AULA 17

Análise de algoritmo

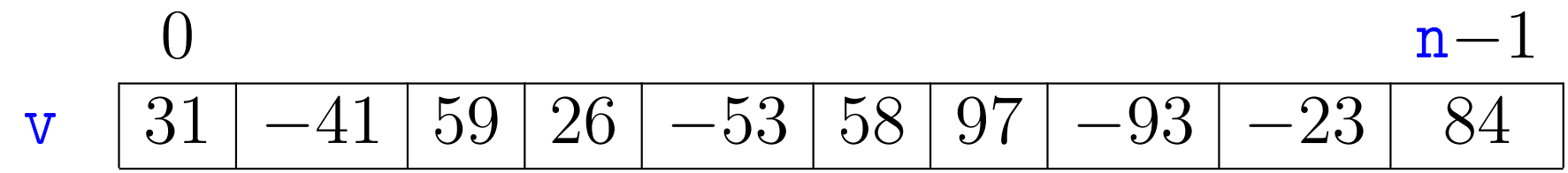
Programming Pearls: Algorithm Design Techniques,
Jon Bentley, Addison-Wesley, 1986

Segmento de soma máxima

Um **segmento** de um vetor $v[0\,..\,n-1]$ é qualquer subvetor da forma $v[e\,..\,d]$.

Problema: Dado um vetor $v[0\,..\,n-1]$ de números inteiros, determinar um segmento $v[e\,..\,d]$ de soma máxima.

Entra:



Segmento de soma máxima

Sai:

	0		2				6			n−1
v	31	−41	59	26	−53	58	97	−93	−23	84

v[e..d] = v[2..6] é segmento de soma máxima.

v[2..6] tem soma **187**.

Segmento de soma máxima

Problema (versão simplificada): Determinar a soma máxima de um segmento de um dado vetor $v[0\,..\,n-1]$.

Entra:

	0									n−1
v	31	−41	59	26	−53	58	97	−93	−23	84

Sai:

	0		2				6			n−1
v	31	−41	59	26	−53	58	97	−93	−23	84

A soma máxima é **187**.

Algoritmo café-com-leite

```
void segMax3(int v[],int n,int *e,int *d,
                          int *sMax){
  int i, j, k, s;
1 *sMax = 0; *e = *d = -1;
2 for (i = 0; /*1*/ i < n; i++)
3    for (j = i; j < n; j++) {
4        s = 0;
5        for (k = i; /*2*/ k <= j; k++)
6            s += v[k];
7        if (s > *sMax){
8            *sMax = s; *e = i; *d = j;
         }
    }
}
```

Correção de algoritmos

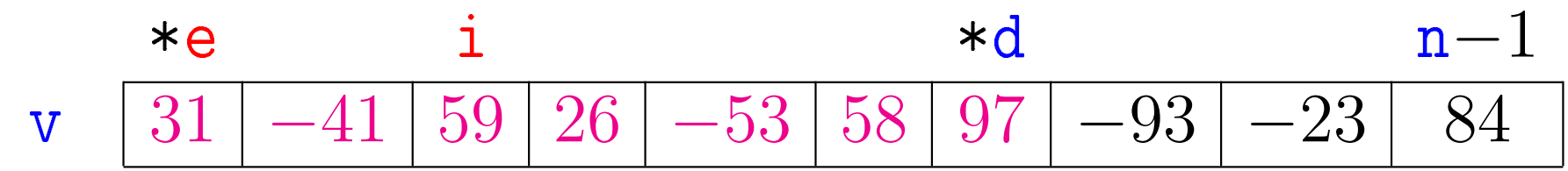
Estrutura "típica" de demonstrações da correção de algoritmos iterativos através de suas **relações invariantes** consiste em:

1. verificar que a relação vale no início da primeira iteração;
2. demonstrar que se a relação vale no início da iteração, então ela vale no final da iteração (com os papéis de alguns atores possivelmente trocados);
3. concluir que, se relação vale no início da última iteração, então a a relação junto com a condição de parada implicam na correção do algoritmo.

Correção

Relação **invariante** chave:

(i0) em `/*1*/` vale que: $\mathtt{v}[*\mathtt{e} \,..\, *\mathtt{d}]$ é um segmento de soma máxima com $*\mathtt{e} < \mathtt{i}$. ♡



Correção

Mais relações **invariantes**:

(i1) em `/*1*/` vale que:

$$\texttt{*sMax} = \texttt{v}[\texttt{*e}] + \texttt{v}[\texttt{*e}+1] + \texttt{v}[\texttt{*e}+2] + \cdots + \texttt{v}[\texttt{*d}];$$

(i2) em `/*2*/` vale que:

$$\texttt{s} = \texttt{v}[\texttt{i}] + \texttt{v}[\texttt{i}+1] + \texttt{v}[\texttt{i}+2] + \cdots + \texttt{v}[\texttt{k}-1].$$

Resultados experimentais

segMax3		
n	tempo (s)	comentário
256	0.01	
512	0.07	
1024	0.53	
2048	4.23	
4096	33.72	
8192	269.89	$>$ 4 min
16384	2120	$>$ 35 min

Consumo de tempo segMax3

Se a execução de cada linha de código consome 1 **unidade** de tempo o consumo total é:

linha		todas as execuções da linha	
1	$=$	1	$= 1$
2	$=$	$n + 1$	$\approx n$
3	$=$	$(n + 1) + n + (n - 1) + \cdots + 1$	$\leq n^2$
4	$=$	$n + (n - 1) + \cdots + 1$	$\leq n^2$
5	$=$	$(2 + \cdots + (n + 1)) + (2 + \cdots + n) + \cdots + 2$	$\leq n^3$
6	$=$	$(1 + \cdots + n) + (1 + \cdots + (n - 1)) + \cdots + 1$	$\leq n^3$
7	$=$	$n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 1$	$\leq n^2$
8	$\leq$	$n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 1$	$\leq n^2$
total	$\leq$	$2n^3 + 4n^2 + n + 1$	$\sim n^3$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo `segMax3` é proporcional a n^3.

$(3/2)n^2 + (7/2)n - 4$ versus $(3/2)n^2$

n	$(3/2)n^2 + (7/2)n - 4$	$(3/2)n^2$
64	6364	6144
128	25020	24576
256	99196	98304
512	395004	393216
1024	1576444	1572864
2048	6298620	6291456
4096	25180156	25165824
8192	100691964	100663296
16384	402710524	402653184
32768	1610727420	1610612736

$(3/2)n^2$ domina os outros termos

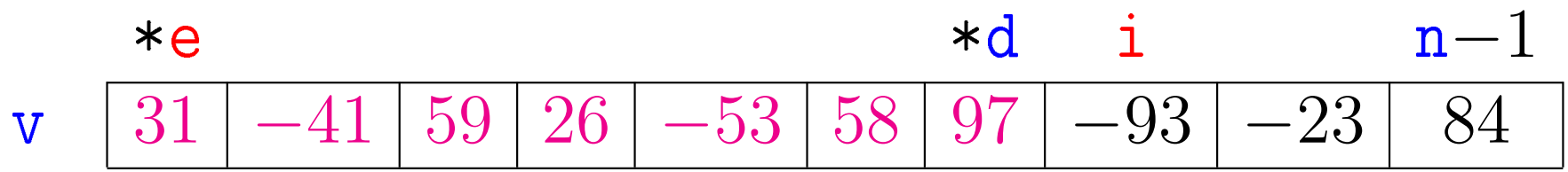
Algoritmo arroz-com-feijão

```
void segMax2(int v[],int n,int *e,int *d,
                          int *sMax){
  int i, j, s;
1 *sMax = 0; *e = *d = -1;
2 for (i = 0; /*1*/ i < n; i++) {
3         s = 0;
4         for (j = i; j < n; j++){
5             s += v[j];
6             if (/*2*/ s > *sMax){
7                 *sMax = s; *e = i; *d = j;
              }
    }
  }
```

Correção

Relação **invariante** chave:

(i0) em `/*1*/` vale que: `v`$[$`*e`$\,..\,$`*d`$]$ é um segmento de soma máxima com `*e` $<$ `i`. ♡



Correção

Mais relações invariante:

(i1) em /*1*/ vale que:

$$\texttt{sMax} = \texttt{v}[*\texttt{e}] + \texttt{v}[*\texttt{e}+1] + \texttt{v}[*\texttt{e}+2] + \cdots + \texttt{v}[*\texttt{d}];$$

(i2) em /*2*/ vale que:

$$\texttt{s} = \texttt{v}[\texttt{i}] + \texttt{v}[\texttt{i}+1] + \texttt{v}[\texttt{i}+2] + \cdots + \texttt{v}[\texttt{j}].$$

Resultados experimentais

segMax2		
n	tempo (s)	comentário
2048	0.00	
4096	0.02	
8192	0.06	
16384	0.23	
32768	0.92	
65536	3.71	
131072	14.83	
262144	59.34	$\approx$ 1 min
524288	237.26	$\approx$ 4 min
1048576	957.40	$\approx$ 16 min

Consumo de tempo segMax2

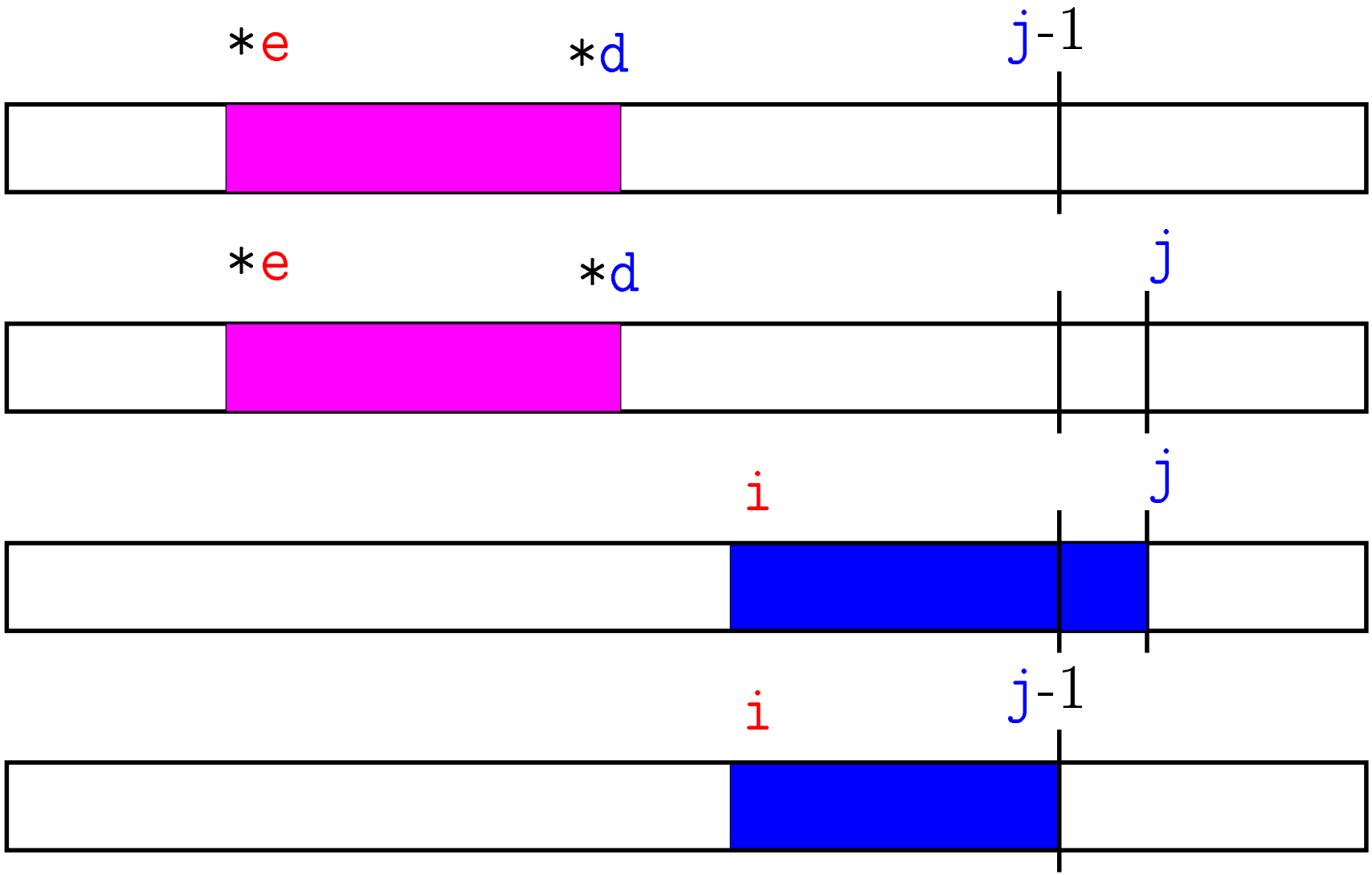
Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo o consumo total é:

linha	todas as execuções da linha	
1	$= 1$	$= 1$
2	$= n + 1$	$\approx n$
3	$= n$	$= n$
4	$= (n + 1) + n + \cdots + 2$	$\leq n^2$
5	$= n + (n - 1) + \cdots + 1$	$\leq n^2$
6	$= n + (n - 1) + \cdots + 1$	$\leq n^2$
7	$\leq n + (n - 1) + \cdots + 1$	$\leq n^2$
total	$\leq 4n^2 + 2n + 1$	$\sim n^2$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo `segMax2` é proporcional a $\mathtt{n}^2$.

Nova ideia (indutiva)



Implementação ingênua

Determina um segmento de soma máxima de $\texttt{v}[0\,..\,\texttt{n}-1]$.

```
void segMaxI(int v[],int n,int *e,int *d,
                          int *sMax){
  int i, j, k, sk, s;
1 s = *sMax = 0; *e = *d = -1;
```

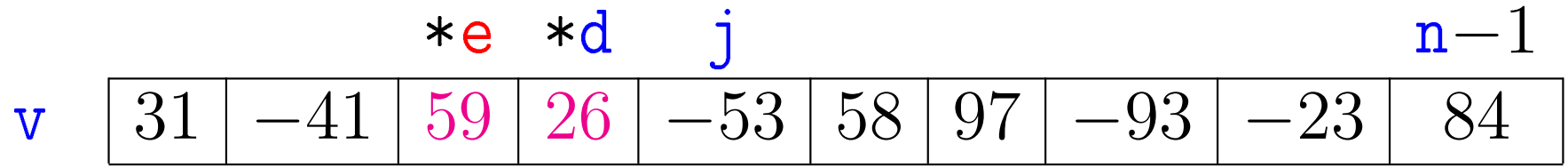
Implementação ingênua

```
2 for(j = 0; /*1*/ j < n; j++) {
3     s = sk = v[j]; i = j;
4     for(k = j-1; k >= 0; k--) {
5         sk += v[k];
6         if (sk > s){ s = sk; i = k; }
      }
7     if (/*2*/ s > *sMax){
8         *sMax = s; *e = i; *d = j;
      }
    }
}
```

Correção

Relação **invariante** chave:

(i0) em /*1*/ vale que: v[*e..*d] é segmento de soma máxima com *d ≤ j − 1. ♡



Mais uma relação **invariante**:

(i1) em /*1*/ vale que:

$$\texttt{sMax} = \texttt{v}[\texttt{*e}] + \texttt{v}[\texttt{*e}+1] + \texttt{v}[\texttt{*e}+2] + \cdots + \texttt{v}[\texttt{*d}].$$

Mais relações invariantes

Em /*2*/ vale que:

(i2) $v[i..j]$ é segmento de soma máxima
com término em j **e contendo** $v[j]$;

(i3) $s = v[i] + v[i+1] + v[i+2] + \cdots + v[j]$;

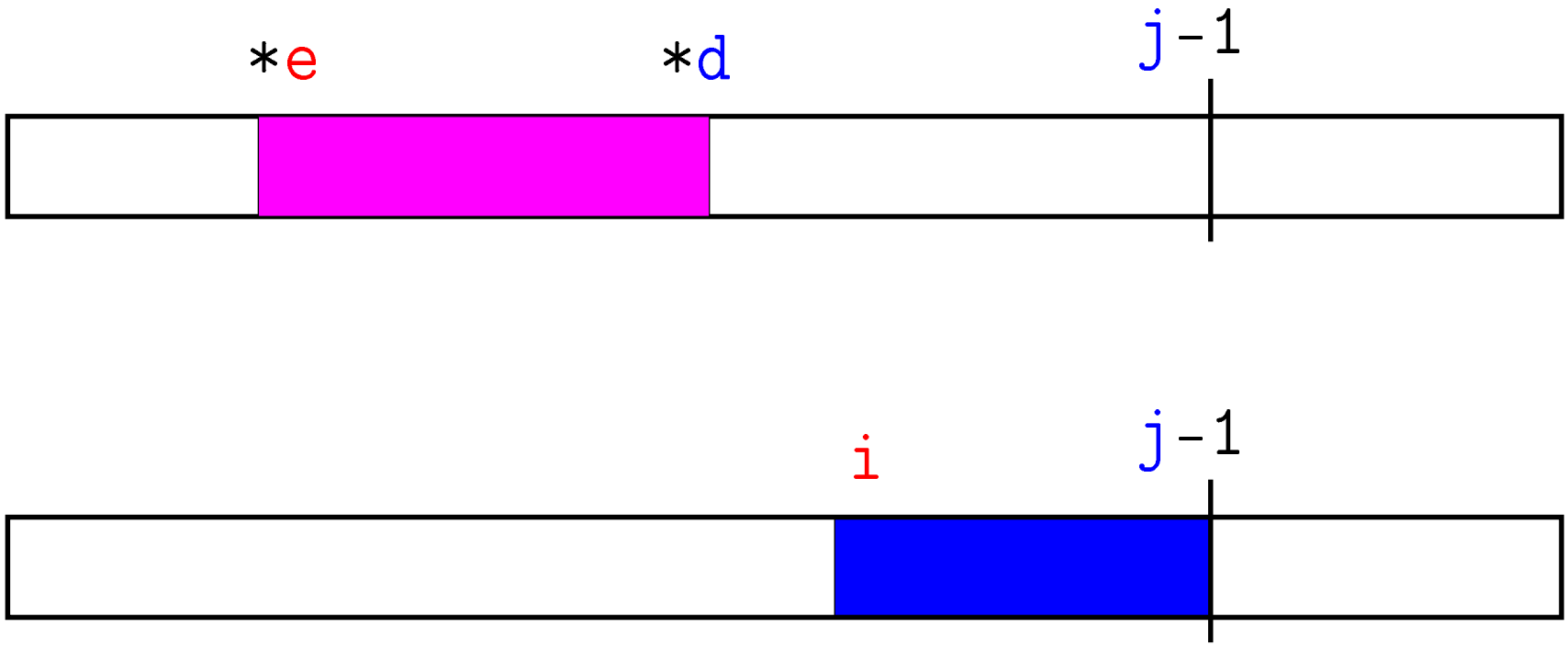
(i4) para $k = i, i+1, \ldots, j$, vale que

$$v[k] + v[k+1] + \cdots + v[j-1] \geq 0\,;$$

(i5) para $k = 0, 1, \ldots, i-1$, vale que

$$v[k] + v[k+1] + \cdots + v[i-1] < 0\,;$$

Invariantes (i0) e (i2)



Consumo de tempo segMaxI

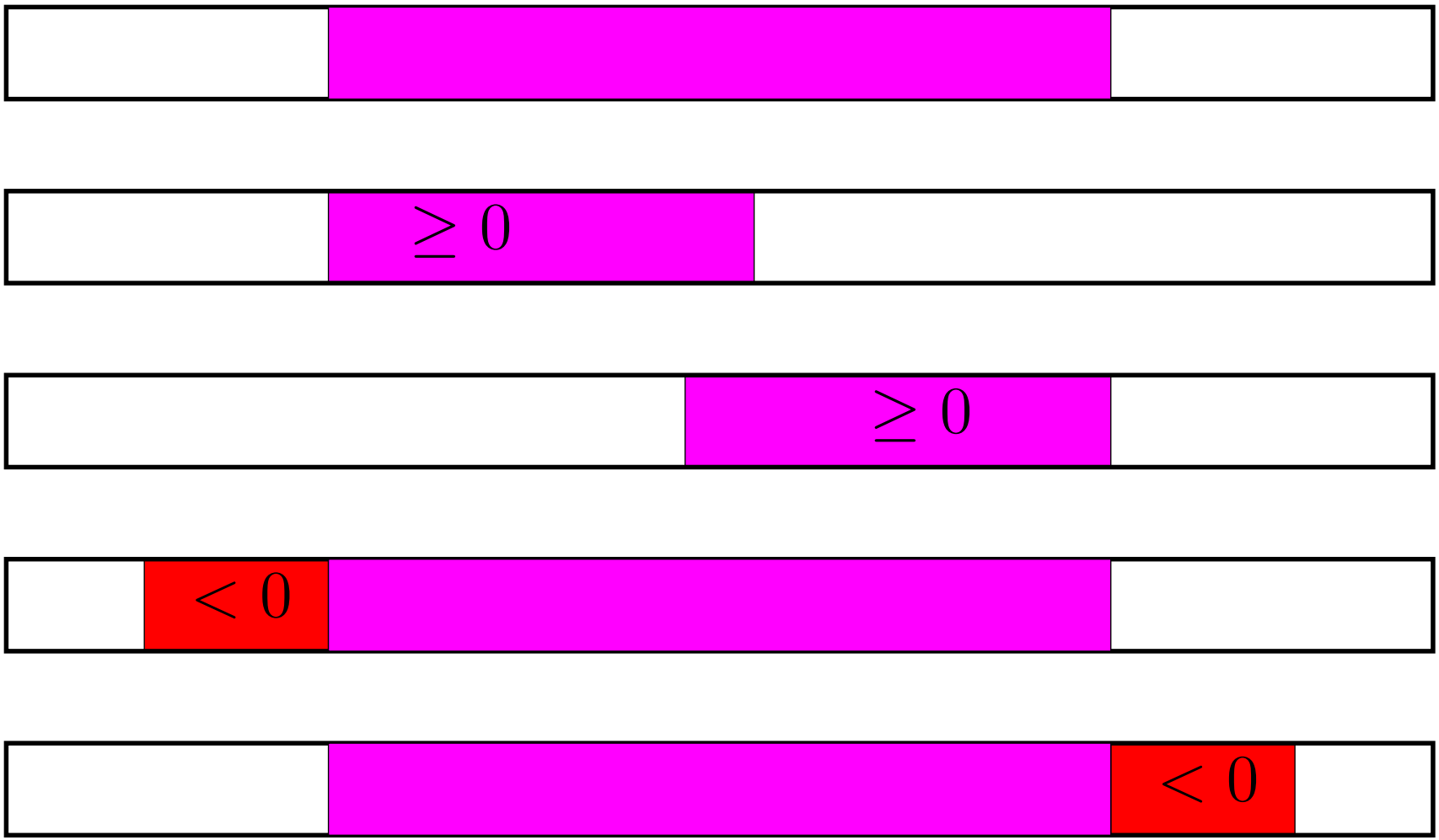
linha	todas as execuções da linha	
1	$= 1$	$= 1$
2	$= n + 1$	$\approx n$
3	$= n$	$= n$
4	$= 1 + 2 + \ldots + n$	$\leq n^2$
5	$= 1 + 2 + \ldots + n-1$	$\leq n^2$
6	$= 1 + 2 + \ldots + n-1$	$\leq n^2$
7	$= n$	$= n$
8	$\leq n$	$= n$
total	$\leq 3n^2 + 4n + 1$	$\sim n^2$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo `segMaxI` é proporcional a $\mathtt{n}^2$.

Cara da solução

solução



Conclusões

Se $\texttt{v}[\texttt{*e}\,..\,\texttt{*d}]$ é um seg de soma máx. então:

- para $\texttt{k} = \texttt{*e}, \texttt{*e}+1, \ldots, \texttt{*d}$, vale que
$$\texttt{v}[\texttt{*e}] + \texttt{v}[\texttt{*e}+1] + \cdots + \texttt{v}[\texttt{k}] \geq 0\,;$$
- para $\texttt{k} = \texttt{*e}, \texttt{*e}+1, \ldots, \texttt{*d}$, vale que
$$\texttt{v}[\texttt{k}] + \texttt{v}[\texttt{k}+1] + \cdots + \texttt{v}[\texttt{*d}] \geq 0\,;$$
- para $\texttt{k} = 1, 2, \ldots, \texttt{*e} - 1$, vale que
$$\texttt{v}[\texttt{k}] + \texttt{v}[\texttt{k}+1] + \cdots + \texttt{v}[\texttt{*e}-1] \leq 0\,;$$
- para todo $\texttt{k} = \texttt{*d} + 1, \texttt{*d} + 2, \ldots, \texttt{n}$, vale
$$\texttt{v}[\texttt{*d}+1] + \texttt{v}[\texttt{*d}+2] + \cdots + \texttt{v}[\texttt{k}] \leq 0\,.$$

Mais conclusões

Se $\mathtt{v}[\mathtt{i}\,..\,\mathtt{j}]$ é um segmento de soma máxima terminando em $\mathtt{j}$ então:

- para $\mathtt{k} = \mathtt{i}, \mathtt{i}+1, \ldots, \mathtt{j}-1$, vale que

$$\mathtt{v}[\mathtt{i}] + \mathtt{v}[\mathtt{i}+1] + \cdots + \mathtt{v}[\mathtt{k}] \geq 0\,;$$

- para $\mathtt{k} = 0, 1, 2, \ldots, \mathtt{i}-1$, vale que

$$\mathtt{v}[\mathtt{k}] + \mathtt{v}[\mathtt{k}+1] + \cdots + \mathtt{v}[\mathtt{i}-1] \leq 0\,.$$

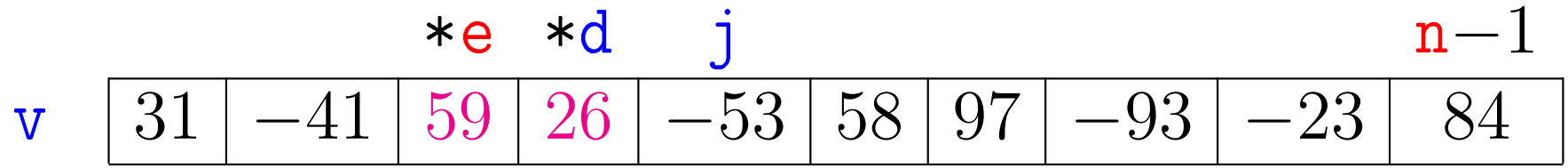
Algoritmo linear

```
void segMax(int v[],int n,int *e,int *d,
                        int *sMax){
1 int i, j, s, sMax;
2 s = sMax = 0; *e = *d = -1;
3 for (i = j = 0; /*1*/ j < n; j++) {
4    if (s < 0){
5        /*3*/ i = j; s = v[j];
6    } else s += v[j];
7    if (/*2*/ s > sMax){
8        sMax = s; *e = i; *d = j;
9    }
10 }
}
```

Correção

Relação **invariante** chave:

(i0) em /*1*/ vale que: v[*e..*d] é segmento de soma máxima com *d ≤ j − 1. ♡

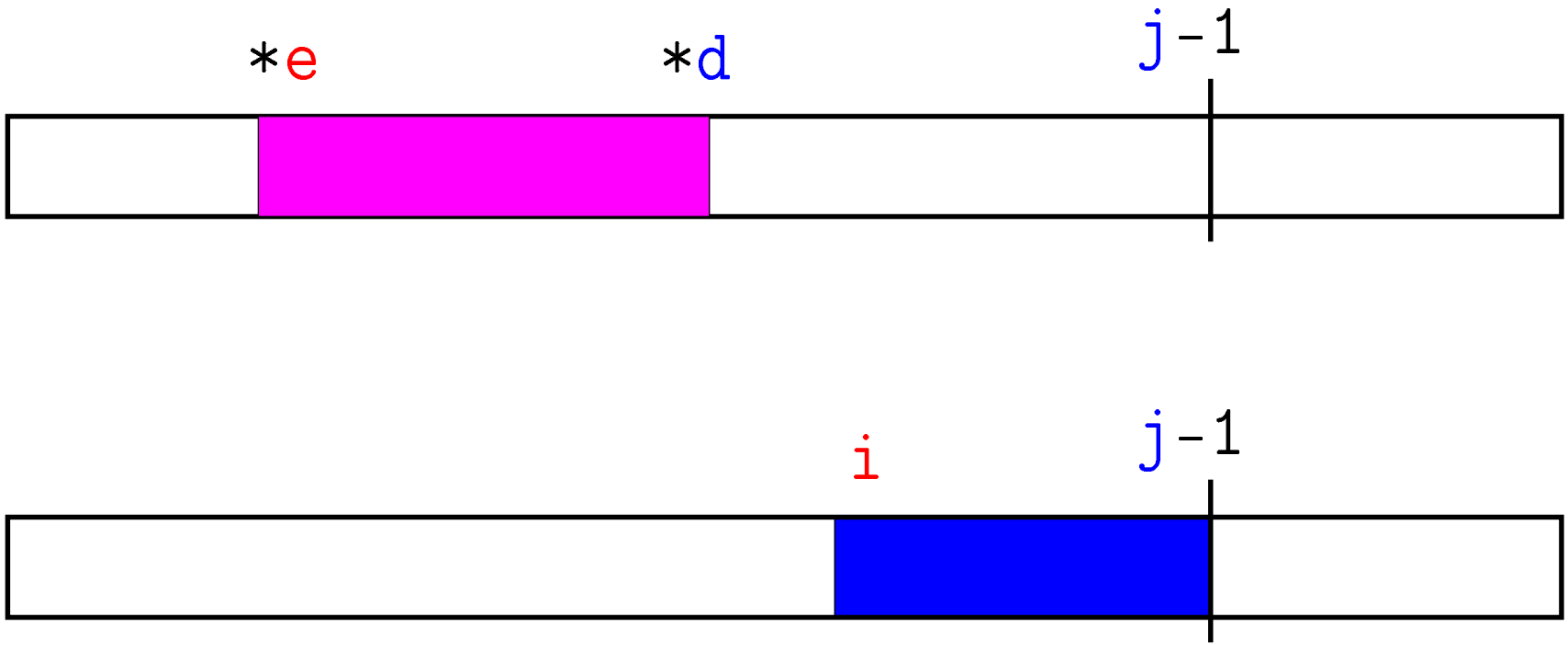


Mais uma relação **invariante**:

(i1) em /*1*/ vale que:

$$\texttt{sMax} = \texttt{v}[*\texttt{e}] + \texttt{v}[*\texttt{e}+1] + \texttt{v}[*\texttt{e}+2] + \cdots + \texttt{v}[*\texttt{d}].$$

Invariantes (i0) e (i2)



Mais relações invariantes

Em /*2*/ vale que:

(i2) $v[i..j]$ é segmento de soma máxima com término em j **e contendo** $v[j]$;

(i3) $s = v[i] + v[i+1] + v[i+2] + \cdots + v[j]$;

(i4) para $k = i, i+1, \ldots, j$, vale que

$$v[k] + v[k+1] + \cdots + v[j-1] \geq 0\,;$$

(i5) para $k = 0, 1, \ldots, i-1$, vale que

$$v[k] + v[k+1] + \cdots + v[i-1] < 0\,;$$

Mais relações invariantes

Em /*3*/ vale que:

(i6) $\texttt{s} = \texttt{v}[\texttt{i}] + \texttt{v}[\texttt{i}+1] + \cdots + \texttt{v}[\texttt{j}-1] < 0$

As relações invariantes (i4) e (i6) implicam que em /*3*/:

(i7) para $\texttt{k} = 0, 1, 2, \ldots, \texttt{j}-1$, vale que

$$\texttt{v}[\texttt{k}] + \texttt{v}[\texttt{k}+1] + \cdots + \texttt{v}[\texttt{j}-1] < 0\,;$$

Resultados experimentais

segMax		
n	tempo (s)	comentários
1048576	0.00	
2097152	0.01	
4194304	0.01	
8388608	0.01	
16777216	0.02	
33554432	0.05	
67108864	0.09	
134217728	0.19	$>$ 134 milhões
268435456	0.37	$>$ 268 milhões
536870912	0.75	$>$ 0.5 bilhões

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo o consumo total é:

linha	todas as execuções da linha	
2	$= 1$	$= 1$
3	$= n + 1$	$\approx n$
4	$= n$	$= n$
5-6	$= n$	$= n$
7	$= n$	$= n$
8	$\leq n$	$= n$
total	$\leq 5n + 2$	$\sim n$

Conclusões

O consumo de tempo do algoritmo `segMax3` é proporcional a n^3.

O consumo de tempo do algoritmo `segMax2` é proporcional a n^2.

O consumo de tempo do algoritmo `segMax` é proporcional a n.

Algumas técnicas

- Evitar recomputações. Usar espaço para armazenar resultados a fim de evitar recomputá-los (`segMax2`, `segMax`).
- Algoritmos incrementais/varredura. Solução de um subproblema é estendida a uma solução do problema original (`segMax`).
- Delimitação inferior. Projetistas de algoritmos só dormem em paz quando sabem que seus algoritmos são o melhor possível (`segMax`).