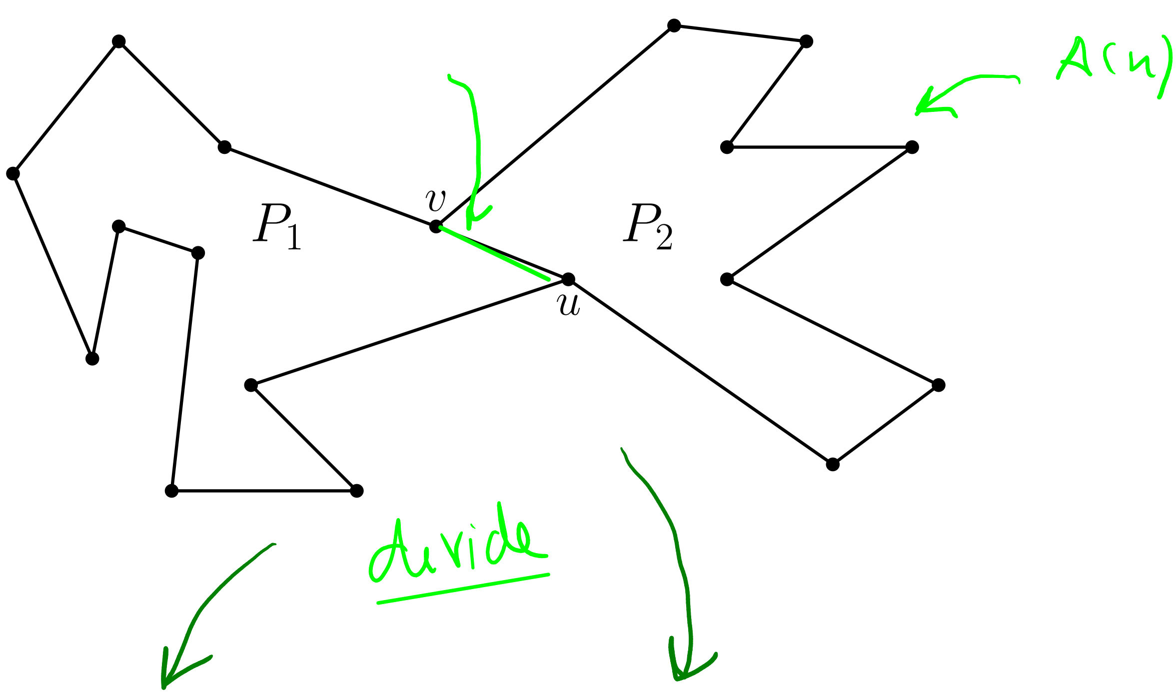
Se $n = 3$, então o predicado $A(3)$ é verdadeiro, pois todo polígono com 3 vértices é um triângulo, para estes não precisamos adicionar aresta alguma.

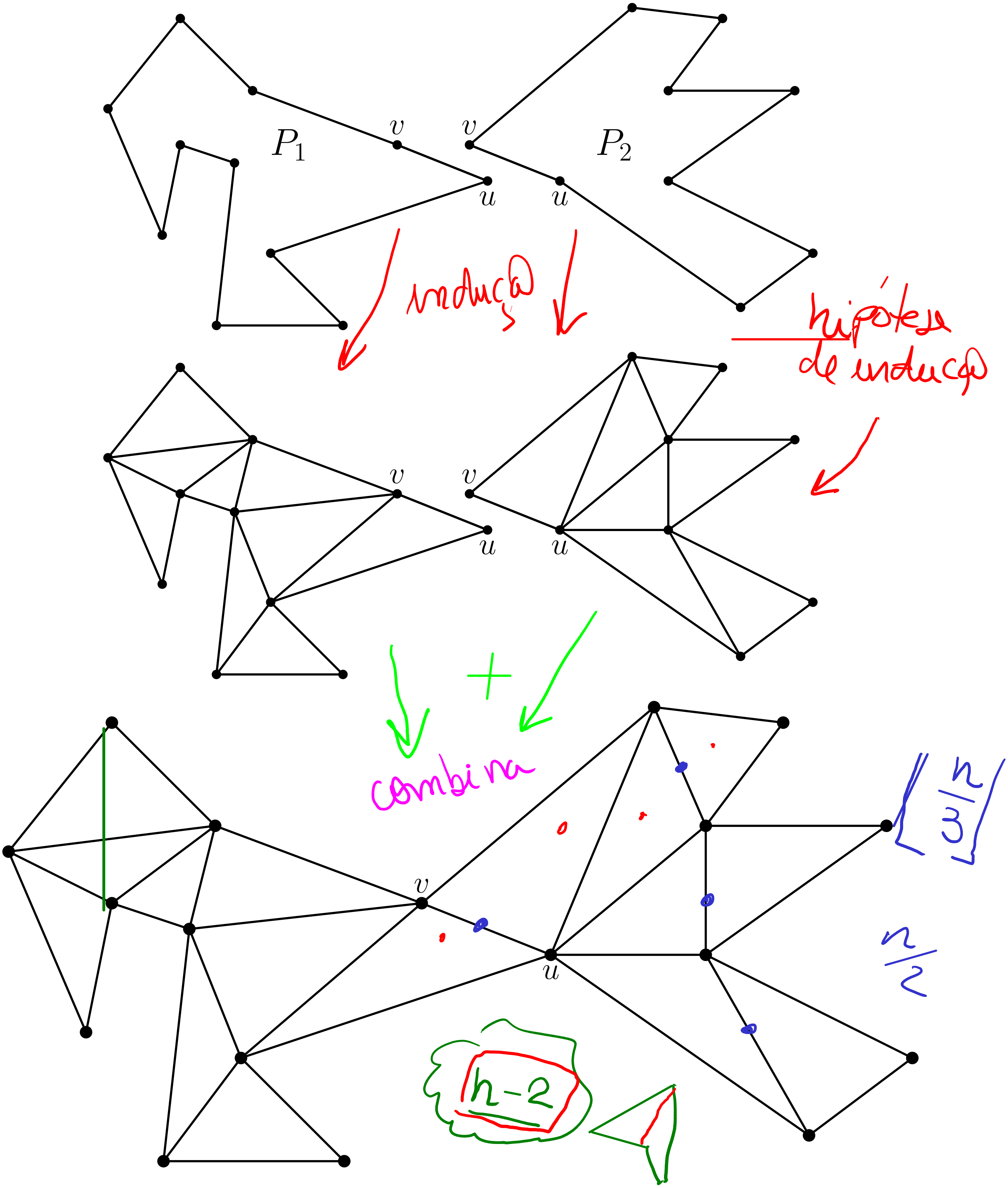
Suponha que $A(3), A(4), \ldots, A(n-1)$ sejam verdadeiros para algum $n \geq 4$.

Vamos mostrar que $A(n)$ é verdadeiro. Para isso seja P um polígono qualquer com n vértices. Como $n \geq 4$, então lema 9, P possui uma diagonal $d = uv$ que divide P em dois sub-polígonos P_1 e P_2 com n_1 e n_2 vértices, respectivamente.

Temos que $3 \leq n_1 < n$ e $3 \leq n_2 < n$ e como pela hipótese $A(n_1)$ e $A(n_2)$ são verdadeiros, concluímos que P_1 e P_2 podem ser decompostos em triângulos. Assim, P também pode se decomposto em triângulos.

Portanto, $A(n)$ é verdadeiro e pelo Princípio da Indução concluímos que $A(n)$ é verdadeiro para todo $n \geq 3$. $\square$





P_1
P_2
v
v
u
u
indução
hipótese de indução
v
v
u
u
+
combina
v
u
$\lfloor n/3 \rfloor$
$n/2$
$n-2$

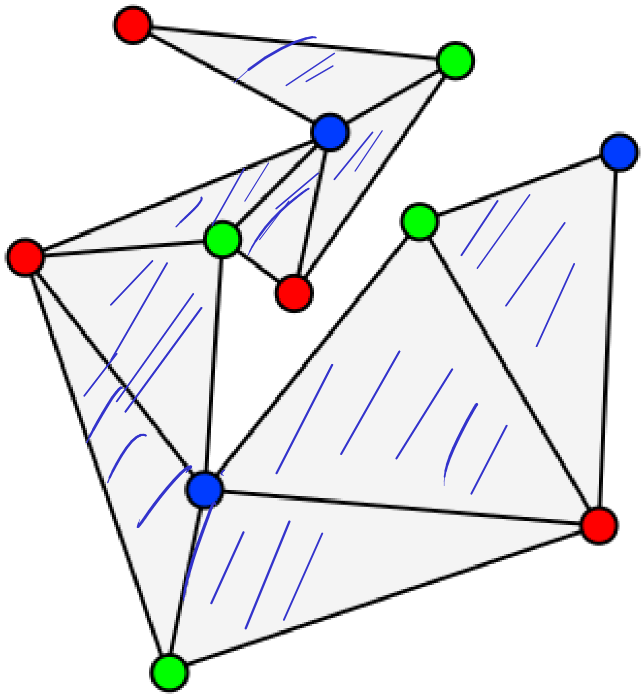
12.9 Coloração

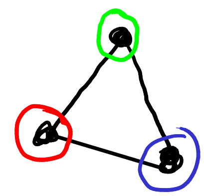
Um k**-coloração** de uma triangulação de um polígono é uma função

$$\text{cor} : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{\text{vértices do polígono}\}$$

tal que se uv é uma aresta do polígono ou uma diagonal da triangulação, então $\text{cor}(u) \neq \text{cor}(v)$.

3-coloração





$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

$\left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor = 3$

Figure 11: Fonte: Wikipedia

4 vermelhos

4 verde

3 azuis

basta para guardar a galera

12.10 Orelhas

Três vertices u, v e w de um polígono formam uma **orelha** de um polígono se uw é uma diagonal e v é a ponta da orelha. Duas orelhas não se sobrepõem se seus interiores são disjuntos.

não fizemos a prova, pois já tínhamos muita coisa para hoje

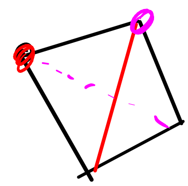
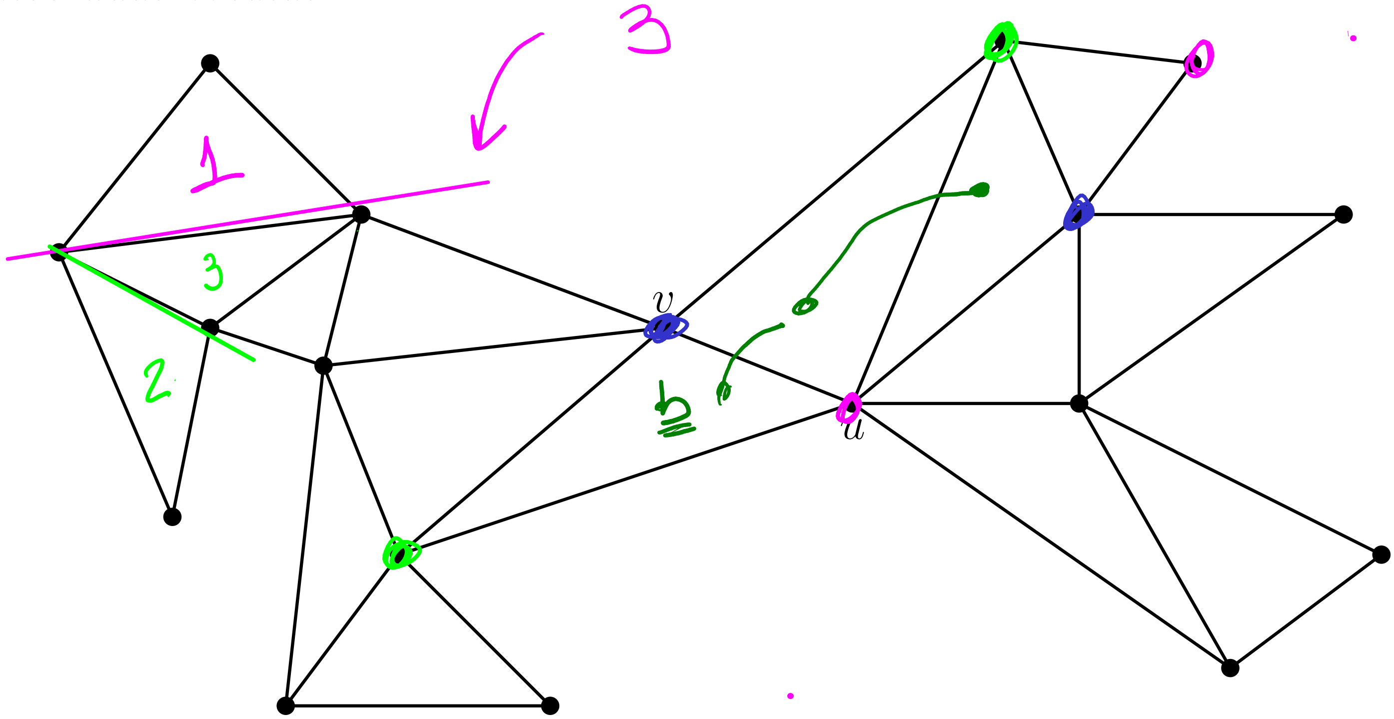


Figure 12: Fonte: https://mashable.com/

Teorema 11 (duas orelhas, Meister)**.** *Todo polígono com $n \geq 4$ vértices tem pelo menos duas orelhas.* □



Teorema 12 (Três coloração)**.** *Toda triangulação de um polígono admite uma 3-coloração.*

🤔

Prova. Seja $A(n)$ o predicado "*todo polígono com n admite uma 3-coloração*".

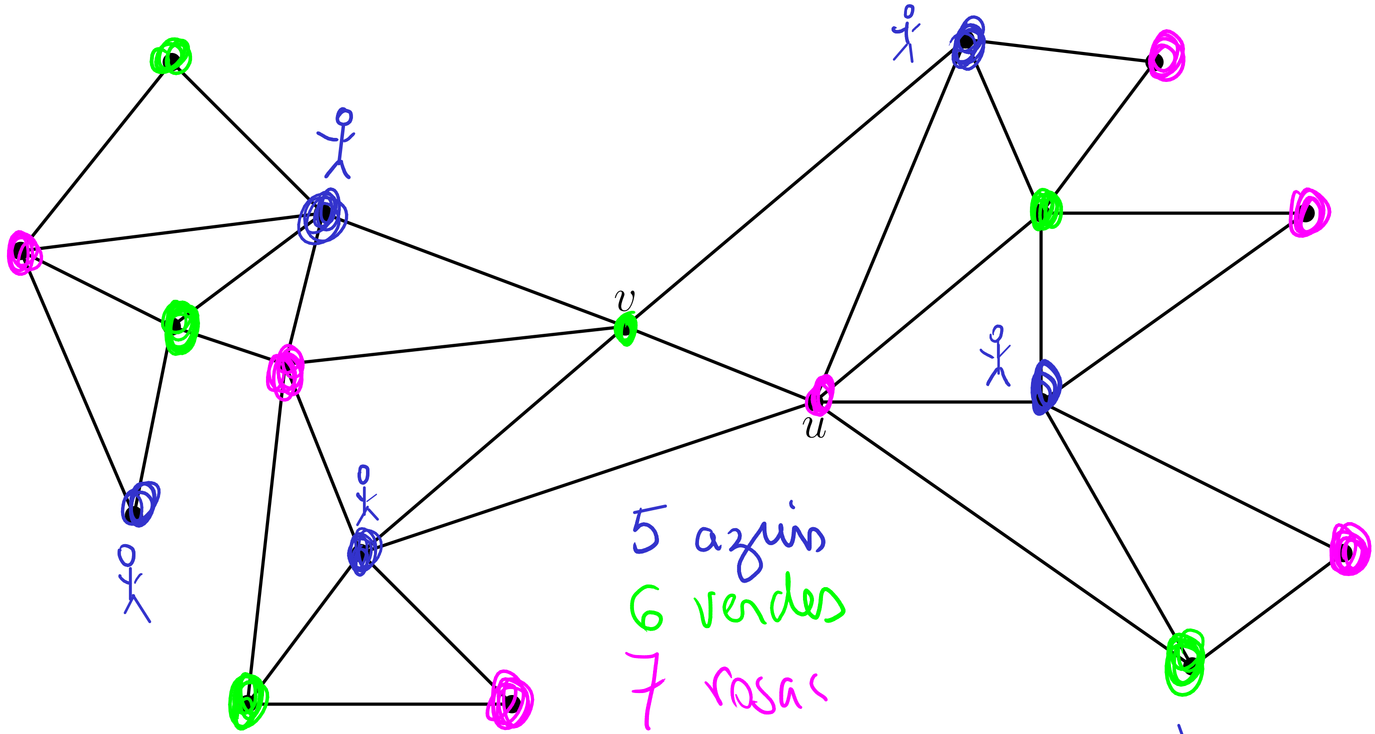
A prova é por indução no número de vértices n dos polígonos.

Se $n = 3$, então $A(3)$ é verdade pois todo polígono com 3 vértices é um triangulo e podemos atribuir as cores 1, 2 e 3 aos seus vértices.

Suponha que $A(n-1)$ é verdadeiro para $n \geq 4$. Vamos provar que $A(n)$ é verdadeiro.

Seja P um polígono qualquer como $n \geq 4$ vértices. Como P tem $n \geq 4$ vértices, então pelo teorema 11 das duas orelhas, P tem uma orelha $\triangle(u, v, w)$ com v como ponta. Agora, formemos um novo polígono P' cortando a orelha $\triangle(u, v, w)$, ou seja, troque a sequência uvw na fronteira de P pela segmento de reta uw. O polígono P' tem um vértices a menos que P pois a ponta v foi removida. Como $A(n-1)$ é verdadeiro, então P' admite uma 3-coloração. Para estendermos essa 3-coloração de P' para uma 3-coloração de P, basta atribuirmos a v a cor diferente da de u e de w. Assim, obtemos uma 3-coloração para P.

Como P é um polígono arbitrário com n vértices que admite uma 3-coloração, concluímos que $A(n)$ é verdadeiro. Portanto, pelo Princípio da Indução concluímos que $A(n)$ é verdadeiro para todo $n \geq 3$. $\square$



5 azuis
6 verdes
7 rosas

$\min\{5, 6, 7\} = 5$ guardas são suficientes

Agora que temos todos os ingredientes em mãos...

Prova. (do Teorema da Galeria de Arte, prova de Steve Fisk) Seja P um polígono com n vértices. Pelo teorema 10 da triangulação, existe uma triangulação de P.

Pelo teorema 12 das três cores, a triangulação admite uma 3-coloração.

Colocando um guarda em cada um dos vértices de P que possuem uma mesma cor, teremos que P estará sendo inteiramente guardado. Isso porque todo triângulo tem um vértice de cada uma das três cores, e os triângulos são uma decomposição de P. Uma das cores é usada no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ vezes na coloração. $\square$

Figure 13: Fonte: https://www.ourworldforyou.com/matryoshka-dolls/

12.11 Mais indução com triangulações

Teorema 13. *Todo polígono com n vértices pode ser decomposto em $n-2$ triângulos através da adição de $n-3$ diagonais.*

Prova. Por indução em n … □

Como consequência do teorema anterior temos que

Corolário 14. *A soma dos ângulos internos de um polígono com n vértices é $(n-2)\pi$.*

12.12 Conversa de bar

Figure 14: Fonte: therichest.com

Figure 15: Fonte: https://www.therussianstore.com