Melhores momentos

AULA 20

Resumo

função	consumo de tempo	observação
`bubble`	$O(n^2)$	todos os casos
`insercao`	$O(n^2)$ $O(n)$	pior caso melhor caso
`insercaoBinaria`	$O(n^2)$ $O(n \lg n)$	pior caso melhor caso
`selecao`	$O(n^2)$	todos os casos
`mergeSort`	$O(n \lg n)$	todos os casos

Divisão e conquista

Algoritmos por divisão-e-conquista têm três passos em cada nível da recursão:

Dividir: o problema é dividido em subproblemas de tamanho menor;

Conquistar: os subproblemas são resolvidos recursivamente e subproblemas "pequenos" são resolvidos diretamente;

Combinar: as soluções dos subproblemas são combinadas para obter uma solução do problema original.

Exemplo: ordenação por intercalação (`mergeSort`).

AULA 21

Ordenação: algoritmo Quicksort

PF 11

http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/quick.html

Problema da separação

Problema: Rearranjar um dado vetor $v[p..r-1]$ e devolver um índice q, $p \leq q < r$, tais que

$$v[p..q-1] \leq v[q] < v[q+1..r-1]$$

Entra:

	p										r
v	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44	

Problema da separação

Problema: Rearranjar um dado vetor $v[p\,..\,r-1]$ e devolver um índice q, $p \le q < r$, tais que

$$v[p\,..\,q-1] \le v[q] < v[q+1\,..\,r-1]$$

Entra:

	p										r
v	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44	

Sai:

	p				q						r
v	33	11	22	33	44	55	99	66	77	88	

Separa

	p										r
v	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44	

Separa

i	j									x
v	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Separa

	i	j								x
v	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Separa

i		j								x
v	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i		j							x
v	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

Separa

i		j								x
v	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i			j						x
v	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

Separa

	i	j								x
v	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

		i				j					x
v		33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

Separa

i		j								x
v	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i				j					x
v	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

		i				j				x
v	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

Separa

i		j								x
v	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i				j					x
v	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

		i				j				x
v	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

			i				j			x
v	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

Separa

i		j								x
v	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i				j					x
v	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

		i				j				x
v	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

			i					j		x
v	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

Separa

i		j								x
v	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i				j					x
v	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

		i				j				x
v	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

			i						j	x
v	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

Separa

i		j								x
v	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i				j					x
v	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

		i				j				x
v	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

			i						j	x
v	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

				i						j
v	33	11	22	33	99	55	88	66	77	44

Separa

i		j								x
v	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i				j					x
v	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

		i				j				x
v	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

			i						j	x
v	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

				i						j
v	33	11	22	33	99	55	88	66	77	44

	p				q						r
v	33	11	22	33	44	55	88	66	77	99	

Função separa

Rearranja $v[p\,..\,r-1]$ de modo que $p \leq q < r$ e $v[p\,..\,q-1] \leq v[q] < v[q+1\,..\,r-1]$.
A função devolve q.

```
int separa (int p, int r, int v[]) {
   int i = p-1, j, x = v[r-1], t;

   for (j = p; /*A*/ j < r; j++)
       if (v[j] <= x) {
           t=v[++i]; v[i]=v[j]; v[j]=t;
       }
   return i;
}
```

Invariantes

Em /*A*/ vale que

(i0) $\texttt{v}[\texttt{p}\,..\,\texttt{i}] \leq \texttt{x} < \texttt{v}[\texttt{i}+1\,..\,\texttt{j}-1]$

	p		i				j			x	r
v	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44	

Consumo de tempo

Supondo que a execução de cada linha consome 1 unidade de tempo.

Qual o consumo de tempo da função `separa` em termos de $\texttt{n} := \texttt{r} - \texttt{p}$?

linha		consumo de todas as execuções da linha
1	=	?
2	=	?
3	=	?
4	=	?
5	=	?
total	=	?

Consumo de tempo

Supondo que a execução de cada linha consome 1 unidade de tempo.

Qual o consumo de tempo da função `separa` em termos de $n := r - p$?

linha		consumo de todas as execuções da linha
1	$=$	1
2	$=$	$n + 1$
3	$=$	n
4	$\leq$	n
5	$=$	1
total	$\leq$	$3n + 3$ $= O(n)$

Conclusão

O consumo de tempo da função `separa` é proporcional a `n`.

O consumo de tempo da função `separa` é $O(\mathtt{n})$.

Quicksort

Rearranja $\mathtt{v}[\mathtt{p}\,..\,\mathtt{r}{-}1]$ em ordem crescente.

```
void quickSort (int p, int r, int v[]) {
     if (p < r-1) {
          int q = separa(p,r,v);
          quickSort(p, q, v);
          quickSort(q+1, r, v);
     }
}
```

	p										r
v	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44	

Quicksort

Rearranja $v[p \mathinner{..} r-1]$ em ordem crescente.

```
void quickSort (int p, int r, int v[]) {
1   if (p < r-1) {
2         int q = separa(p,r,v);
3         quickSort(p, q, v);
4         quickSort(q+1, r, v);
    }
}
```

	p				q						r
v	33	11	22	33	44	55	88	66	77	99	

No começo da linha 3,

$$v[p \mathinner{..} q-1] \leq v[q] < v[q+1 \mathinner{..} r-1]$$

Quicksort

Rearranja $v[p\,..\,r{-}1]$ em ordem crescente.

```
void quickSort (int p, int r, int v[]) {
    if (p < r-1) {
        int q = separa(p,r,v);
        quickSort(p, q, v);
        quickSort(q+1, r, v);
    }
}
```

	p				q						r
v	11	22	33	33	44	55	88	66	77	99	

Quicksort

Rearranja $v[p\,..\,r-1]$ em ordem crescente.

```
void quickSort (int p, int r, int v[]) {
    if (p < r-1) {
        int q = separa(p,r,v);
        quickSort(p, q, v);
        quickSort(q+1, r, v);
    }
}
```

	p				q						r
v	11	22	33	33	44	55	66	77	88	99	

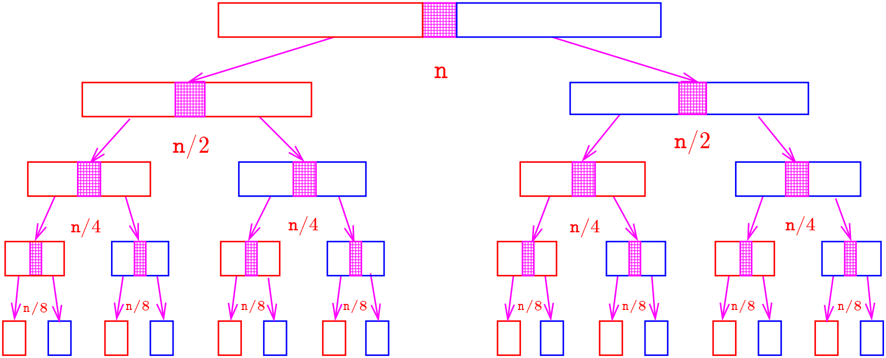
Quicksort

Rearranja $v[p \mathinner{..} r{-}1]$ em ordem crescente.

```
void quickSort (int p, int r, int v[]) {
1   if (p < r-1) {
2       int q = separa(p,r,v);
3       quickSort(p, q, v);
4       quickSort(q+1, r, v);
    }
}
```

Consumo de tempo?

Consumo de tempo: versão MAC0122



Consumo de tempo: versão MAC0122

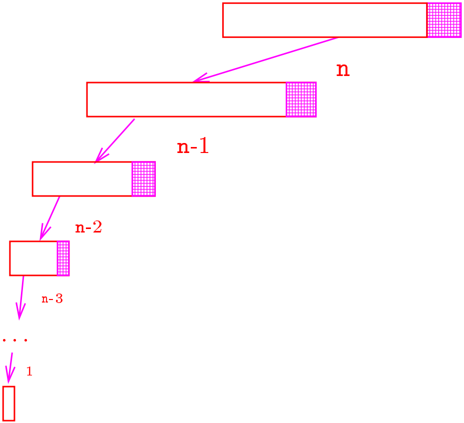
O consumo de tempo em cada nível da recursão é proporcional a n.

No melhor caso, em cada chamada recursiva, q é $\approx (p + r)/2$.

Nessa situação há cerca de $\lg n$ níveis de recursão.

nível	consumo de tempo (proporcional a)
1	$\approx n$
2	$\approx n/2 + n/2$
3	$\approx n/4 + n/4 + n/4 + n/4 + n/4$
$\cdots$	$\cdots$
$\lg n$	$\approx 1 + 1 + 1 + 1 \cdots + 1 + 1 + 1 + 1$
Total	$\approx n \lg n = O(n \lg n)$

Consumo de tempo: versão MAC0122



Consumo de tempo: versão MAC0122

No pior caso, em cada chamada recursiva, o valor de q devolvido por `separa` é $\approx$ p ou $\approx$ r.

Nessa situação há cerca de n níveis de recursão.

nível	consumo de tempo (proporcional a)
1	$\approx \mathtt{n}$
2	$\approx \mathtt{n} - 1$
3	$\approx \mathtt{n} - 2$
4	$\approx \mathtt{n} - 3$
$\cdots$	$\cdots$
n	≈ 1
Total	$\approx \mathtt{n}(\mathtt{n} - 1)/2 = \mathrm{O}(\mathtt{n}^2)$

Quicksort no melhor caso

No melhor caso, em cada chamada recursiva $\mathtt{q}$ é aproximadamente $(\mathtt{p} + \mathtt{r})/2$.

O consumo de tempo da função `quickSort` no melhor caso é proporcional a $\mathtt{n} \log \mathtt{n}$.

O consumo de tempo da função `quickSort` no melhor caso é $O(\mathtt{n} \log \mathtt{n})$.

Quicksort no pior caso

O consumo de tempo da função quickSort no pior caso é proporcional a n^2.

O consumo de tempo da função quickSort no pior caso é $O(n^2)$.

O consumo de tempo da função quickSort é $O(n^2)$.

Discussão geral

Pior caso, melhor caso, todos os casos?!?!

Dado um algoritmo $\mathcal{A}$ o que significam as expressões:

- $\mathcal{A}$ é $\mathrm{O}(\mathtt{n}^2)$ no pior caso.
- $\mathcal{A}$ é $\mathrm{O}(\mathtt{n}^2)$ no melhor caso.
- $\mathcal{A}$ é $\mathrm{O}(\mathtt{n}^2)$.

Análise experimental

Algoritmos implementados:

`mergeR`	`mergeSort` recursivo.
`mergeI`	`mergeSort` iterativo.
`quick`	`quickSort` recursivo.
`qsort`	`quicksort` da biblioteca do C.

Análise experimental

A plataforma utilizada nos experimentos foi um computador rodando Ubuntu GNU/Linux 3.5.0-17

Compilador:
`gcc -Wall -ansi -O2 -pedantic -Wno-unused-result`.

Computador:

```
 model name:  Intel(R) Core(TM)2 Quad CPU Q6600 @
2.40GHz
cpu MHz :  1596.000
cache size:  4096 KB
MemTotal :  3354708 kB
```

Estudo empírico (aleatório)

n	mergeR	mergeI	quick	qsort
8192	0.00	0.00	0.00	0.00
16384	0.00	0.00	0.00	0.00
32768	0.01	0.01	0.01	0.01
65536	0.01	0.01	0.01	0.01
131072	0.02	0.02	0.02	0.03
262144	0.05	0.04	0.04	0.07
524288	0.10	0.08	0.08	0.15
1048576	0.21	0.20	0.17	0.31
2097152	0.44	0.43	0.35	0.66
4194304	0.91	0.89	0.73	1.37
8388608	1.91	1.88	1.52	2.86

Tempos em segundos.

Estudo empírico (decrescente)

n	mergeR	mergeI	quick	qsort
1024	0.00	0.00	0.00	0.00
2048	0.00	0.00	0.00	0.00
4096	0.01	0.00	0.01	0.00
8192	0.00	0.00	0.03	0.00
16384	0.00	0.00	0.14	0.01
32768	0.00	0.01	0.57	0.00
65536	0.01	0.01	2.27	0.01
131072	0.02	0.01	9.06	0.02

Tempos em segundos.

Para `n`=262144 `quickSort` dá `Segmentation fault (core dumped)`

Estudo empírico (crescente)

n	mergeR	mergeI	quick	qsort
1024	0.00	0.00	0.00	0.00
2048	0.00	0.00	0.01	0.00
4096	0.00	0.00	0.01	0.00
8192	0.00	0.00	0.04	0.00
16384	0.00	0.00	0.14	0.01
32768	0.00	0.00	0.57	0.00
65536	0.00	0.01	2.27	0.01
131072	0.02	0.01	9.07	0.02

Tempos em segundos.

Para `n`=262144 `quickSort` dá `Segmentation fault (core dumped)`

Consumo de tempo: versão MAC0338

Quanto tempo consome a função quickSort em termos de $n := r - p$?

linha		consumo de todas as execuções da linha
1	$=$	?
2	$=$	?
3	$=$	?
4	$=$	?
total	$=$	????

Consumo de tempo: versão MAC0338

Quanto tempo consome a função `quickSort` em termos de $n := r - p$?

linha		consumo de todas as execuções da linha
1	$=$	$O(1)$
2	$=$	$O(n)$
3	$=$	$T(k)$
4	$=$	$T(n-k-1)$
total	$=$	$T(k) + T(n-k-1) + O(n+1)$

$$0 \leq k := q - p \leq n - 1$$

Recorrência: versão MAC0338

$\mathtt{T}(\mathtt{n}) :=$ consumo de tempo máximo quando

$\mathtt{n} := \mathtt{r} - \mathtt{p}$

$\mathtt{T}(0) = \mathrm{O}(1)$

$\mathtt{T}(1) = \mathrm{O}(1)$

$\mathtt{T}(\mathtt{n}) = \mathtt{T}(\mathtt{k}) + \mathtt{T}(\mathtt{n} - \mathtt{k} - 1) + \mathrm{O}(\mathtt{n})$ para $\mathtt{n} = 2, 3, 4, \ldots$

Recorrência: versão MAC0338

$\mathtt{T}(\mathtt{n}) :=$ consumo de tempo máximo quando

$\mathtt{n} := \mathtt{r} - \mathtt{p}$

$\mathtt{T}(0) = \mathrm{O}(1)$

$\mathtt{T}(1) = \mathrm{O}(1)$

$\mathtt{T}(\mathtt{n}) = \mathtt{T}(\mathtt{k}) + \mathtt{T}(\mathtt{n} - \mathtt{k} - 1) + \mathrm{O}(\mathtt{n})$ para $\mathtt{n} = 2, 3, 4, \ldots$

Recorrência grosseira:

$$\mathtt{T}(\mathtt{n}) = \mathtt{T}(0) + \mathtt{T}(\mathtt{n} - 1) + \mathrm{O}(\mathtt{n})$$

$\mathtt{T}(\mathtt{n})$ é $\mathrm{O}(???)$.

Recorrência: versão MAC0338

$\mathtt{T}(\mathtt{n}) :=$ consumo de tempo máximo quando

$\mathtt{n} := \mathtt{r} - \mathtt{p}$

$\mathtt{T}(0) = \mathrm{O}(1)$

$\mathtt{T}(1) = \mathrm{O}(1)$

$\mathtt{T}(\mathtt{n}) = \mathtt{T}(\mathtt{k}) + \mathtt{T}(\mathtt{n} - \mathtt{k} - 1) + \mathrm{O}(\mathtt{n})$ para $\mathtt{n} = 2, 3, 4, \ldots$

Recorrência grosseira:

$$\mathtt{T}(\mathtt{n}) = \mathtt{T}(0) + \mathtt{T}(\mathtt{n} - 1) + \mathrm{O}(\mathtt{n})$$

$\mathtt{T}(\mathtt{n})$ é $\mathrm{O}(\mathtt{n}^2)$.

Demonstração: . . . em MAC0338.

Recorrência cuidadosa: versão MAC0338

$T(n)$:= consumo de tempo máximo quando $n = r - p$

$$T(0) = O(1)$$
$$T(1) = O(1)$$
$$T(n) = \max_{0 \le k \le n-1} \{T(k) + T(n-k-1)\} + O(n)$$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$

$T(n)$ é $O(n^2)$.

Demonstração: ...em MAC0338.