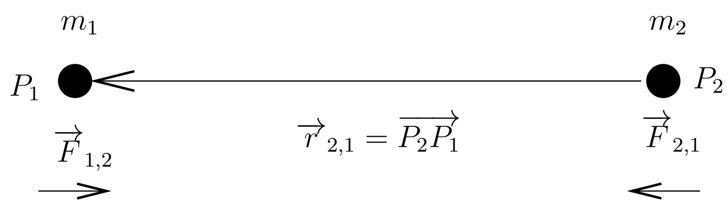
Leis de Newton do movimento

A lei de força mais antiga conhecida é a *lei da gravitação universal* que Isaac Newton[2] publicou no seu *Principia Mathematica* [2]. Esta lei exprime as forças de interação entre dois corpos, um corpo de massa m_1 em um ponto P_1 e um corpo de massa m_2 em um ponto P_2, cujo deslocamento relativo é $\overrightarrow{r}_{2,1} = \overrightarrow{P_2P_1}$. Ela diz que:

$$\overrightarrow{F}_{2,1} = \frac{Gm_1m_2}{r_{2,1}^2}\hat{r}_{2,1} = -\overrightarrow{F}_{1,2} \tag{1}$$

na qual $r_{2,1}$ é a distância entre os centros de massa dos corpos e $\hat{r}_{2,1} = \overrightarrow{r}_{2,1}/r_{2,1}$ é o vetor unitário da direção que vai do corpo 2 ao corpo 1, conforme a ilustração abaixo:



Em palavras, (1) diz que a *magnitude* da força gravitacional é diretamente proporcional ao produto das massas dos corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa. A força está dirigida ao longo da reta que passa pelos centros de massa dos dois corpos e é *atrativa* se a força $\overrightarrow{F}_{2,1}$ exercida pelo corpo 1 sobre o corpo 2 está dirigida para o corpo 1, em sentido $\overrightarrow{r}_{2,1}$.

A constante proporcional G que aparece em (1) é uma constante universal, ou seja, é a mesma para quaisquer corpos. Essa constante é chamada constante gravitacional. Seu valor é

$$G \approx 8.65 \times 10^{-13}\text{km}^3\ \text{kg}^{-1}\ \text{h}^{-2} \tag{2}$$

Devido a segunda lei de Newton da mecânica clássica [3], sabemos que

$$\Sigma\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} \tag{3}$$

na qual $\Sigma\overrightarrow{F}$ é a força resultante, m é a massa do corpo e $\overrightarrow{a}$ é o vetor aceleração do corpo. A aceleração possui a mesma direção e o mesmo sentido da força.

A título de exemplo, vamos ilustrar um caso simples em que uma nave (turtleship) está sujeita a atração gravitacional de dois astros, digamos a Terra e a Lua. Considerando

[2] As leis de Newton do movimento é um dos tópicos da disciplina Física I.

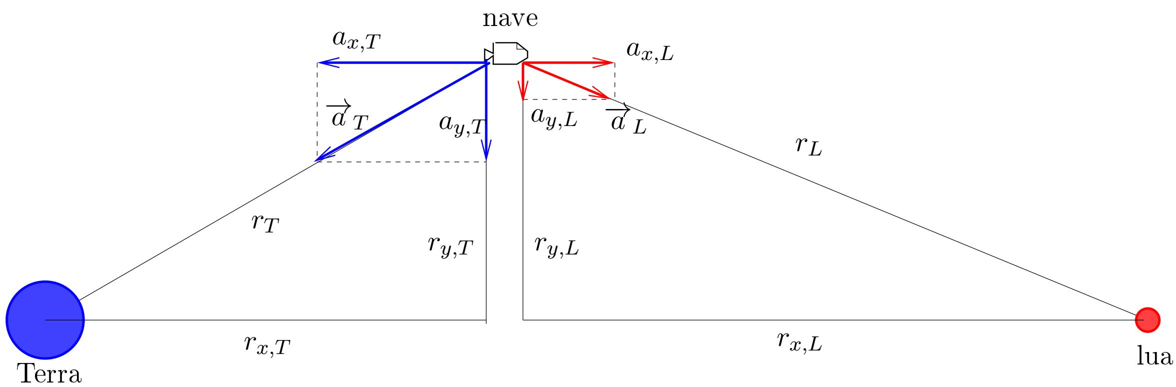
o corpo no ponto P_1 de (1) como sendo a Terra, e o corpo no ponto P_2 de (1) bem como o corpo de (3) como sendo a "turtleship", e combinando (1) e (3) obtemos que

$$\overrightarrow{a}_T = \frac{Gm_T}{r_T^2}\hat{r}_T \tag{4}$$

na qual $\overrightarrow{a}_T$ é o vetor aceleração da força gravitacional exercida pela Terra sobre a nave, m_T é a massa da Terra, r_T é a distância da nave ao centro da Terra e $\hat{r}_T$ é o vetor unitário da direção que vai da nave à Terra. De maneira similar, temos que

$$\overrightarrow{a}_L = \frac{G\,m_L}{r_L^2}\hat{r}_L \tag{5}$$

na qual $\overrightarrow{a}_L$ é o vetor aceleração da força gravitacional exercida pela Lua sobre a nave, m_L é a massa da Lua, r_L é a distância da nave ao centro da Lua e $\hat{r}_T$ é o vetor unitário da direção que vai da nave à Lua. A ilustração abaixo apresenta a disposição dos astros e da nave destacando as distâncias e as acelerações.



Das equações (4) e (5) concluímos que a aceleração da força resultante é

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} &= \overrightarrow{a}_T + \overrightarrow{a}_L \\ &= \frac{Gm_T}{r_T^2}\hat{r}_T + \frac{Gm_L}{r_L^2}\hat{r}_L\ .\end{aligned} \tag{6}$$

No caso geral, temos um número arbitrário de astros fornecidos em um conjunto A. A aceleração resultante da "turtleship", nesse caso, é calculada como a soma das contribuições exercidas por cada astro c pertencente ao conjunto A:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} &= \sum_{\forall c\in A} \overrightarrow{a}_c \\ &= \sum_{\forall c\in A} \left\{\frac{Gm_c}{r_c^2}\hat{r}_c\right\}\ .\end{aligned} \tag{7}$$

Suponha agora que desejemos determinar para cada instante t o vetor posição $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t))$ de uma nave que está sob a atração gravitacional desse conjunto de corpos celestes. Sabemos que o vetor aceleração instantânea é

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

e que seus componentes (a_x, a_y) são tais que

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{e} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \ . \tag{8}$$

As equações de Newton (8) reduzem o problema de determinar o vetor posição $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ para subproblemas unidimensionais. Na próxima seção mostramos como as equações de Newton podem ser usadas para determinarmos computacionalmente uma aproximação de $x(t)$ e, similarmente, de $y(t), v_x(t)$ e $v_y(t)$.

Dojo do "andar de soquinho"

Consideremos a equação da segunda lei de Newton na sua versão unidimensional $F_x = m\,a_x$ para um objeto de massa m. No nosso caso a força F_x é a gravitacional e pela lei da gravitação universal é função da posição x, de modo que a equação diferencial para a velocidade se escreve:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \ .$$

Para obter a posição, recorremos à relação entre posição e velocidade,

$$v_x = \frac{dx}{dt} \ .$$

Se conhecermos a posição e a velocidade do objeto num certo instante, estas equações nos permitem determinar $v_x(t)$ e $x(t)$ em qualquer instante t. No entanto, no caso geral, não podemos resolver estas equações analiticamente. Isso significa que temos que recorrer ao computador através de um método numérico. Esse método deverá ser capaz de estimar a velocidade e posição do objeto num certo instante, dadas, por exemplo, a posição e velocidade x_0 e v_0 em um instante inicial t_0.

O método numérico mais simples para resolver equações diferenciais consiste em substituir as derivadas por razões entre variações da função e da respectiva variável. No caso presente temos que

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} \rightarrow \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad &\Rightarrow \quad \Delta v_x \approx a_x \Delta t \\ \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad &\Rightarrow \quad \Delta x \approx v_x \Delta t \end{aligned}$$

A ideia do Δt é substituir a variável contínua t por uma variável *discreta*; ou seja, fazemos o t "andar de soquinho". Assim, dado um *instante* t, o *instante seguinte* é $t + \Delta t$.

Agora, dados a posição x, a velocidade v e a aceleração a num instante t, podemos calcular seus valores x', v', a' no instante seguinte $t + \Delta t$ pelas fórmulas:

$$x' = x + v\Delta t + a\Delta t^2/2 \ , \tag{9}$$

$$v' = v + a\Delta t \ . \tag{10}$$

Para fechar as equações, lembrem que a aceleração no instante t é dada pela equação 7.

O método do "andar de soquinho" descrito acima (Equações (9) e (10)) é uma pequena variação do *método de Euler*[3] para o cálculo das posições e velocidades de um corpo sujeito a uma força.

Curiosidade. O método de Euler é dito um método de 1^a ordem. A razão para isto encontra-se no fato de podermos escrever, usando o desenvolvimento em série de Taylor[4]:

$$\begin{aligned} v' &= v + a\Delta t + \frac{da}{dt}\frac{(\Delta t)^2}{2} + \cdots \\ x' &= x + v\Delta t + \frac{dv}{dt}\frac{(\Delta t)^2}{2} + \cdots \end{aligned}$$

o que significa que, ao aplicar o método de Euler, estamos desprezando termos como potências de Δt iguais ou superiores a 2 dizemos "termos de 2^a ordem ou superior".

Esta pequena explicação sobre o método de Euler para resolver as equações de Newton é devida a Pedro Vieira Alberto [1].

Referências

[1] Pedro Vieira Alberto, *Alguns métodos numéricos para resolver equações de Newton*, `http://nautilus.fis.uc.pt/personal/pvalberto/apontamentos/metodos_ode.pdf`, Fevereiro 2004.

[2] Herch Moysés Nussenzveig, *Curso de Física Básica: 1-Mecânica*, Edgard Blücher, 1981.

[3] Hugh D. Young e Roger A. Freedman, *Sears e Zemansky's Física I: Mecânica*, Addison Wesley, 2003.

[3] O método de Euler é um dos tópicos de disciplinas de Cálculo Numérico, onde também são considerados métodos mais precisos como o de Runge-Kutta.

[4] Série de Taylor é (ou era?) um dos tópicos da disciplina Cálculo II.