AULA 17

Análise de algoritmo

Programming Pearls: Algorithm Design Techniques,
Jon Bentley, Addison-Wesley, 1986

Segmento de soma máxima

Um **segmento** de um vetor v[0 . . n−1] é qualquer subvetor da forma v[e . . d].

Problema: Dado um vetor v[0 . . n−1] de números inteiros, determinar um segmento v[e . . d] de soma máxima.

Entra:

	0									n−1
v	31	−41	59	26	−53	58	97	−93	−23	84

Segmento de soma máxima

Sai:

	0		2				6			n−1
v	31	−41	59	26	−53	58	97	−93	−23	84

v[e . . d] = v[2 . . 6] é segmento de soma máxima.

v[2 . . 6] tem soma **187**.

Segmento de soma máxima

Problema (versão simplificada): Determinar a soma máxima de um segmento de um dado vetor v[0 . . n−1].

Entra:

	0									n−1
v	31	−41	59	26	−53	58	97	−93	−23	84

Sai:

	0		2				6			n−1
v	31	−41	59	26	−53	58	97	−93	−23	84

A soma máxima é **187**.

Algoritmo café-com-leite

```
void segMax3(int v[],int n,int *e,int *d,
                        int *sMax){
  int i, j, k, s;
  *sMax = 0; *e = *d = -1;
  for (i = 0; /*1*/ i < n; i++)
    for (j = i; j < n; j++) {
       s = 0;
       for (k = i; /*2*/ k <= j; k++)
          s += v[k];
       if (s > *sMax){
          *sMax = s; *e = i; *d = j;
       }
    }
}
```

Correção de algoritmos

Estrutura "típica" de demonstrações da correção de algoritmos iterativos através de suas **relações invariantes** consiste em:

1. verificar que a relação vale no início da primeira iteração;
2. demonstrar que se a relação vale no início da iteração, então ela vale no final da iteração (com os papéis de alguns atores possivelmente trocados);
3. concluir que, se relação vale no início da última iteração, então a a relação junto com a condição de parada implicam na correção do algoritmo.

Correção

Relação **invariante** chave:

(i0) em /*1*/ vale que: $v[*e..*d]$ é um segmento de soma máxima com $*e < i$. ♡

	*e		i				*d			n−1
v	31	−41	59	26	−53	58	97	−93	−23	84

Correção

Mais relações **invariantes**:

(i1) em /*1*/ vale que:

$$*sMax = v[*e] + v[*e+1] + v[*e+2] + \cdots + v[*d];$$

(i2) em /*2*/ vale que:

$$s = v[i] + v[i+1] + v[i+2] + \cdots + v[k-1].$$

Resultados experimentais

segMax3		
n	tempo (s)	comentário
256	0.01	
512	0.07	
1024	0.53	
2048	4.23	
4096	33.72	
8192	269.89	> 4 min
16384	2120	> 35 min

Consumo de tempo segMax3

Se a execução de cada linha de código consome 1 **unidade** de tempo o consumo total é:

linha		todas as execuções da linha	
1	$=$	1	$= 1$
2	$=$	$n+1$	$\approx n$
3	$=$	$(n+1) + n + (n-1) + \cdots + 1$	$\leq n^2$
4	$=$	$n + (n-1) + \cdots + 1$	$\leq n^2$
5	$=$	$(2 + \cdots + (n+1)) + (2 + \cdots + n) + \cdots + 2$	$\leq n^3$
6	$=$	$(1 + \cdots + n) + (1 + \cdots + (n-1)) + \cdots + 1$	$\leq n^3$
7	$=$	$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1$	$\leq n^2$
8	$\leq$	$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1$	$\leq n^2$
total	$\leq$	$2n^3 + 4n^2 + n + 1$	$\sim n^3$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo segMax3 é proporcional a n^3.

$(3/2)n^2 + (7/2)n - 4$ versus $(3/2)n^2$

n	$(3/2)n^2 + (7/2)n - 4$	$(3/2)n^2$
64	6364	6144
128	25020	24576
256	99196	98304
512	395004	393216
1024	1576444	1572864
2048	6298620	6291456
4096	25180156	25165824
8192	100691964	100663296
16384	402710524	402653184
32768	1610727420	1610612736

$(3/2)n^2$ domina os outros termos

Algoritmo arroz-com-feijão

```
void segMax2(int v[],int n,int *e,int *d,
                        int *sMax){
  int i, j, s;
1 *sMax = 0; *e = *d = -1;
2 for (i = 0; /*1*/ i < n; i++) {
3       s = 0;
4       for (j = i; j < n; j++){
5           s += v[j];
6           if (/*2*/ s > *sMax){
7               *sMax = s; *e = i; *d = j;
            }
      }
  }
```

Correção

Relação **invariante** chave:

(i0) em `/*1*/` vale que: $v[*e\,..*d]$ é um segmento de soma máxima com $*e < i$. ♡

	$*e$						$*d$	i		$n-1$
v	31	−41	59	26	−53	58	97	−93	−23	84

Correção

Mais relações invariante:

(i1) em `/*1*/` vale que:

$$sMax = v[*e] + v[*e{+}1] + v[*e{+}2] + \cdots + v[*d];$$

(i2) em `/*2*/` vale que:

$$s = v[i] + v[i{+}1] + v[i{+}2] + \cdots + v[j].$$

Resultados experimentais

segMax2		
n	tempo (s)	comentário
2048	0.00	
4096	0.02	
8192	0.06	
16384	0.23	
32768	0.92	
65536	3.71	
131072	14.83	
262144	59.34	≈ 1 min
524288	237.26	≈ 4 min
1048576	957.40	≈ 16 min

Consumo de tempo segMax2

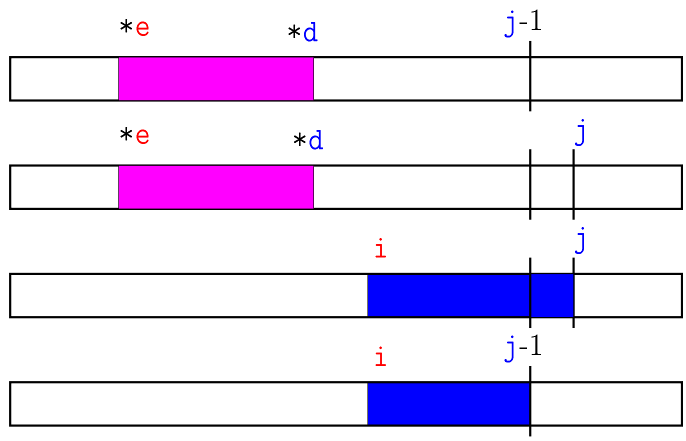
Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo o consumo total é:

linha		todas as execuções da linha	
1	$=$	1	$= 1$
2	$=$	$n+1$	$\approx n$
3	$=$	n	$= n$
4	$=$	$(n+1) + n + \cdots + 2$	$\leq n^2$
5	$=$	$n + (n-1) + \cdots + 1$	$\leq n^2$
6	$=$	$n + (n-1) + \cdots + 1$	$\leq n^2$
7	$\leq$	$n + (n-1) + \cdots + 1$	$\leq n^2$
total	$\leq$	$4n^2 + 2n + 1$	$\sim \mathbf{n^2}$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo `segMax2` é proporcional a n^2.

Nova ideia (indutiva)



Implementação ingênua

Determina um segmento de soma máxima de $v[0\,.\,.\,n{-}1]$.

```
void segMaxI(int v[],int n,int *e,int *d,
                    int *sMax){
  int i, j, k, sk, s;
  s = *sMax = 0; *e = *d = -1;
```

Implementação ingênua

```
  for(j = 0; /*1*/ j < n; j++) {
     s = sk = v[j]; i = j;
     for(k = j-1; k >= 0; k--) {
        sk += v[k];
        if (sk > s){ s = sk; i = k; }
     }
     if (/*2*/ s > *sMax){
        *sMax = s; *e = i; *d = j;
     }
   }
}
```

Correção

Relação **invariante** chave:

(i0) em /*1*/ vale que: $v[*e\,.\,.*d]$ é segmento de soma máxima com $*d \leq j-1$. ♡

		*e	*d	j					n−1
v	31	−41	59	26	−53	58	97	−93	−23	84

Mais uma relação **invariante**:

(i1) em /*1*/ vale que:

$$sMax = v[*e] + v[*e{+}1] + v[*e{+}2] + \cdots + v[*d].$$

Mais relações invariantes

Em /*2*/ vale que:

(i2) $v[i\,.\,.\,j]$ é segmento de soma máxima com término em j **e contendo** $v[j]$;

(i3) $s = v[i] + v[i{+}1] + v[i{+}2] + \cdots + v[j]$;

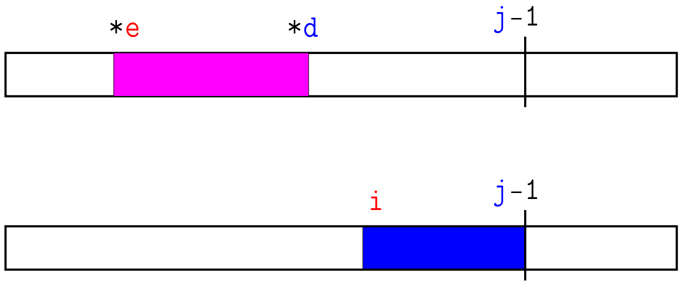
(i4) para $k = i, i+1, \ldots, j$, vale que

$$v[k] + v[k{+}1] + \cdots + v[j{-}1] \geq 0\,;$$

(i5) para $k = 0, 1, \ldots, i{-}1$, vale que

$$v[k] + v[k{+}1] + \cdots + v[i{-}1] < 0\,;$$

Invariantes (i0) e (i2)



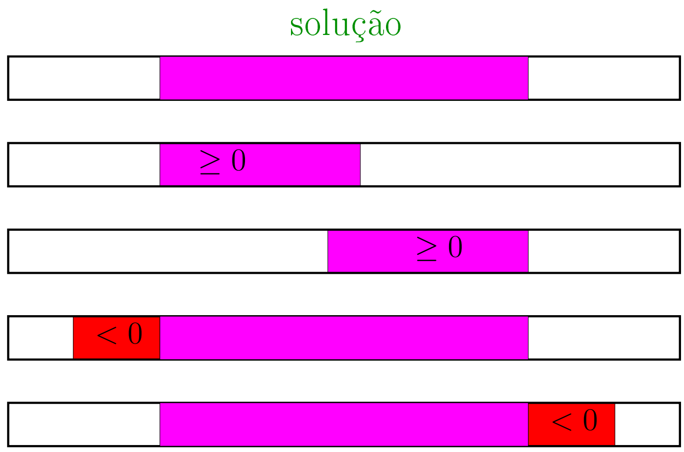
Consumo de tempo segMaxI

linha		todas as execuções da linha	
1	$=$	1	$= 1$
2	$=$	$n+1$	$\approx n$
3	$=$	n	$= n$
4	$=$	$1+2+\ldots+n$	$\leq n^2$
5	$=$	$1+2+\ldots+n-1$	$\leq n^2$
6	$=$	$1+2+\ldots+n-1$	$\leq n^2$
7	$=$	n	$= n$
8	$\leq$	n	$= n$
total	$\leq$	$3n^2+4n+1$	$\sim n^2$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo segMaxI é proporcional a n^2.

Cara da solução



Conclusões

Se $v[*e\,..\,*d]$ é um seg de soma máx. então:

- para $k = *e, *e{+}1, \ldots, *d$, vale que
  $v[*e] + v[*e{+}1] + \cdots + v[k] \geq 0$;
- para $k = *e, *e+1, \ldots, *d$, vale que
  $v[k] + v[k{+}1] + \cdots + v[*d] \geq 0$;
- para $k = 1, 2, \ldots, *e - 1$, vale que
  $v[k] + v[k{+}1] + \cdots + v[*e{-}1] \leq 0$;
- para todo $k = *d+1, *d+2, \ldots, n$, vale
  $v[*d{+}1] + v[*d{+}2] + \cdots + v[k] \leq 0$.

Mais conclusões

Se $v[i\,..\,j]$ é um segmento de soma máxima terminando em j então:

- para $k = i, i+1, \ldots, j{-}1$, vale que
  $v[i] + v[i{+}1] + \cdots + v[k] \geq 0$;
- para $k = 0, 1, 2, \ldots, i{-}1$, vale que
  $v[k] + v[k{+}1] + \cdots + v[i{-}1] \leq 0$.

Algoritmo linear

```
void segMax(int v[],int n,int *e,int *d,
                        int *sMax){
   int i, j, s, sMax;
   s = sMax = 0; *e = *d = -1;
   for (i = j = 0; /*1*/ j < n; j++) {
      if (s < 0){
         /*3*/ i = j; s = v[j];
      } else s += v[j];
      if (/*2*/ s > sMax){
         sMax = s; *e = i; *d = j;
      }
   }
}
```

Correção

Relação **invariante** chave:

(i0) em /*1*/ vale que: v[*e . . *d] é segmento de soma máxima com $*d \leq j - 1$. ♡

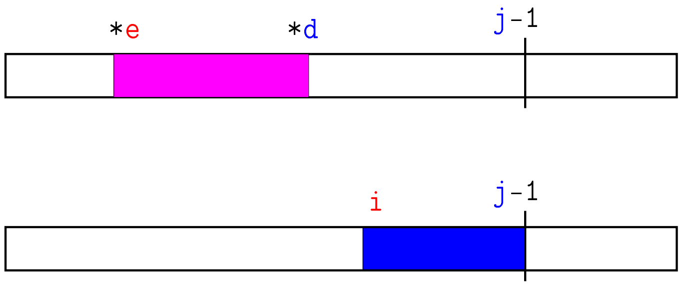
			*e	*d	j					n−1
v	31	−41	59	26	−53	58	97	−93	−23	84

Mais uma relação **invariante**:

(i1) em /*1*/ vale que:

$$\texttt{sMax} = v[*e] + v[*e{+}1] + v[*e{+}2] + \cdots + v[*d].$$

Invariantes (i0) e (i2)



Mais relações invariantes

Em /*2*/ vale que:

(i2) v[i . . j] é segmento de soma máxima com término em j **e contendo** v[j];

(i3) $s = v[i] + v[i{+}1] + v[i{+}2] + \cdots + v[j]$;

(i4) para $k = i, i + 1, \ldots, j$, vale que

$$v[k] + v[k{+}1] + \cdots + v[j - 1] \geq 0\,;$$

(i5) para $k = 0, 1, \ldots, i{-}1$, vale que

$$v[k] + v[k{+}1] + \cdots + v[i{-}1] < 0\,;$$

Mais relações invariantes

Em /*3*/ vale que:

(i6) $s = v[i] + v[i + 1] + \cdots + v[j{-}1] < 0$

As relações invariantes (i4) e (i6) implicam que em /*3*/:

(i7) para $k = 0, 1, 2, \ldots, j{-}1$, vale que

$$v[k] + v[k + 1] + \cdots + v[j{-}1] < 0\,;$$

Resultados experimentais

segMax		
n	tempo (s)	comentários
1048576	0.00	
2097152	0.01	
4194304	0.01	
8388608	0.01	
16777216	0.02	
33554432	0.05	
67108864	0.09	
134217728	0.19	> 134 milhões
268435456	0.37	> 268 milhões
536870912	0.75	> 0.5 bilhões

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo o consumo total é:

linha	todas as execuções da linha		
2	$=$	1	$= 1$
3	$=$	$n+1$	$\approx n$
4	$=$	n	$= n$
5-6	$=$	n	$= n$
7	$=$	n	$= n$
8	$\leq$	n	$= n$
total	$\leq$	$5n + 2$	$\sim n$

Conclusões

O consumo de tempo do algoritmo segMax3 é proporcional a n^3.

O consumo de tempo do algoritmo segMax2 é proporcional a n^2.

O consumo de tempo do algoritmo segMax é proporcional a n.

Algumas técnicas

- Evitar recomputações. Usar espaço para armazenar resultados a fim de evitar recomputá-los (segMax2, segMax).
- Algoritmos incrementais/varredura. Solução de um subproblema é estendida a uma solução do problema original (segMax).
- Delimitação inferior. Projetistas de algoritmos só dormem em paz quando sabem que seus algoritmos são o melhor possível (segMax).