Melhores momentos

AULA 1

Recursão

A resolução recursiva de um problema tem tipicamente a seguinte estrutura:

```
se a instância em questão é “pequena”
   resolva-a diretamente (use força bruta
   se necessário);
senao
   reduza-a a uma instância “menor” do
   mesmo problema,
   aplique o método à instância menor e
   volte à instância original.
```

Fatorial recursivo

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{quando } n = 0, \\ n \times (n-1)!, & \text{quando } n > 0. \end{cases}$$

```
long
fatorial(long n)
{
  if (n == 0) return 1;
  return n * fatorial(n-1);
}
```

Diagramas de execução

fatorial(3)

n
3

fatorial(2)

n
2

fatorial(1)

n
1

fatorial(0)

n
0

return 0

return n * fatorial(0) = 1 * 1

return n * fatorial(1) = 2 * 1 = 2

return n * fatorial(2) = 3 * 2 = 6

Fatorial iterativo

```
long
fatorial(long n)
{
   int i, ifat;
   ifat = 1;
   for (i = 1; /*1*/ i <= n; i++)
       ifat *= i;
   return ifat;
}
```

Em /*1*/ vale que `ifat == (i-1)!`

AULA 2

Mais recursão

PF 2.1, 2.2, 2.3   S 5.1

http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/recu.html

Problema do máximo

PF 2.2 e 2.3

http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/recu.html

Problema do máximo

Problema: encontrar o valor de um elemento máximo de um vetor `v[0 . . n-1]`.

Entra:

	0				4						n-1
v	10	44	10	35	99	40	20	65	55	50	38

Sai: `máximo == 99`

Máximo recursivo

```
int maximoR(int n, int v[])
{
  if (n == 1)
      return v[0];
  else
      {
          int x;
          x = maximoR(n-1, v);
          if (x > v[n-1])
              return x;
          else
              return v[n-1];
      }
}
```

. . . alternativamente . . .

```
int maximoR(int n, int v[])
{
    int x;
    if (n == 1) return v[0];
    x = maximoR(n-1, v);
    if (x > v[n-1]) return x;
    return v[n-1];
}
```

Outro máximo recursivo

```
int maximo(int n, int v[]) {
   return maxR(0, n, v);
}

int maxR(int i, int n, int v[])
{
   if (i == n-1) return v[0];
   else {
          int x;
          x = maximoR(i+1, n, v);
          if (x > v[i]) return x;
          else return v[i];
   }
}
```

. . . alternativamente . . .

```
int maximo(int n, int v[]) {
    return maxR(0, n, v);
}

int maxR(int i, int n, int v[])
{
    int x;

    if (i == n-1) return v[0];
    x = maximoR(i+1, n, v);
    if (x > v[i]) return x;
    return v[i];
}
```

Binomial recursivo

Regra de Pascal

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0, & \text{quando } n = 0 \text{ e } k > 0, \\ 1, & \text{quando } n \geq 0 \text{ e } k = 0, \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, & \text{quando } n, k > 0. \end{cases}$$

Binomial

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	k
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	...	
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	...	
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	...	
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	...	
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	...	
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	...	
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	...	
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	...	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
n											

Binomial recursivo

```
long
binomialR0(int n, int k)
{
    if (n == 0 && k >  0) return 0;
    if (n >= 0 && k == 0) return 1;
    return binomialR0(n-1, k) +
           binomialR0(n-1, k-1);
}
```

binomialR0(3,2)

```
binomialR0(3,2)
  binomialR0(2,2)
    binomialR0(1,2)
      binomialR0(0,2)
      binomialR0(0,1)
    binomialR0(1,1)
      binomialR0(0,1)
      binomialR0(0,0)
  binomialR0(2,1)
    binomialR0(1,1)
      binomialR0(0,1)
      binomialR0(0,0)
    binomialR0(1,0)
binom(3,2)=3.
```

Binomial iterativo

```
long binomialI(int n, int k)
{
   int i, j, bin[MAX][MAX];

   for (j = 1; j <= k; j++) bin[0][k] = 0;
   for (i = 0; i <= n; i++) bin[i][0] = 1;

   for (i = 1; i <= n; i++)
      for (j = 1; j <= k; j++)
         bin[i][j] = bin[i-1][j] +
                     bin[i-1][j-1];

   return bin[n][k];
}
```

Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./binomialI 30 2
binom(30,2)=435
real                          0m0.002s
user                          0m0.000s
sys                           0m0.000s

meu_prompt> time ./binomialR0 30 2
binom(30,2)=435
real                           0m0.002s
user                           0m0.000s
sys                            0m0.000s
```

Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./binomialI 30 20
binom(30,20)=30045015
real                       0m0.002s
user                       0m0.000s
sys                        0m0.000s

meu_prompt> time ./binomialR0 30 20
binom(30,20)=30045015
real                       0m17.886s
user                       0m17.881s
sys                         0m0.000s
```

Resolve subproblemas muitas vezes

```
binomialR0(3,2)
  binomialR0(2,2)
    binomialR0(1,2)
      binomialR0(0,2)
      binomialR0(0,1)
    binomialR0(1,1)
      binomialR0(0,1)
      binomialR0(0,0)
  binomialR0(2,1)
    binomialR0(1,1)
      binomialR0(0,1)
      binomialR0(0,0)
    binomialR0(1,0)
binom(3,2)=3.
```

Resolve subproblemas muitas vezes

```
binomialR0(5,4)
  binomialR0(4,4)
    binomialR0(3,4)
      binomialR0(2,4)
        binomialR0(1,4)
          binomialR0(0,4)
          binomialR0(0,3)
        binomialR0(1,3)
          binomialR0(0,3)
          binomialR0(0,2)
      binomialR0(2,3)
        binomialR0(1,3)
          binomialR0(0,3)
          binomialR0(0,2)
        binomialR0(1,2)
          binomialR0(0,2)
          binomialR0(0,1)
    binomialR0(3,3)
      binomialR0(2,3)
        binomialR0(1,3)
          binomialR0(0,3)
          binomialR0(0,2)
        binomialR0(1,2)
          binomialR0(0,2)
          binomialR0(0,1)
      binomialR0(2,2)
        binomialR0(1,2)
          binomialR0(0,2)
          binomialR0(0,1)
        binomialR0(1,1)
          binomialR0(0,1)
          binomialR0(0,0)
  binomialR0(4,3)
    binomialR0(3,3)
      binomialR0(2,3)
        binomialR0(1,3)
          binomialR0(0,3)
          binomialR0(0,2)
        binomialR0(1,2)
          binomialR0(0,2)
          binomialR0(0,1)
      binomialR0(2,2)
        binomialR0(1,2)
          binomialR0(0,2)
          binomialR0(0,1)
        binomialR0(1,1)
          binomialR0(0,1)
          binomialR0(0,0)
    binomialR0(3,2)
      binomialR0(2,2)
        binomialR0(1,2)
          binomialR0(0,2)
          binomialR0(0,1)
        binomialR0(1,1)
          binomialR0(0,1)
          binomialR0(0,0)
      binomialR0(2,1)
        binomialR0(1,1)
          binomialR0(0,1)
          binomialR0(0,0)
        binomialR0(1,0)
binom(5,4)=5.
```

Mais eficiente . . .

Regra de Pascal

$$\binom{\mathtt{n}}{\mathtt{k}} = \begin{cases} 0, & \text{quando } \mathtt{n} < \mathtt{k}, \\ 1, & \text{quando } \mathtt{n} = \mathtt{k} \text{ ou } \mathtt{k} = \mathtt{0}, \\ \binom{\mathtt{n}-1}{\mathtt{k}} + \binom{\mathtt{n}-1}{\mathtt{k}-1}, & \text{quando } \mathtt{n}, \mathtt{k} > 0. \end{cases}$$

Mais eficiente . . .

```
long
binomialR1(int n, int k)
{
  if (n < k) return 0;
  if (n == k || k == 0) return 1;
  return binomialR1(n-1, k) +
           binomialR1(n-1, k-1);
}
```

Resolve subproblemas muitas vezes?

```
binomialR1(3,2)
  binomialR1(2,2)
  binomialR1(2,1)
    binomialR1(1,1)
    binomialR1(1,0)
binom(3,2)=3.
```

Resolve subproblemas muitas vezes?

```
binomialR1(5,4)
  binomialR1(4,4)
  binomialR1(4,3)
    binomialR1(3,3)
    binomialR1(3,2)
      binomialR1(2,2)
      binomialR1(2,1)
        binomialR1(1,1)
        binomialR1(1,0)
binom(5,4)=5.
```

Resolve subproblemas muitas vezes?

```
binomialR1(6,4)
  binomialR1(5,4)
    binomialR1(4,4)
    binomialR1(4,3)
      binomialR1(3,3)
      binomialR1(3,2)
        binomialR1(2,2)
        binomialR1(2,1)
          binomialR1(1,1)
          binomialR1(1,0)
  binomialR1(5,3)
    binomialR1(4,3)
      binomialR1(3,3)
      binomialR1(3,2)
        binomialR1(2,2)
        binomialR1(2,1)
          binomialR1(1,1)
          binomialR1(1,0)
    binomialR1(4,2)
      binomialR1(3,2)
        binomialR1(2,2)
        binomialR1(2,1)
          binomialR1(1,1)
          binomialR1(1,0)
      binomialR1(3,1)
        binomialR1(2,1)
          binomialR1(1,1)
          binomialR1(1,0)
        binomialR1(2,0)
binom(6,4)=15.
```

Sim!

Resolve subproblemas muitas vezes?

```
binomialR1(7,4)
  binomialR1(6,4)
    binomialR1(5,4)
      binomialR1(4,4)
      binomialR1(4,3)
        binomialR1(3,3)
        binomialR1(3,2)
          binomialR1(2,2)
          binomialR1(2,1)
            binomialR1(1,1)
            binomialR1(1,0)
    binomialR1(5,3)
      binomialR1(4,3)
        binomialR1(3,3)
        binomialR1(3,2)
          binomialR1(2,2)
          binomialR1(2,1)
            binomialR1(1,1)
            binomialR1(1,0)
      binomialR1(4,2)
        binomialR1(3,2)
          binomialR1(2,2)
          binomialR1(2,1)
            binomialR1(1,1)
            binomialR1(1,0)
        binomialR1(3,1)
          binomialR1(2,1)
            binomialR1(1,1)
            binomialR1(1,0)
          binomialR1(2,0)
  binomialR1(6,3)
    binomialR1(5,3)
      binomialR1(4,3)
        binomialR1(3,3)
        binomialR1(3,2)
          binomialR1(2,2)
          binomialR1(2,1)
            binomialR1(1,1)
            binomialR1(1,0)
      binomialR1(4,2)
        binomialR1(3,2)
          binomialR1(2,2)
          binomialR1(2,1)
            binomialR1(1,1)
            binomialR1(1,0)
        binomialR1(3,1)
          binomialR1(2,1)
            binomialR1(1,1)
            binomialR1(1,0)
          binomialR1(2,0)
    binomialR1(5,2)
      binomialR1(4,2)
        binomialR1(3,2)
          binomialR1(2,2)
          binomialR1(2,1)
            binomialR1(1,1)
            binomialR1(1,0)
        binomialR1(3,1)
          binomialR1(2,1)
            binomialR1(1,1)
            binomialR1(1,0)
          binomialR1(2,0)
      binomialR1(4,1)
        binomialR1(3,1)
          binomialR1(2,1)
            binomialR1(1,1)
            binomialR1(1,0)
          binomialR1(2,0)
        binomialR1(3,0)
binom(7,4)=35.
```

Sim!

E agora? Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./binomialI 30 20
binom(30,20)=30045015
real                          0m0.002s
user                          0m0.000s
sys                           0m0.000s

meu_prompt> time ./binomialR1 30 20
binom(30,20)=30045015
real                          0m0.547s
user                          0m0.544s
sys                           0m0.000s
```

E agora? Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./binomialI 40 30
binom(40,30)=847660528
real                           0m0.002s
user                           0m0.000s
sys                            0m0.000s

meu_prompt> time ./binomialR1 40 30
binom(40,30)=847660528
real                           0m14.001s
user                           0m13.997s
sys                             0m0.000s
```

Desempenho de `binomialR1`

Quantas chamadas recursivas faz a função `binomialR1`?

É o dobro do número de adições.

Vamos calcular o número de adições feitas pela chamada `binomialR1(n,k)`.

Seja $T(n,k)$ o número de adições feitas pela chamada `binomialR1(n,k)`.

Número de adições

```
long
binomialR1(int n, int k)
{
   if (n < k) return 0;
   if (n == k || k == 0) return 1;
   return binomialR1(n-1, k) +
          binomialR1(n-1, k-1);
}
```

Número de adições

linha	número de adições
1	$= 0$
2	$= 0$
3	$= \mathtt{T}(\mathtt{n}{-}1,\mathtt{k})$
4	$= \mathtt{T}(\mathtt{n}{-}1,\mathtt{k}{-}1) + 1$

$$\mathtt{T}(\mathtt{n},\mathtt{k}) = \mathtt{T}(\mathtt{n}{-}1,\mathtt{k}{-}1) + \mathtt{T}(\mathtt{n}{-}1,\mathtt{k}) + 1$$

Relação de recorrência!

Relação de recorrência

$$\mathtt{T}(\mathtt{n},\mathtt{k}) = \begin{cases} 0, & \mathtt{n} < \mathtt{k}, \\ 0, & \mathtt{n} = \mathtt{k} \text{ ou } \mathtt{k} = 0, \\ \mathtt{T}(\mathtt{n}-1,\mathtt{k}) + \mathtt{T}(\mathtt{n}-1,\mathtt{k}-1) + 1, & \mathtt{n},\mathtt{k} > 0. \end{cases}$$

Quanto vale $\mathtt{T}(\mathtt{n},\mathtt{k})$?

Número $T(n, k)$ de adições

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	k
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	...	
3	0	2	2	0	0	0	0	0	0	...	
4	0	3	5	3	0	0	0	0	0	...	
5	0	4	9	9	4	0	0	0	0	...	
6	0	5	14	19	14	5	0	0	0	...	
7	0	6	20	34	34	20	6	0	0	...	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
n											

Binomial

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	k
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	...	
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	...	
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	...	
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	...	
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	...	
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	...	
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	...	
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	...	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
n											

Número de adições

O número $\texttt{T}(\texttt{n},\texttt{k})$ de adições feitas pela chamada `binomialR1(n,k)` é

$$\binom{\texttt{n}}{\texttt{k}} - 1\,.$$

O consumo de tempo da função é proporcional ao número de iterações e portanto é "*proporcional*" a $\binom{\texttt{n}}{\texttt{k}}$.

Quando o valor de $\texttt{k}$ é aproximadamente $\texttt{n}/2$

$$\binom{\texttt{n}}{\texttt{k}} \geq 2^{\frac{\texttt{n}}{2}}$$

e o consumo de tempo é dito "*exponencial*".

Conclusões

Devemos **evitar** resolver o mesmo subproblema várias vezes.

O número de chamadas recursivas feitas por `binomialR1(n,k)` é

$$2 \times \binom{n}{k} - 2\,.$$

Binomial mais eficiente ainda ...

Supondo $n \geq k \geq 1$ temos que

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \times \frac{n}{k} \\
&= \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} \times \frac{n}{k} \\
&= \binom{n-1}{k-1} \times \frac{n}{k}\,.
\end{aligned}$$

Binomial mais eficiente ainda ...

Logo, supondo $n \geq k \geq 1$, podemos escrever

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} n, & \text{quando } k = 1, \\ \binom{n-1}{k-1} \times \frac{n}{k}, & \text{quando } k > 1. \end{cases}$$

```
long
binomialR2(int n, int k)
{
    if (k == 1) return n;
    return binomialR2(n-1, k-1) * n / k;
}
```

A função binomialR2 faz recursão de cauda (*Tail recursion*).

binomialR2(20,10)

```
binomialR2(20,10)
  binomialR2(19,9)
    binomialR2(18,8)
      binomialR2(17,7)
        binomialR2(16,6)
          binomialR2(15,5)
            binomialR2(14,4)
              binomialR2(13,3)
                binomialR2(12,2)
                  binomialR2(11,1)
binom(20,10)=184756.
```

E agora, qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./binomialI 30 2
binom(30,2)=435
real                      0m0.002s
user                      0m0.000s
sys                       0m0.000s

meu_prompt> time ./binomialR2 30 2
binom(30,2)=435
real                       0m0.002s
user                       0m0.000s
sys                        0m0.000s
```

E agora, qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./binomialI 30 20
binom(30,20)=30045015
real                    0m0.002s
user                    0m0.000s
sys                     0m0.000s
```

```
meu_prompt> time ./binomialR2 30 20
binom(30,20)=30045015
real                    0m0.002s
user                    0m0.000s
sys                     0m0.000s
```

Conclusão

O número de chamadas recursivas feitas por `binomialR2(n,k)` é $k - 1$.