

## Melhores momentos

## Resumo

## AULA 21

função	consumo de tempo	observação
bubble	$O(n^2)$	todos os casos
insercao	$O(n^2)$ $O(n)$	piores caso melhor caso
insercaoBinaria	$O(n^2)$ $O(n \lg n)$	piores caso melhor caso
selecao	$O(n^2)$	todos os casos
mergeSort	$O(n \lg n)$	todos os casos
quickSort	$O(n^2)$ $O(n \lg n)$	piores caso melhor caso

## Divisão e conquista

Algoritmos por **divisão-e-conquista** têm três passos em cada nível da recursão:

**Dividir:** o problema é dividido em subproblemas de tamanho menor;

**Conquistar:** os subproblemas são resolvidos **recursivamente** e subproblemas “pequenos” são resolvidos diretamente;

**Combinar:** as soluções dos subproblemas são combinadas para obter uma solução do problema original.

**Exemplo:** ordenação por intercalação (**mergeSort**).

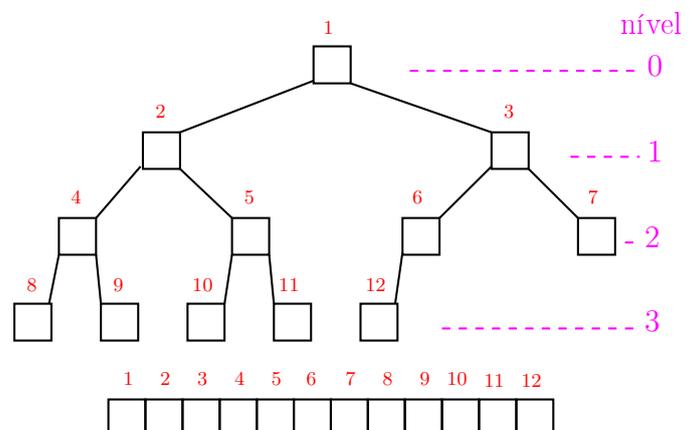
## AULA 22

## Representação de árvores em vetores e heaps

## Representação de árvores em vetores

PF 10

<http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/hpsrt.html>



## Pais e filhos

$v[1..m]$  é um vetor representando uma árvore.

Diremos que para qualquer **índice** ou **nó**  $i$ ,

- ▶  $\lfloor i/2 \rfloor$  é o **pai** de  $i$ ;
- ▶  $2i$  é o **filho esquerdo** de  $i$ ;
- ▶  $2i+1$  é o **filho direito**.

Um nó  $i$  só tem **filho esquerdo** se  $2i \leq m$ .

Um nó  $i$  só tem **filho direito** se  $2i+1 \leq m$ .

◀ ▶ ◂ ◃ ≡ 🔍

## Níveis

Cada **nível**  $p$ , exceto talvez o último, tem exatamente  $2^p$  nós e esses são

$$2^p, 2^p + 1, 2^p + 2, \dots, 2^{p+1} - 1.$$

◀ ▶ ◂ ◃ ≡ 🔍

## Níveis

Cada **nível**  $p$ , exceto talvez o último, tem exatamente  $2^p$  nós e esses são

$$2^p, 2^p + 1, 2^p + 2, \dots, 2^{p+1} - 1.$$

O nó  $i$  pertence ao **nível**  $\lfloor \lg i \rfloor$ .

◀ ▶ ◂ ◃ ≡ 🔍

## Raiz e folhas

O nó **1** não tem **pai** e é chamado de **raiz**.

Um nó  $i$  é um **folha** se não tem **filhos**, ou seja  $2i > m$ .

Todo nó  $i$  é raiz da subárvore formada por

$$v[i, 2i, 2i+1, 4i, 4i+1, 4i+2, 4i+3, 8i, \dots, 8i+7, \dots]$$

◀ ▶ ◂ ◃ ≡ 🔍

## Níveis

Cada **nível**  $p$ , exceto talvez o último, tem exatamente  $2^p$  nós e esses são

$$2^p, 2^p + 1, 2^p + 2, \dots, 2^{p+1} - 1.$$

O nó  $i$  pertence ao **nível** ???.

◀ ▶ ◂ ◃ ≡ 🔍

## Níveis

Cada **nível**  $p$ , exceto talvez o último, tem exatamente  $2^p$  nós e esses são

$$2^p, 2^p + 1, 2^p + 2, \dots, 2^{p+1} - 1.$$

O nó  $i$  pertence ao **nível**  $\lfloor \lg i \rfloor$ .

**Prova:** Se  $p$  é o nível do nó  $i$ , então

$$\begin{aligned} 2^p &\leq i < 2^{p+1} &\Rightarrow \\ \lg 2^p &\leq \lg i < \lg 2^{p+1} &\Rightarrow \\ p &\leq \lg i < p+1 \end{aligned}$$

Logo,  $p = \lfloor \lg i \rfloor$ .

◀ ▶ ◂ ◃ ≡ 🔍

## Níveis

Cada nível  $p$ , exceto talvez o último, tem exatamente  $2^p$  nós e esses são

$$2^p, 2^p + 1, 2^p + 2, \dots, 2^{p+1} - 1.$$

O nó  $i$  pertence ao nível  $\lfloor \lg i \rfloor$ .

Prova: Se  $p$  é o nível do nó  $i$ , então

$$\begin{aligned} 2^p &\leq i < 2^{p+1} \Rightarrow \\ \lg 2^p &\leq \lg i < \lg 2^{p+1} \Rightarrow \\ p &\leq \lg i < p + 1 \end{aligned}$$

Logo,  $p = \lfloor \lg i \rfloor$ .

Portanto, o número total de níveis é ???

## Altura

A **altura** de um nó  $i$  é o maior comprimento de um caminho de  $i$  a uma folha.

Em outras palavras, a altura de um nó  $i$  é o maior comprimento de uma seqüência da forma

$\langle \text{filho}(i), \text{filho}(\text{filho}(i)), \text{filho}(\text{filho}(\text{filho}(i))), \dots \rangle$ ,

onde  $\text{filho}(i)$  vale  $2i$  ou  $2i + 1$ .

Os nós que têm **altura zero** são as folhas.

## Resumão

filho esquerdo de $i$ :	$2i$
filho direito de $i$ :	$2i + 1$
pai de $i$ :	$\lfloor i/2 \rfloor$
nível da raiz:	0
nível de $i$ :	$\lfloor \lg i \rfloor$
altura da raiz:	$\lfloor \lg m \rfloor$
altura da árvore:	$\lfloor \lg m \rfloor$
altura de $i$ :	$\lfloor \lg(m/i) \rfloor$ (MAC0338)
altura de uma folha:	0
total de nós de altura $h$ :	$\leq \lceil m/2^{h+1} \rceil$ (MAC0338)

## Níveis

Cada nível  $p$ , exceto talvez o último, tem exatamente  $2^p$  nós e esses são

$$2^p, 2^p + 1, 2^p + 2, \dots, 2^{p+1} - 1.$$

O nó  $i$  pertence ao nível  $\lfloor \lg i \rfloor$ .

Prova: Se  $p$  é o nível do nó  $i$ , então

$$\begin{aligned} 2^p &\leq i < 2^{p+1} \Rightarrow \\ \lg 2^p &\leq \lg i < \lg 2^{p+1} \Rightarrow \\ p &\leq \lg i < p + 1 \end{aligned}$$

Logo,  $p = \lfloor \lg i \rfloor$ .

Portanto, o número total de níveis é  $1 + \lfloor \lg m \rfloor$ .

## Altura

A **altura** de um nó  $i$  é o maior comprimento de um caminho de  $i$  a uma folha.

Em outras palavras, a altura de um nó  $i$  é o maior comprimento de uma seqüência da forma

$\langle \text{filho}(i), \text{filho}(\text{filho}(i)), \text{filho}(\text{filho}(\text{filho}(i))), \dots \rangle$ ,

onde  $\text{filho}(i)$  vale  $2i$  ou  $2i + 1$ .

Os nós que têm **altura zero** são as folhas.

A altura de um nó  $i$  é  $\lfloor \lg(m/i) \rfloor$  (MAC0338).

## Heaps

Um vetor  $v[1..m]$  é um **max-heap** se

$$v[\lfloor i/2 \rfloor] \geq v[i]$$

para todo  $i = 2, 3, \dots, m$ .

De uma forma mais geral,  $v[j..m]$  é um **max-heap** se

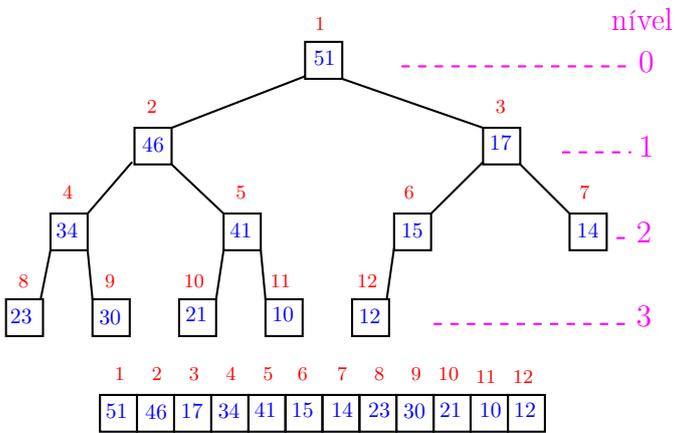
$$v[\lfloor i/2 \rfloor] \geq v[i]$$

para todo

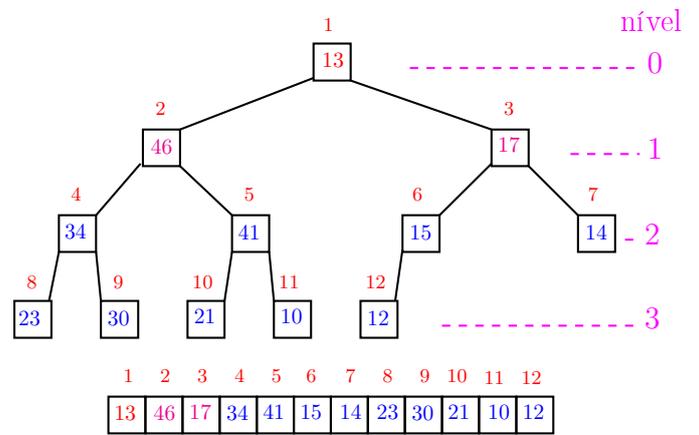
$i = 2j, 2j + 1, 4j, \dots, 4j + 3, 8j, \dots, 8j + 7, \dots$

Neste caso também diremos que a subárvore com raiz  $j$  é um **max-heap**.

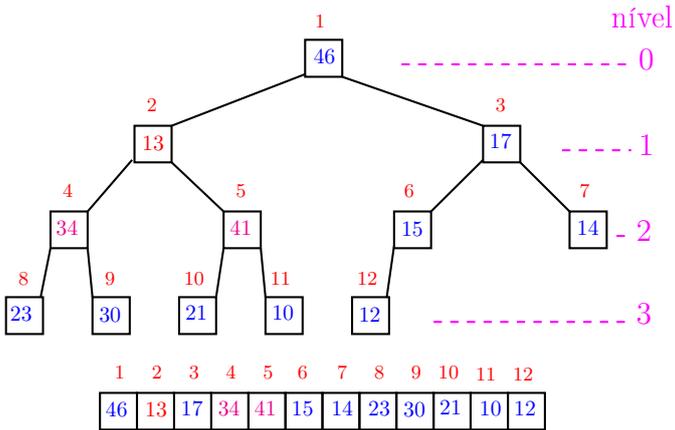
### max-heap



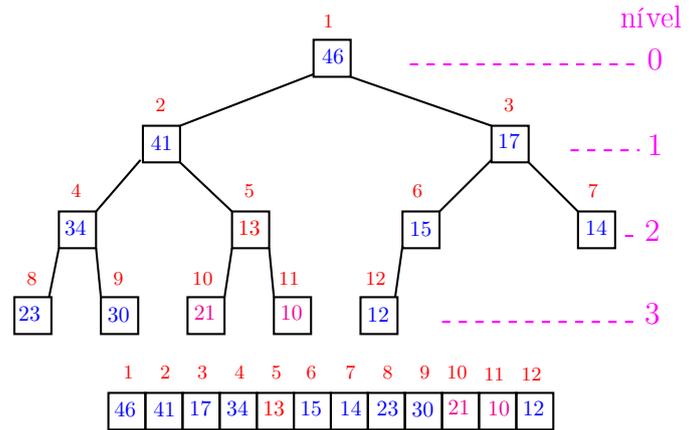
### Função básica de manipulação de max-heap



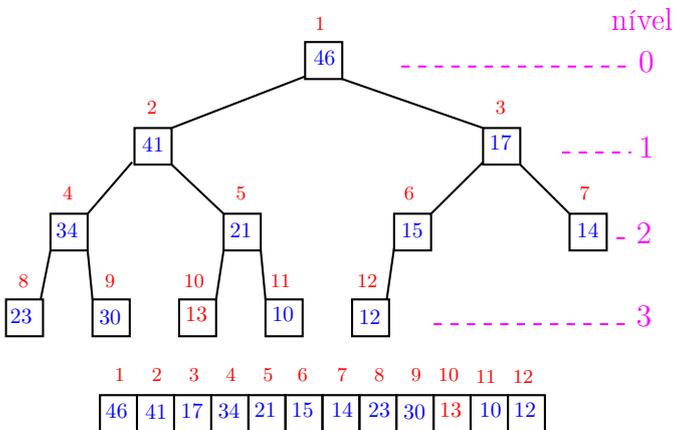
### Função básica de manipulação de max-heap



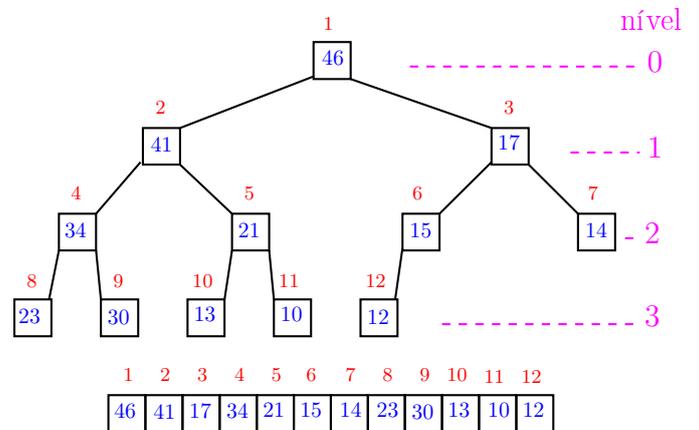
### Função básica de manipulação de max-heap



### Função básica de manipulação de max-heap



### Função básica de manipulação de max-heap



## Função peneira

O coração de qualquer algoritmo que manipule um **max-heap** é uma função que recebe um vetor arbitrário  $v[1..m]$  e um índice  $i$  e faz  $v[i]$  "descer" para sua posição correta.

## Função peneira

Rearranja o vetor  $v[1..m]$  de modo que o "subvetor" cuja raiz é  $i$  seja um **max-heap**.

```
void peneira (int i, int m, int v[]) {
1  int f = 2*i, x;
2  while (f <= m) {
3      if (f < m && v[f] < v[f+1]) f++;
4      if (v[i] >= v[f]) break;
5      x = v[i]; v[i] = v[f]; v[f] = x;
6      i = f; f = 2*i;
    }
}
```

## Função peneira

Supõe que os "subvetores" cujas raízes são **filhos** de  $i$  já são **max-heap**.

```
void peneira (int i, int m, int v[]) {
1  int f = 2*i, x;
2  while (f <= m) {
3      if (f < m && v[f] < v[f+1]) f++;
4      if (v[i] >= v[f]) break;
5      x = v[i]; v[i] = v[f]; v[f] = x;
6      i = f; f = 2*i;
    }
}
```

## Função peneira

A seguinte implementação é um pouco melhor pois em vez de **trocadas** faz apenas **deslocamentos** (linha 5).

```
void peneira (int i, int m, int v[]) {
1  int f = 2*i, x = v[i];
2  while (f <= m) {
3      if (f < m && v[f] < v[f+1]) f++;
4      if (x >= v[f]) break;
5      v[i] = v[f];
6      i = f; f = 2*i;
    }
7  v[i] = x;
}
```

## Consumo de tempo

linha	todas as execuções da linha
1	= 1
2	≤ 1 + lg m
3	≤ lg m
4	≤ lg m
5	≤ lg m
6	≤ lg m
7	= 1
<b>total</b>	≤ 3 + 5 lg m = O(lg m)

## Conclusão

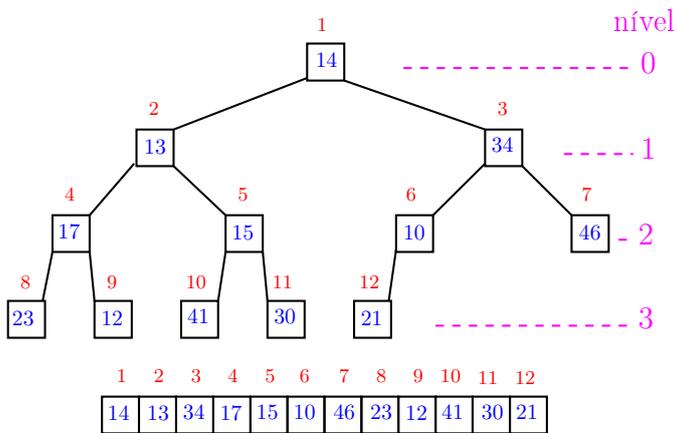
O consumo de tempo da função **peneira** é proporcional a  $\lg m$ .

O consumo de tempo da função **peneira** é  $O(\lg m)$ .

Verdade seja dita ... (MAC0338)

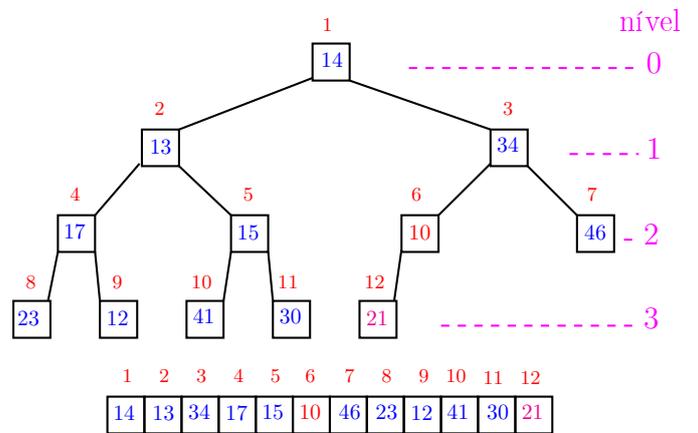
O consumo de tempo da função **peneira** é proporcional a  $O(\lg m/i)$ .

### Construção de um max-heap



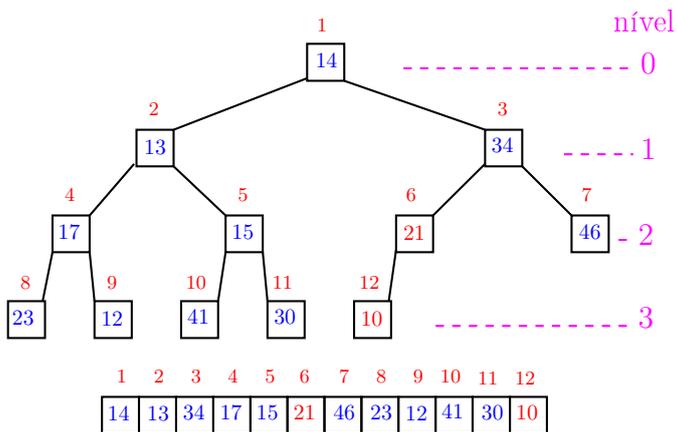
◀ ▶ ⏪ ⏩ 🔍

### Construção de um max-heap



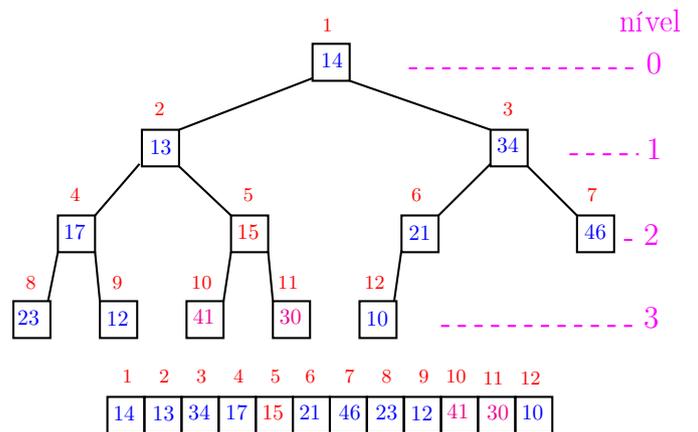
◀ ▶ ⏪ ⏩ 🔍

### Construção de um max-heap



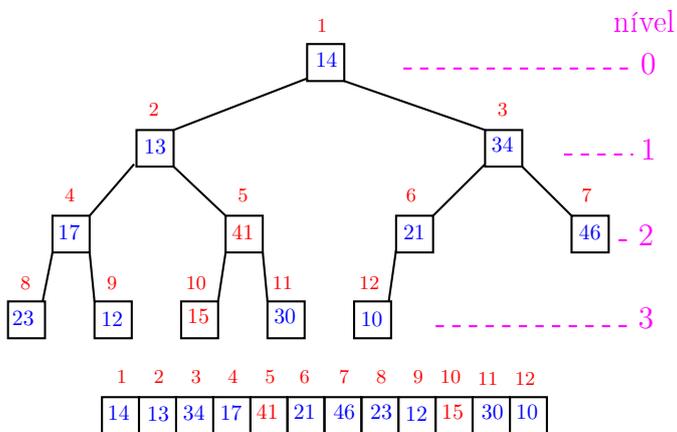
◀ ▶ ⏪ ⏩ 🔍

### Construção de um max-heap



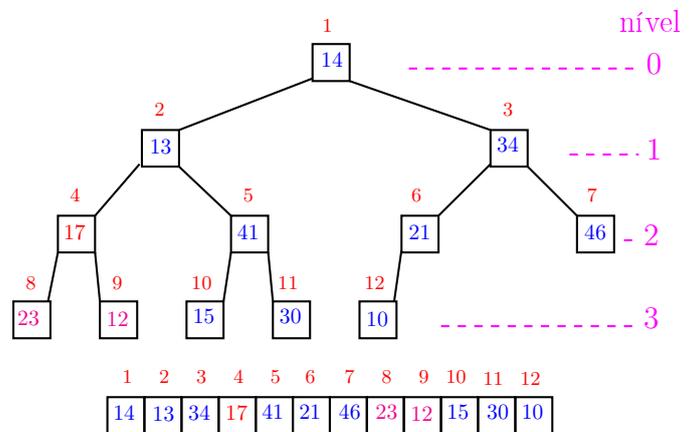
◀ ▶ ⏪ ⏩ 🔍

### Construção de um max-heap



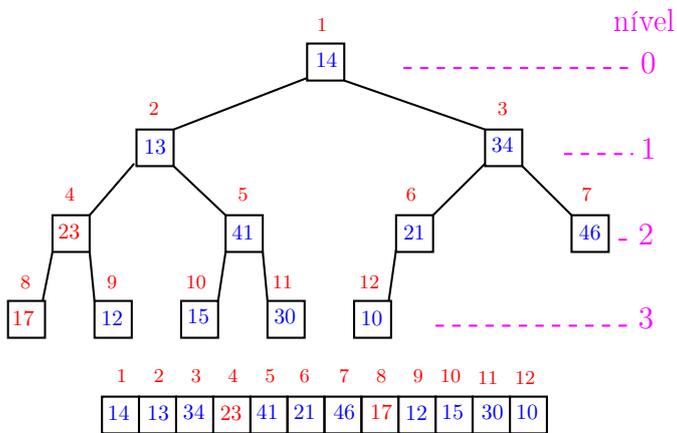
◀ ▶ ⏪ ⏩ 🔍

### Construção de um max-heap



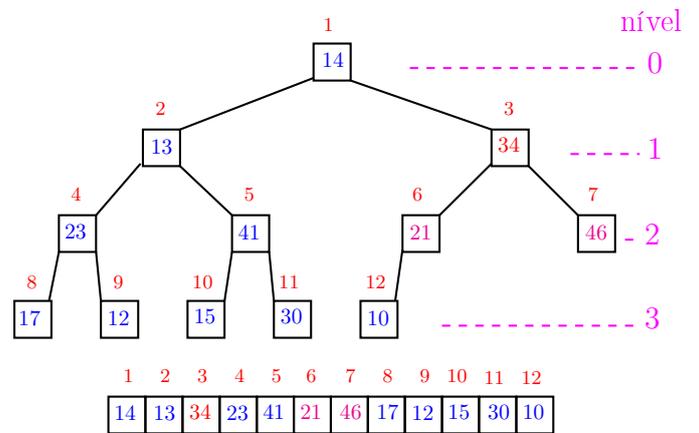
◀ ▶ ⏪ ⏩ 🔍

### Construção de um max-heap



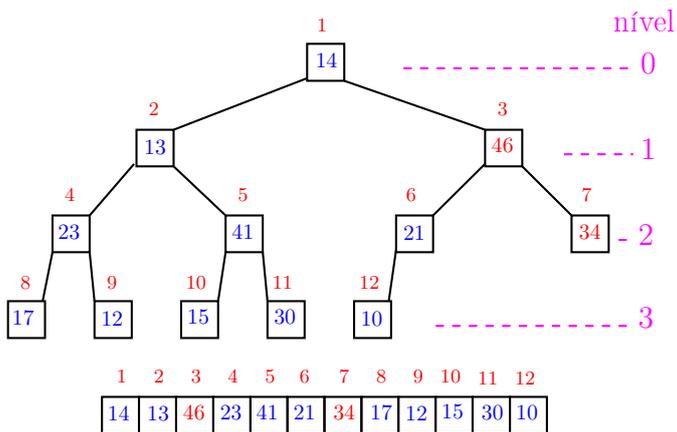
◀ ▶ ↺ ↻ 🔍

### Construção de um max-heap



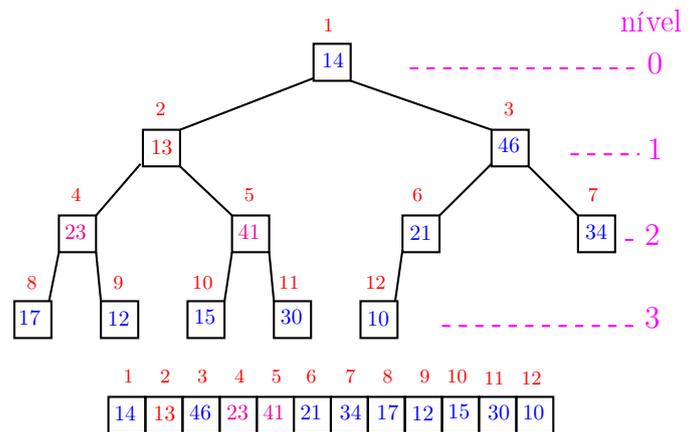
◀ ▶ ↺ ↻ 🔍

### Construção de um max-heap



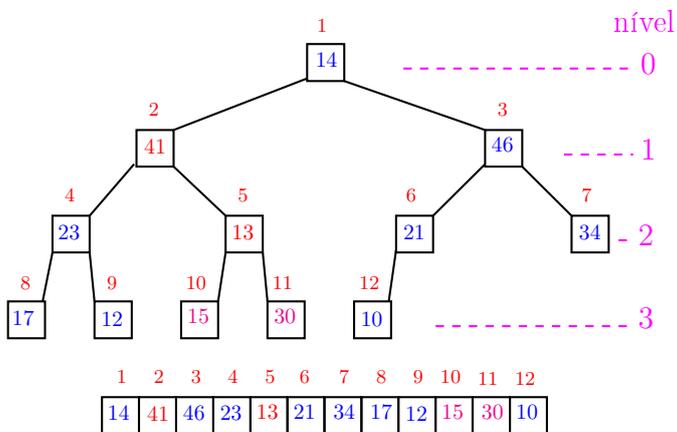
◀ ▶ ↺ ↻ 🔍

### Construção de um max-heap



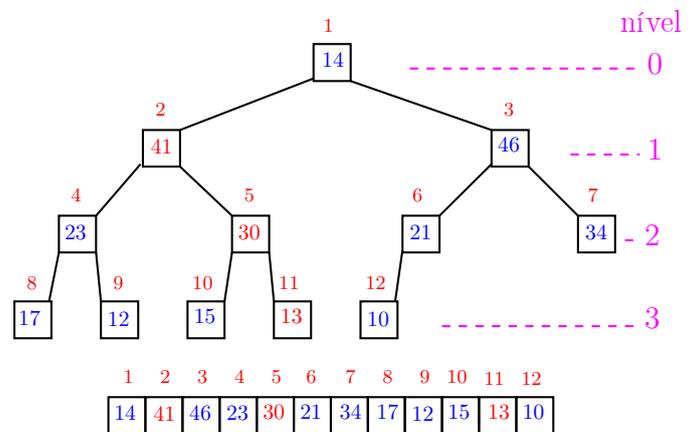
◀ ▶ ↺ ↻ 🔍

### Construção de um max-heap



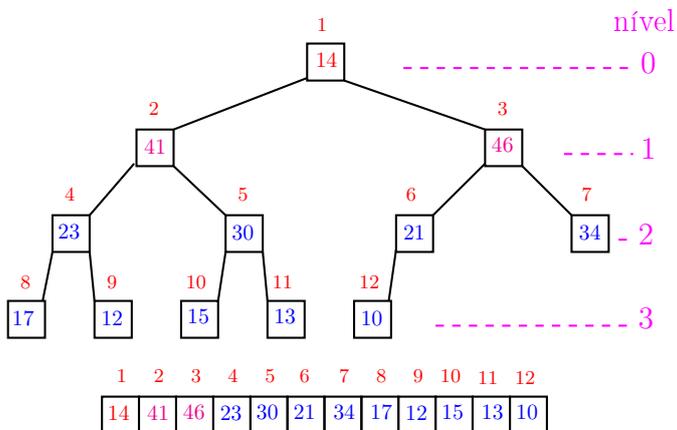
◀ ▶ ↺ ↻ 🔍

### Construção de um max-heap



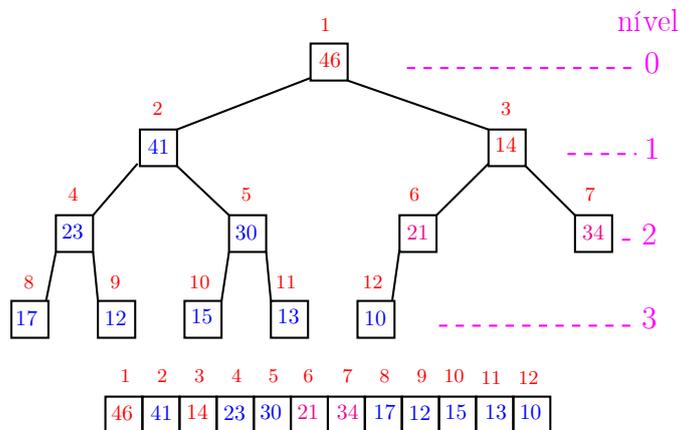
◀ ▶ ↺ ↻ 🔍

### Construção de um max-heap



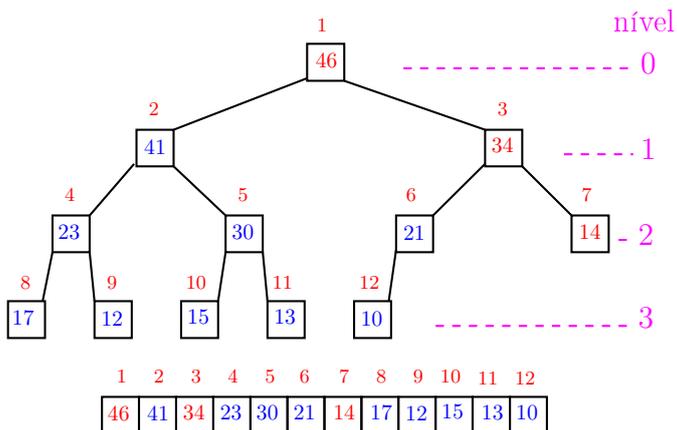
◀ ▶ ↺ ↻ 🔍

### Construção de um max-heap



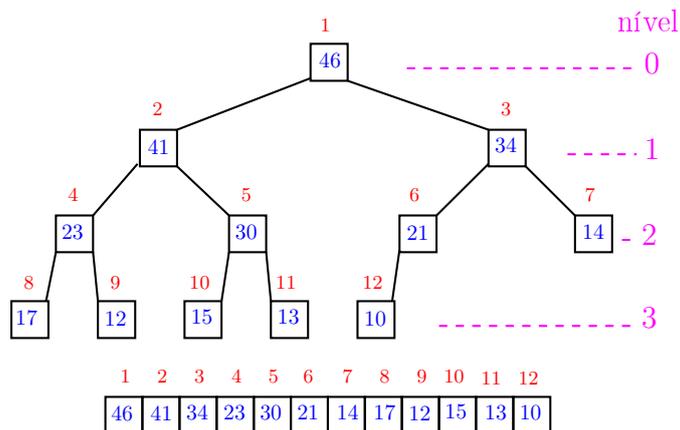
◀ ▶ ↺ ↻ 🔍

### Construção de um max-heap



◀ ▶ ↺ ↻ 🔍

### Construção de um max-heap



◀ ▶ ↺ ↻ 🔍

### Construção de um max-heap

Recebe um vetor  $v[1..n]$  e rearranja  $v$  para que seja max-heap.

```
1 for (i = n/2; /*A*/ i >= 1; i--)
2   peneira(i, n, v);
```

Relação invariante:

(i0) em /\*A\*/ vale que,  $i+1, \dots, n$  são raízes de max-heaps.

◀ ▶ ↺ ↻ 🔍

### Consumo de tempo

Análise grosseira: consumo de tempo é

$$\frac{n}{2} \times \lg n = O(n \lg n).$$

Verdade seja dita ... (MAC0338)

Análise mais cuidadosa: consumo de tempo é  $O(n)$ .

◀ ▶ ↺ ↻ 🔍

