

22 Reunião 22: 16/JUL/2021



Figure 1: Calvin e Hobbes por Bill Watterson

22.1 Reunião passada

Na última reunião conversamos sobre

- produto cartesiano
- relações
- relações de equivalência
- classes de equivalência
- representantes de classes

22.2 Hoje

Alguns fatos podem ser vistos mais claramente através
de exemplos do que de provas.
Leonard Euler

Hoje continuaremos a conversa da reunião passada e conversaremos sobre:

- relações e digrafos
- ordens parciais
- ordens totais
- digrafos acíclicos
- ordenação topológica
- escalonamento
- lema de Dilworth



22.3 Produto Cartesiano

Um **par ordenado** $p = (a, b)$ é formado por um objeto a , chamado a **primeira coordenada** de p e um objeto b , chamado a **segunda coordenada** de p . Dois pares $p = (a, b)$ e $q = (c, d)$ são ditos iguais quando $a = c$ e $b = d$.

O par ordenado (a, b) não é a mesma coisa que o conjunto $\{a, b\}$ já que $\{a, b\} = \{b, a\}$, mas $(a, b) = (b, a)$ somente quando $a = b$.

O **produto cartesiano** de dois conjuntos A e B é o conjunto $A \times B$ formado por todos os pares de ordenados (a, b) cuja primeira coordenada a pertence a A e a segunda coordenada b pertence a B . Em símbolos

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

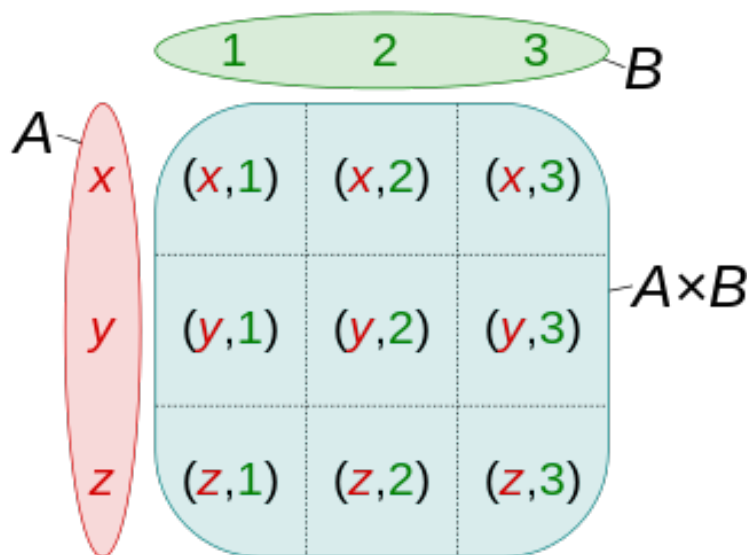


Figure 2: Fonte: [Cartesian product](#) (Wikipedia)

Se $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ e $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ então $A \times B$ possui mn elementos.

22.4 Relações

Devido a uma certa esquizofrenia, a partir deste ponto usaremos X e Y no lugar de A e B da página anterior.

O produto cartesiano $X \times Y$ acha-se intimamente ligado à ideia de relação.

Uma **relação** (binária) **entre** os elementos de um conjunto X e os elementos de um conjunto Y é um subconjunto $R \subseteq X \times Y$. Quando (x, y) é um elemento de R é comum escrevermos xRy .



Por exemplo, se X é um conjunto de estudantes e Y é conjunto de disciplinas, então R pode ser a relação “está cursando a disciplina” formada pelos pares (x, y) tais que x *está cursando a disciplina* y , em símbolos xRy .

As relações são usadas em muitos ramos da matemática e computação para modelar uma ampla variedade de conceitos. Estes incluem, entre outros as relações :

- “é maior que”, “é igual a”, “divide”, “é congruente modulo n ”, ... em aritmética;
- “é congruente com” na geometria;
- “é adjacente a” na teoria dos grafos;
- “é ortogonal a” em vetores e geometria.

Uma **relação sobre** um conjunto X é um subconjunto $R \subseteq X \times X$. Por exemplo,

- para $X = \mathbb{Z}$ temos a relação $xRy \iff x \equiv y \pmod{5}$
- para $X = \mathbb{N}$ $xRy \iff x \mid y$
- para $X = \mathbb{R}$ $xRy \iff x \leq y$

22.5 Digrafos

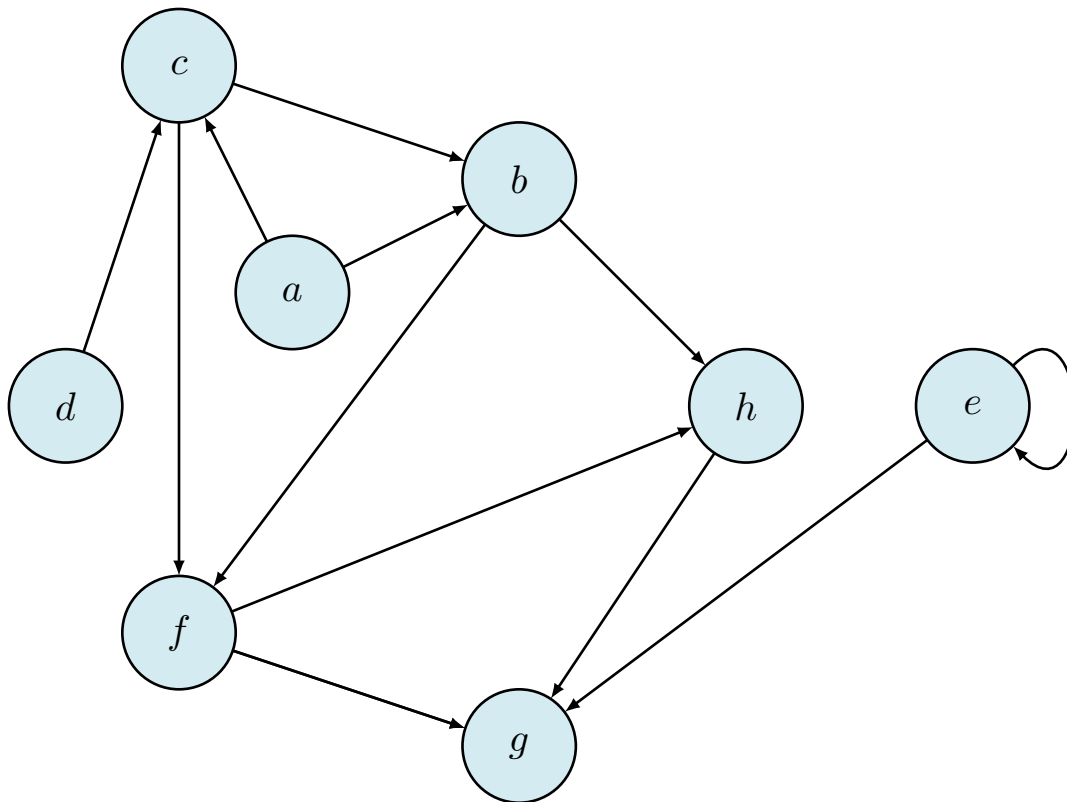
Uma relação R sobre um conjunto finito pode ser vista como um grafo orientado (*directed graph*) ou simplesmente digrafo.

Digrafos aparecem em toda parte em ciência da computação. São usados, por exemplo, para representar redes computadores e a estrutura de hiperlinks das páginas da WWW.

Larry Page e Sergey Brin, que em 1995 eram dois estudantes de doutorado de Stanford, se tornaram multimilionários ao identificar como a estrutura do digrafo dos hiperlinks poderia ser usada por um algoritmo de busca.

Um **digrafo** é um par (V, A) que consiste de um conjunto finito não vazio V e um conjunto A de pares ordenados de elementos de V . O elementos em V são chamados de **vértices** e os elementos de A são chamados de **arcos**.

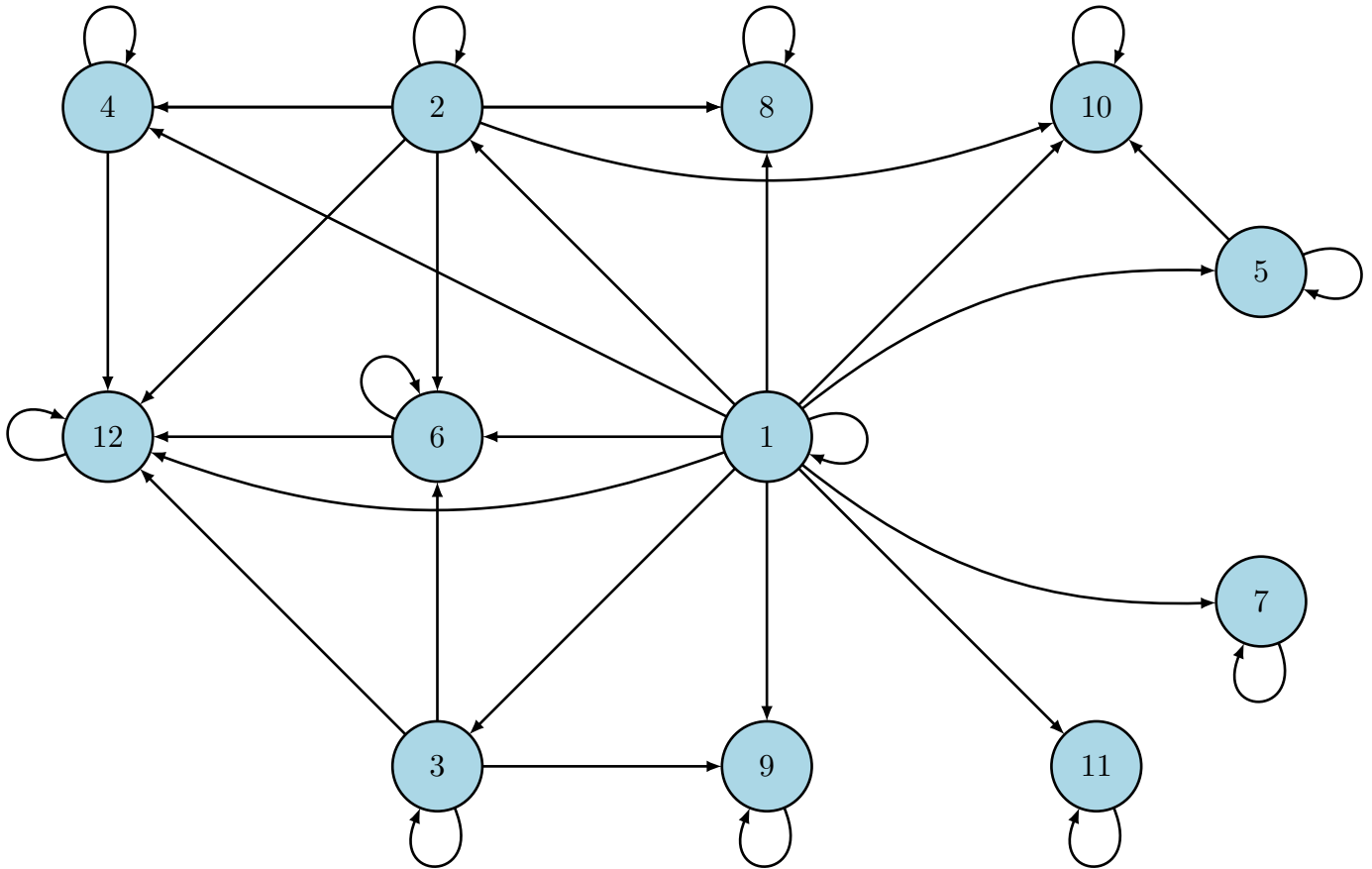
Em diagramas é comum que vértices sejam representados por bolas e arcos por flechas, como na figura abaixo



Uma relação R sobre X é um digrafo $D = (V, A)$ em que $V = X$ e $A = R$. O digrafo acima representa a relação R sobre $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ em que, por exemplo, aRb, cRd e que eRe , mas NÃO bRa , NÃO bRb e NÃO gRx para todo x em que A .

No BCC vocês terão várias disciplinas que abordam vários aspectos e aplicação dessa coisas chamadas digrafos e do seu irmão grafo.

O digrafo abaixo tem $V = X = \{1, 2, \dots, 12\}$ e $A = R$ em que R é a relação “divide”, ou seja, para todo x e y em V , $xRy \iff x|y$



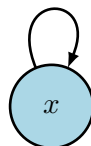
Qualquer relação R sobre um conjunto X pode ser traduzida em um digrafo em que os vértices são os elementos do conjunto X e onde cada arco $x \rightarrow y$ corresponde a um par $(x, y) \in R$, ou seja, xRy e vice-versa

22.6 Propriedades de relações

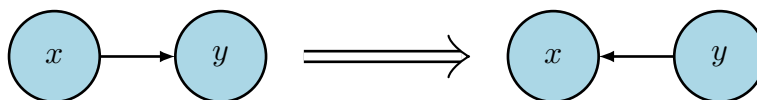
Seja R uma relação sobre X .



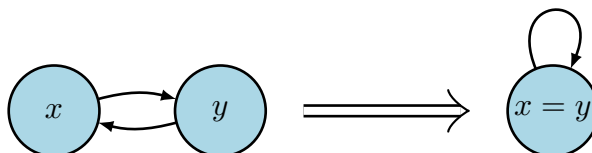
R é **reflexiva** se e somente se xRx para todo x em X



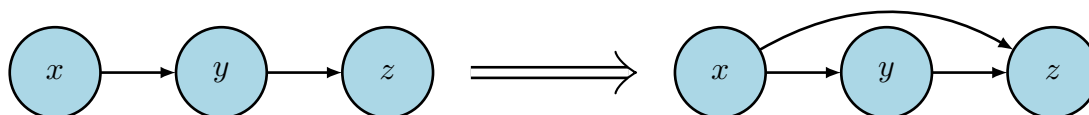
R é **simétrica** se $xRy \implies yRx$ para todo x, y em X



R é **antissimétrica** se xRy e $yRx \implies x = y$ para todo x, y em X



R é **transitiva** se xRy e $yRz \implies xRz$ para todo x, y e z em X



Exemplos

relação	reflexiva	simétrica	antisimétrica	transitiva	tipo
$x \equiv y \pmod n$	sim	sim	não	sim	equivalência
$x \mid y$	sim	não	sim	sim	ordem parcial fraca
$x \leq y$	sim	não	sim	sim	ordem parcial fraca
$A \subseteq B$	sim	não	sim	sim	ordem parcial fraca
$x < y$	não	não	sim	sim	ordem parcial estrita
$A \subset B$	não	não	sim	sim	ordem parcial estrita

22.7 Relações de equivalência

Se R é uma relação, neste ponto, é comum escrevermos $x \sim_R y$ ou simplesmente $x \sim y$ em vez de xRy .

Uma relação \sim sobre X é de **equivalência** se ela é

- (i) reflexiva: $x \sim x$;
- (ii) simétrica: $x \sim y \implies y \sim x$; e
- (iii) transitiva: $x \sim y$ e $y \sim z \implies x \sim z$.

Por exemplo, para $X = \mathbb{Z}$ e $\sim =$ “é equivalente módulo n ”, em símbolos,

$$x \sim y \iff x \equiv y \pmod{n},$$

é uma relação de equivalência. A relação de igualdade $=$ também é uma relação de equivalência.

A **classe de equivalência** de um elemento x em X referente a uma relação \sim , denotado por $[x]_R$ ou simplesmente $[x]$, é o conjunto de todos os elementos em X relacionados a x , ou seja

$$[x] = \{y \in X : y \sim x\}.$$

Por exemplo, para a relação $x \sim y \iff x \equiv y \pmod{n}$ temos que

$$[7] = \{\dots, -3, 2, 7, 12, 17, 22, \dots\}$$

e portanto $[7] = [12] = [-3] = \dots$

22.8 Partições

Uma **partição** de um conjunto X é uma coleção de subconjuntos não vazios e disjuntos X_1, \dots, X_n de X tais que

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n.$$

Os conjuntos X_i são chamados de **blocos** ou **partes** da partição.

Um relação de equivalência \sim sobre X naturalmente particiona o conjunto A . Por exemplo, para $X = \mathbb{Z}$ e $x \sim y \iff x \equiv y \pmod{5}$ temos que os conjuntos

$$[0] = \{\dots, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \dots\}$$

$$[1] = \{\dots, -4, 1, 6, 11, 16, 21, \dots\}$$

$$[2] = \{\dots, -3, 2, 7, 12, 17, 22, \dots\}$$

$$[3] = \{\dots, -2, 3, 8, 13, 18, 23, \dots\}$$

$$[4] = \{\dots, -1, 4, 9, 14, 19, 24, \dots\}$$

formam uma partição de \mathbb{Z} .

Teorema 1. *As classes de equivalência de um relação de equivalência sobre um conjunto X são os blocos de uma partição de X .* \square

Teorema 2. *Em qualquer partição de um conjunto X , os blocos da partição são as classes de equivalência de uma relação de equivalência sobre X .* \square

22.9 Ordens parciais

A partir daqui, em vez de usarmos R para uma relação e escrevermos xRy , passaremos a usar o símbolo \preceq_R ou simplesmente \preceq no lugar de R e escreveremos $x \preceq_R y$ ou simplesmente $x \preceq y$ no lugar de xRy .

Uma relação \preceq sobre X é uma **ordem parcial** (fraca) se ela é

- (i) reflexiva: $x \preceq x$;
- (ii) antissimétrica: $x \preceq y$ e $y \preceq x \implies x = y$; e
- (iii) transitiva: $x \preceq y$ e $y \preceq z \implies x \preceq z$.

Por exemplo, para $X = \mathbb{Z}$, $x \preceq y \iff x | y$ para todo x e y em X é uma ordem parcial. $x \preceq y \iff x | y$. O conjunto dos números reais junto com a relação \leq também é um exemplo de ordem parcial: $x \preceq y \iff x \leq y$.

O par (X, \preceq) é chamado de um **conjunto parcialmente ordenado** (ou *poset*, do em inglês *partially ordered set*) e corresponde a um digrafo com conjunto de vértices X e conjunto de arcos \preceq . Tenha em mente que \preceq é um subconjunto de $X \times X$.

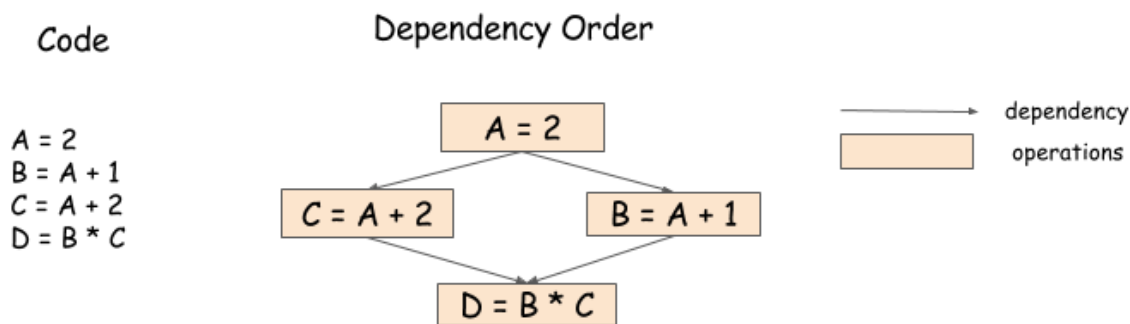


Figure 3: Fonte: [Dependency Engine](#) (mxnet)

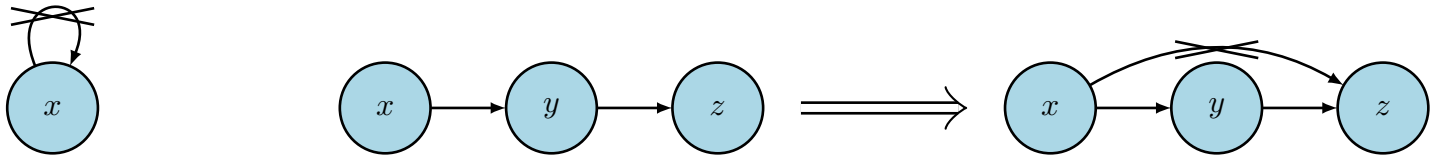
Acima há um exemplo de um conjunto parcialmente ordenado usado para analisar dependências com o objetivo de paralelizar código.

Uma relação \prec sobre X é uma **ordem parcial estrita** se ela é

- (i) antirreflexiva: $x \not\prec x$ para todo x em X ; e
- (ii) transitiva: $x \prec y$ e $y \prec z \implies x \prec z$.

22.10 Diagrama de Hasse

Um **diagrama de Hasse** de um conjunto parcialmente ordenado (X, \preceq) é o digrafo com conjunto de vértices X e conjunto de arcos \preceq após a remoção de todos os *laços* e remoção de todos os arcos implicados pela transitividade.



Assim, as relações devido a transitividade são implícitas no diagrama.

Dois elementos x e y de X são **comparáveis** em relação a \preceq se e somente se $x \preceq y$ ou $y \preceq x$. Dois elementos x e y de X são **incomparáveis** em relação a \preceq se são comparáveis, ou seja não vale que $x \preceq y$ e não vale que $y \preceq x$, em símbolos $x \not\preceq y$ e $y \not\preceq x$.

A seguir está o diagrama de Hasse do conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto de três elementos $\{x, y, z\}$, ordenado por inclusão: $A \preceq B \iff A \subseteq B$. Conjuntos distintos no mesmo nível horizontal são incomparáveis uns com os outros. Alguns outros pares, como $\{x\}$ e $\{y, z\}$, também são incomparáveis; nem $\{x\}$ está contido em $\{y, z\}$, nem $\{y, z\}$ está contido em $\{x\}$.

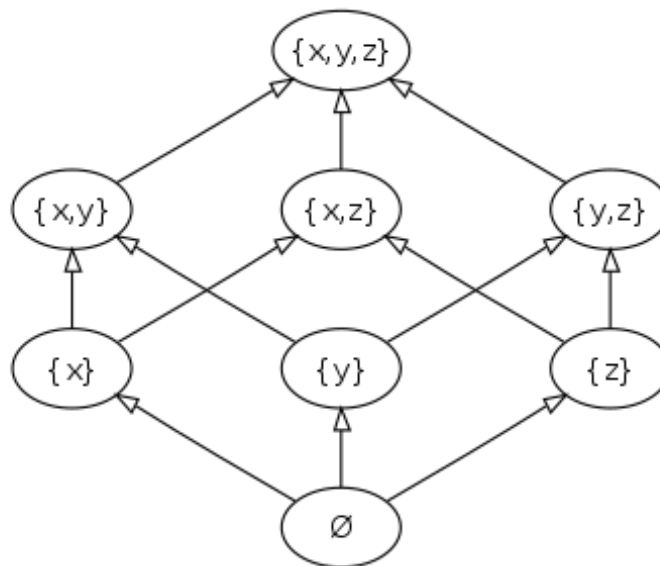


Figure 4: Fonte: **Partially ordered set** (Wikipedia)

22.11 Mínimo \times minimal e máximo \times maximal

Um elemento x em X é o **mínimo** (em relação a \preceq) se para cada elemento y em X vale que $x \preceq y$. No exemplo acima \emptyset é o mínimo. Se o mínimo existe é evidente que ele é único. É isso mesmo?

Um elemento x em X é o **máximo** (em relação a \preceq) se para cada elemento y em X vale que $y \preceq x$. No exemplo acima $\{x, y, z\}$ é o máximo. Se o máximo existe é evidente que ele é único. É isso mesmo?

Há conjuntos parcialmente ordenados que não possuem um elemento máximo e há conjuntos parcialmente ordenados que não possuem um elemento mínimo. O conjunto parcialmente ordenado a seguir, exibido através do seu diagrama de Hasse, não possui nem máximo e nem mínimo. Ele foi obtido removendo-se $\{x, y, z\}$ e \emptyset do conjunto parcialmente ordenado da figura 22.10.

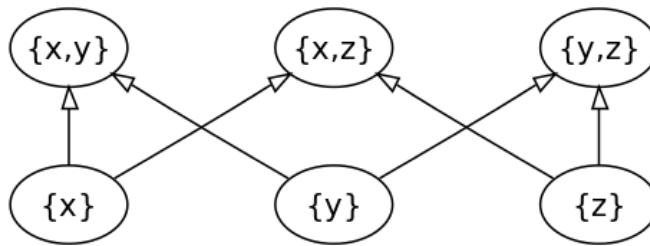


Figure 5: Fonte: [Partially ordered set](#) (Wikipedia)

Um elemento x em X é **minimal** se não há um elemento y em X , distinto de x , tal que $y \preceq x$. De maneira semelhante, um elemento x em X é **maximal** se não há um elemento y em X , distinto de x , tal que $x \preceq y$.

No exemplo da figura 22.11, $\{x\}$, $\{y\}$ e $\{z\}$ são todos minimais e $\{x, y\}$, $\{x, z\}$ e $\{y, z\}$ são todos maximais.

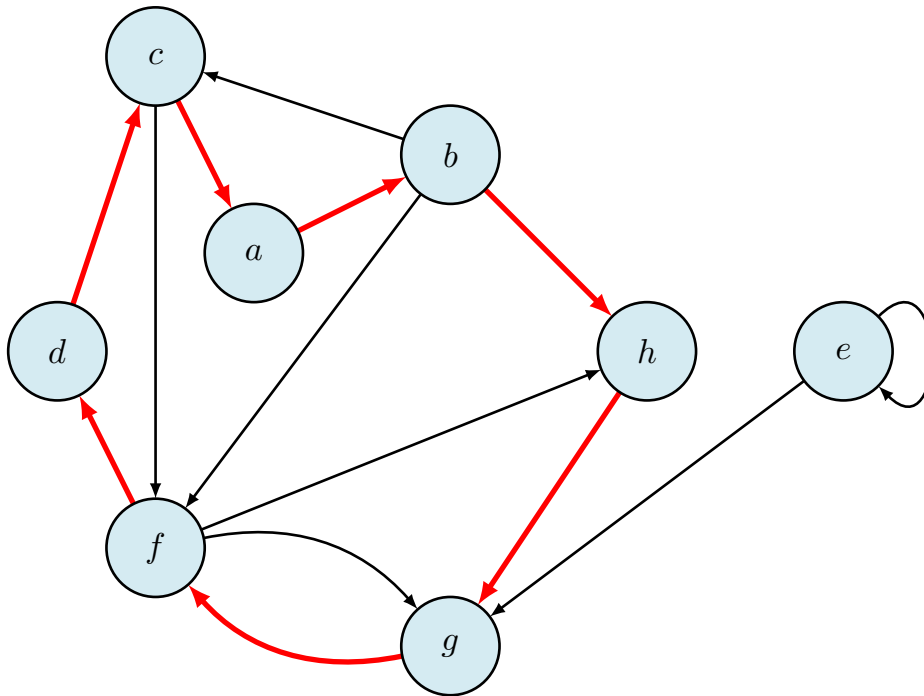
22.12 Digrafos acíclicos

Um **passeio** em um digrafo é uma sequência de vértices e arcos, que começa e termina em um vértice, e que para cada arco $\langle u \rightarrow v \rangle$ no passeio temos que u ocorre imediatamente antes do arco e v ocorre imediatamente depois.

No digrafo exibido a seguir temos que

$$(d, \langle d \rightarrow c \rangle, c, \langle c \rightarrow a \rangle, a, \langle a \rightarrow b \rangle, b, \langle b \rightarrow h \rangle, h, \langle h \rightarrow g \rangle, g)$$

é um passeio.



Um **ciclo** em um digrafo é um passeio que:

- começa e termina em um mesmo vértice; e
- todos os vértices são distintos exceto o primeiro e o último.

No digrafo anterior, $(e, \langle e \rightarrow e \rangle, e)$ é um ciclo com apenas 1 vértice, também chamado de **laço**, e

$$(d, \langle d \rightarrow c \rangle, c, \langle c \rightarrow a \rangle, a, \langle a \rightarrow b \rangle, b, \langle b \rightarrow h \rangle, h, \langle h \rightarrow g \rangle, g, \langle g \rightarrow f \rangle, f, \langle f \rightarrow d \rangle, d)$$

é um ciclo com 7 vértices distintos.

Um digrafo que não possui ciclo é **acíclico**. É comum ver-se o acrônimo DAG (*Directed Acyclic Graph*) para digrafos acíclicos.

22.13 Ordens parciais e digrafos acíclicos

O teorema a seguir diz essencialmente que o digrafo de um conjunto parcialmente ordenado é acíclico.

Teorema 3. *Os únicos ciclos em um digrafo D associado a um conjunto (X, \preceq) parcialmente ordenado são laços.*

Prova. A prova é por contradição. Suponha que D possui um ciclo com pelo menos 2 vértices distintos. Dentre todos os ciclos com pelo menos 2 vértices distintos escolha um com o menor número possível n de vértices distintos. Seja

$$C = (x_1, \langle x_1 \rightarrow x_2 \rangle, x_2, \langle x_2 \rightarrow x_3 \rangle, x_3, \dots, x_{n-1}, \langle x_{n-1} \rightarrow x_n \rangle, x_n, \langle x_n \rightarrow x_1 \rangle, x_1)$$

um tal ciclo.

Isso significa que em (X, \preceq) vale que

$$x_1 \preceq x_2 \text{ e } x_2 \preceq x_3 \text{ e } \dots \text{ e } x_{n-1} \preceq x_n \text{ e } x_n \preceq x_1$$

Se $n = 2$ então temos que

$$x_1 \preceq x_2 \text{ e } x_2 \preceq x_1.$$

Portanto, pela propriedade antissimétrica de \preceq , concluímos que $x_1 = x_2$. Isto contradiz o fato de C ser um ciclo (*todos os vértices são distintos, exceto o primeiro e o último*).

Logo, podemos supor que $n \geq 3$ e do trecho inicial de C sabemos que

$$x_1 \preceq x_2 \text{ e } x_2 \preceq x_3.$$

Pela propriedade da transitividade de \preceq , deduzimos que $x_1 \preceq x_3$. Portanto, $\langle x_1 \rightarrow x_3 \rangle$ é um arco de D e

$$(x_1, \langle x_1 \rightarrow x_3 \rangle, x_3, \dots, x_{n-1}, \langle x_{n-1} \rightarrow x_n \rangle, x_n, \langle x_n \rightarrow x_1 \rangle, x_1)$$

é um ciclo em D com pelo menos 2 vértices (x_1 e x_3) e com $n - 1$ vértices distintos. O que contradiz a nossa escolha de C .

Portanto, todos os ciclos D são laços o que conclui a nossa prova. \square

Digrafo de dependências

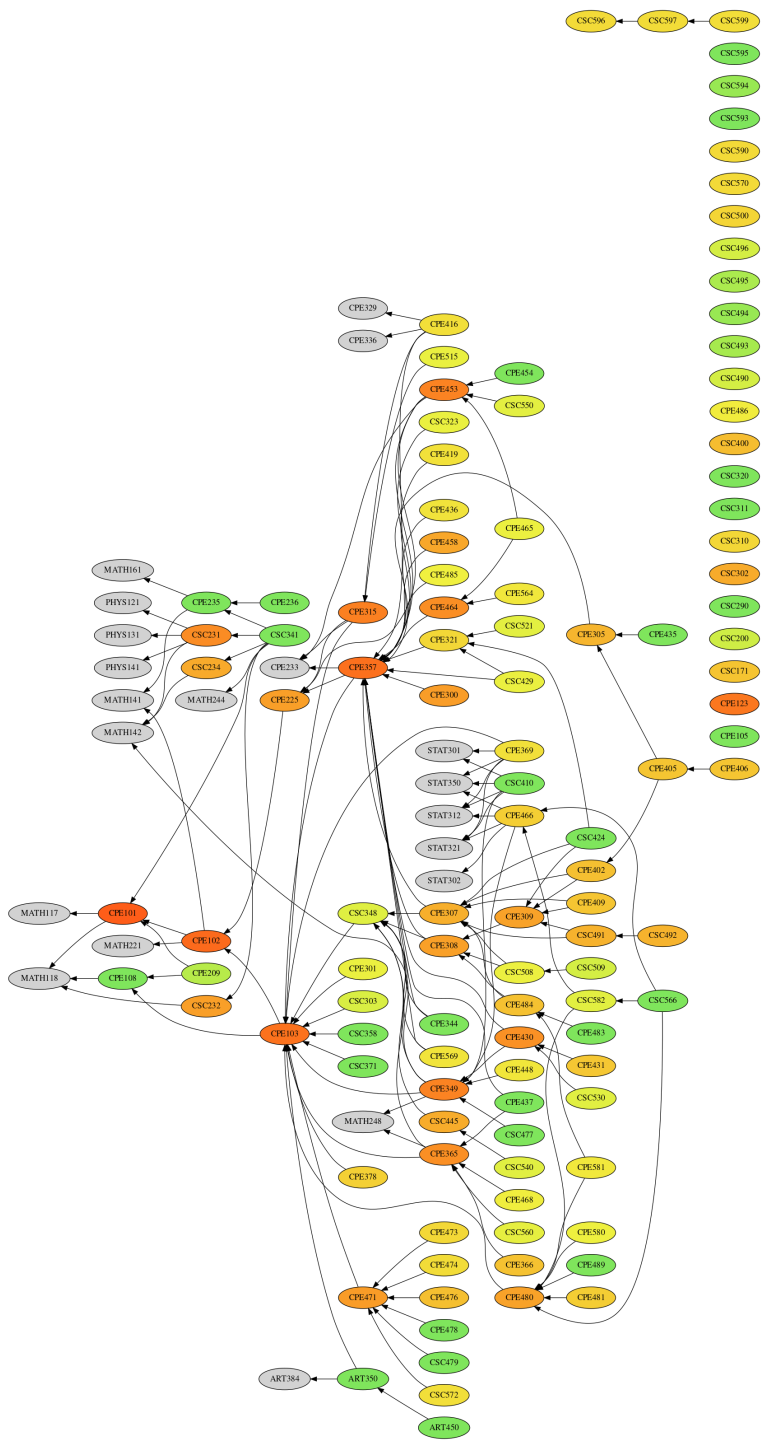


Figure 6: Fonte: dependencies chart with colors por John Clements

Aqui está o digrado de dependências (pré-requisito) feito por **Pedro Paulo Vezzá Campos** para a grade curricular antiga do BCC.

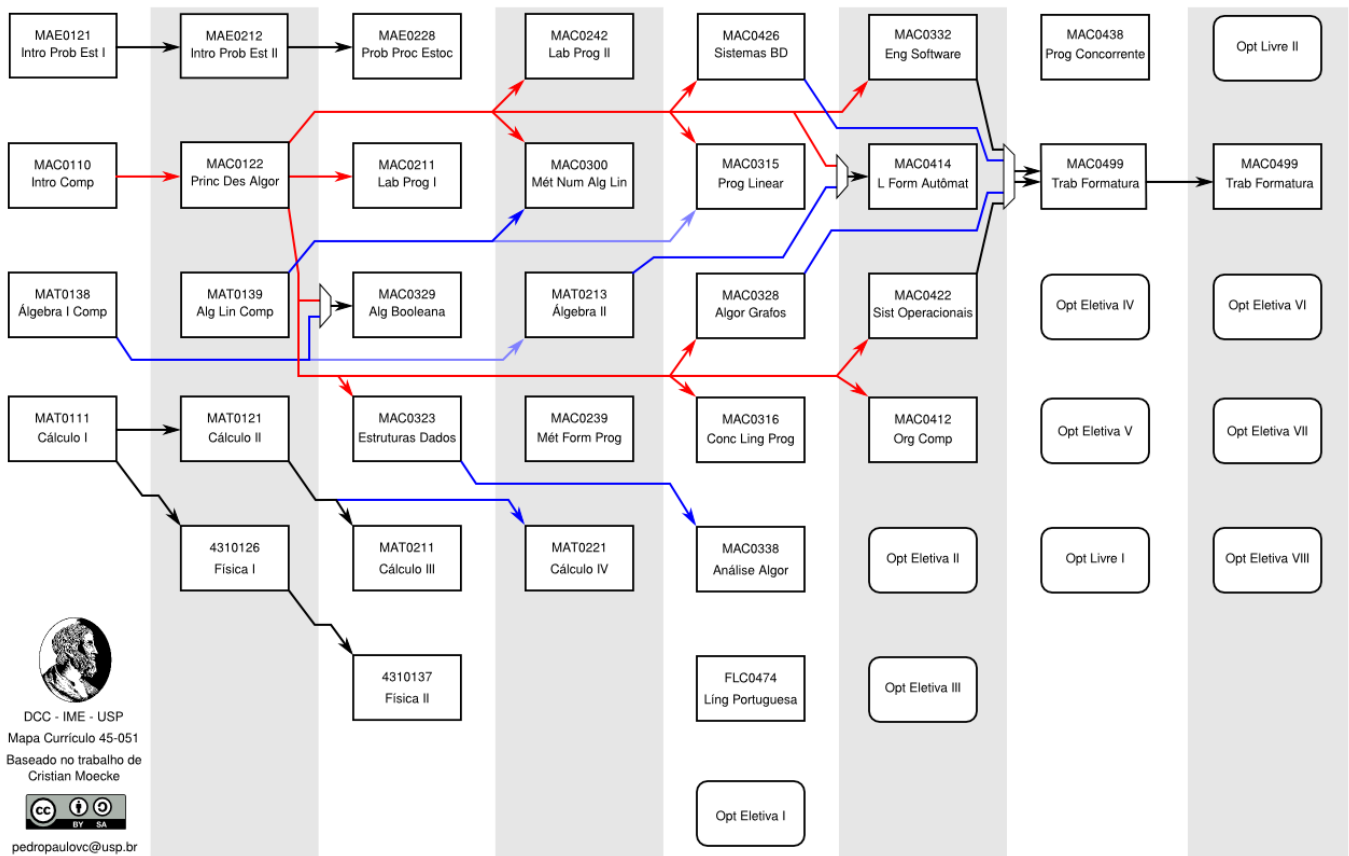


Figure 7: Fonte: Grade curricular do BCC (2014)

22.14 Ordem topológica

Quando todos os pares de elementos de um conjunto parcialmente ordenado são comparáveis temos uma **ordem total** ou **ordem linear**. Por exemplo, para $X = \mathbb{R}$ e $x \preceq y \iff x \leq y$ é uma ordem total.

Uma ordem total consistente com uma ordem parcial é chamada de uma ordenação topológica.

Uma **ordenação topológica** de um conjunto parcialmente ordenado (X, \preceq) é um conjunto totalmente ordenado (X, \preceq_T) tal que $\preceq \subseteq \preceq_T$, ou seja $x \preceq y \implies x \preceq_T y$.

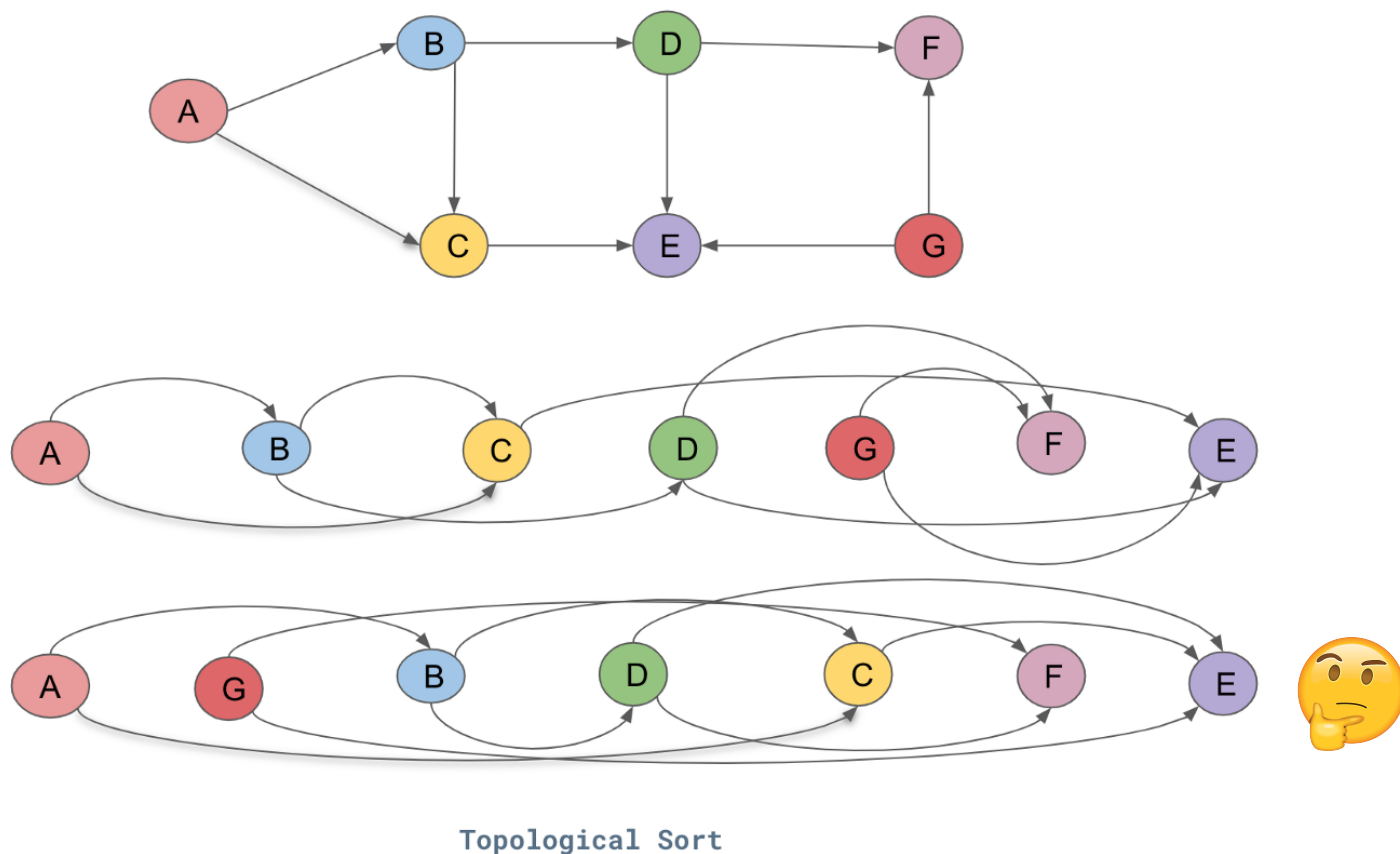


Figure 8: Fonte: [Topological Sort — In typescript and C#](#)

Neste ponto, seria interessante ter em mente que conjuntos parcialmente ordenados e digrafos acíclicos estão intimamente ligados.

22.15 Ordem parciais e ordenação topológica

Teorema 4. *Todo conjunto (X, \preceq) parcialmente ordenado finito possui uma ordenação topológica.*

A prova desse teorema se apoiará no lema a seguir e será construtiva: delineará um algoritmo que **recebe** um conjunto parcialmente ordenado e **devolve** uma ordenação topológica de seus elementos. No momento pode não parecer, devido a quantidade de ideias e conceitos *jogados aqui*, mas as aplicações deste algoritmo são numerosas.

Antes do lema, precisamos batizar mais um objeto.

Seja (X, \preceq) um conjunto parcialmente. Uma sequência (x_1, x_2, \dots, x_n) de elementos distintos de X tais que

$$x_1 \preceq x_2 \text{ e } x_2 \preceq x_3 \text{ e } \dots \text{ e } x_{n-1} \preceq x_n$$

é chamada de uma **cadeia**. Uma cadeia corresponde a um passeio no digrafo associado a (X, \preceq) . Para todo x em X também consideramos que (x) é uma cadeia.

Lema 5. *Todo conjunto (X, \preceq) parcialmente ordenado não-vazio e finito possui um elemento minimal.*

Prova. Dentre todas as cadeia de (X, \preceq) , seja $C = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma cadeia com o número n máximo de elementos. Sabemos que (X, \preceq) possui alguma cadeia pois por hipótese X é não-vazio. Sabemos que esse valor máximo n existe pois por hipótese X é finito.

Afirmamos que x_1 é um elemento minimal de (X, \preceq) .

Suponhamos por contradição que x_1 não seja um elemento minimal de (X, \preceq) . Portanto, existe x em X , distinto de x_1 , tal que $x \preceq x_1$. Consideraremos agora duas possibilidades.

Suponha que x é **está** em $\{x_2, \dots, x_n\}$. Nesse caso temos $(x_1, x_2, \dots, x, x_1)$ é uma cadeia em (X, \preceq) que corresponde a um ciclo com pelo menos dois vertices distintos (x_1 e x) no digrafo associado a (X, \preceq) . Isso contradiz o fato de digrafos associados a conjuntos parcialmente ordenados não possuírem ciclos que não são laços, como afirma o teorema 3.

Podemos agora supor que x **não está** em $\{x_2, \dots, x_n\}$. Nesse outro caso, como $x \preceq x_1$ e é distinto de x_1 , $(x, x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma cadeia de (X, \preceq) com mais elementos que C . Isso contradiz a nossa escolha de C .

Como ambas as possibilidades nos levaram a uma contradição, concluímos que (X, \preceq) possui um elemento minimal. □

Temos agora as ferramentas necessárias para provar o teorema 6.



Prova. (do teorema 6) A prova é por indução no número n de elementos em X . Se $n = 0$, então a ordenação topológica é a vazia faz o serviço.

(Hmm. Pode parecer estranho, mas se quiserem podemos ter como base da indução $n = 1$ e a argumentação será igualmente tranquila. Se $X = \{x\}$ podemos tomar $\preceq_T = \preceq$ e a ordenação topológica (x, \preceq) . Nesse caso \preceq já é uma ordem total. Bem, voltemos a prova.)

Suponhamos por hipótese da indução que todo conjunto parcialmente ordenados com n elementos, **para algum** $n \geq 0$, admite uma ordenação topológica. Mostraremos que se (X, \preceq) é um conjunto parcialmente ordenado com $n + 1$ elementos, então (X, \preceq) possui uma ordenação topológica (X, \preceq_T) .

Como $n + 1 \geq 1$, então (X, \preceq) é não vazio e finito e, pelo lema 5, possui um elemento minimal que chamaremos de x . Considere o conjunto parcialmente ordenado (X', \preceq') em que $X' = X - \{x\}$ e \preceq' é a restrição de \preceq aos elementos de X' : \preceq' é resultante de \preceq após a remoção de todos os pares $x \preceq y$ com y em X .

Como X' tem n elementos, pela hipótese da indução, temos que (X', \preceq') possui uma ordem topológica (X', \preceq'_T) . Defina a relação $\preceq_T = \preceq'_T \cup \{(x, y) : y \in X\}$. Desta forma, como pode ser verificado com mais algum trabalho, (X, \preceq_T) é uma ordem total sobre X em que $\preceq \subset \preceq_T$.

Portanto, pelo princípio da indução finita, concluímos que todo conjunto (X, \preceq) parcialmente ordenado admite uma ordem topológica. □

22.16 Dilworth e suas cadeias e anticadeias

O texto abaixo, escrito de última hora, é um rascunho de rabisco.

Antes de mais nada, Dilworth foi um matemática, não um dono de prisões.

Seja (X, \preceq) um conjunto parcialmente ordenado. Em contraposição ao conceito de cadeia há as anticadeias. Um conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de elemento de X dois a dois incomparáveis é dito uma **anticadeia**: $x_i \not\preceq x_j$ e $x_j \not\preceq x_i$ para todo para i, j com $i \neq j$.

Um cadeia com o maior número possível de elementos que termina em um elemento x é chamada de **cadeia crítica** até x . O número de elementos $p(x)$ que estritamente precedem x em uma cadeia mínima até x é a **profundidade** de x .

Suponha que X é um conjunto de disciplinas e $x \preceq y$ corresponde a relação x é pré-requisito de y . Então $p(x)$ é o menor número de disciplinas que devem ser cursadas antes que a disciplina x possa ser cursada. Deste fato é que vem o adjectivo *crítico* adicionado à cadeia.



Lema 6. Para todo digrafo acíclico $D = (X, \preceq)$ com n vértices e todo inteiro positivo t vale uma, e apenas uma, das seguintes alternativas

- D possui uma cadeia com mais do que t vértices, ou
- D possui uma anti-cadeia com pelo menos n/t vértices.

Prova. (rascunho)

Seja k o maior número de elementos em uma cadeia de X .

Considere os conjuntos X_0, X_1, \dots, X_{k-1} definidos como

$$X_i = \{x \in X : p(x) = i\}.$$

Pode-se verificar que X_0, X_1, \dots, X_{k-1} são blocos de uma partição de X e que cada X_i é uma anticadeia.

Seja $m = \max\{|X_i| : i = 0, 1, \dots, k-1\}$.

Temos que $k \times m \geq n$.

Se $k \leq t$, então

$$t \times m \geq k \times m \geq n \quad \implies \quad m \geq \frac{n}{t}.$$

Se $m < n/t$, então

$$k \times \frac{n}{t} > k \times m \geq n \quad \implies \quad k > t.$$

Não podemos ter $k > t$ e $m \geq n/t$ pois

$$n = t \times \frac{n}{t} > k \times m \geq n.$$

□

Esse lema pode ser usado para estimar limites para o comprimento de cadeias críticas e de tamanho de anti-cadeias com consequência em escalonamento de tarefas.

22.17 Conversa de bar



Figure 9: Fonte: therichest.com