

Ordenação por inserção binária



Fonte: <http://www.php5dp.com/>

PF 7.3, 8.1 e 8.2

<http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/ordena.html>

Busca binária

Esta função recebe uma lista crescente $v[0:n]$ com $n \geq 1$ e um inteiro x e retorna um índice j em $\text{range}(0, n)$ tal que $v[j] \leq x < v[j+1]$

```
def busca_binaria (x, n, v):
1   e, d = -1, n
2   while e < d-1: # /*A*/
3       m = (e + d) // 2
4       if v[m] <= x: e = m
5       else: d = m
6   return e
```

Relações invariantes

A relação invariante *chave* da função `busca_binaria` é

(i0) Em /*A*/ vale que $v[e] \leq x < v[d]$

A correção da função segue facilmente dessa relação e da condição de parada do `while`.

Busca binária: recordação

O consumo de tempo da função `busca_binaria` é proporcional a $\lg n$.

O consumo de tempo da função `busca_binaria` é $O(\lg n)$.

insercao

Função rearranja $v[0:n]$ em ordem crescente.

```
def insercao(v):
0   n = len(v)
1   for i in range(1,n): # /*A*/
2       x = v[i]
3       j = j - 1
4       while j >= 0 and v[j] > x:
5           v[j+1] = v[j]
6           j -= 1
7       v[j+1] = x
```

insercao_binaria

Função rearranja $v[0:n]$ em ordem crescente.

```
def insercao_binaria(v):
0   n = len(v)
1   for i in range(1,n): # /*A*/
2       x = v[i]
3       j = busca_binaria(x,i,v)
4       for k in range(i,j+1,-1):
5           v[k] = v[k-1]
6       v[j+1] = x
```

Pior e melhor casos

O maior consumo de tempo da função `insercao_binaria` ocorre quando a lista `v[0:n]` dada é **decrecente**. Este é o **pior caso** para a função `insercao_binaria`.

O menor consumo de tempo da função `insercao_binaria` ocorre quando a lista `v[0:n]` dada já é **crecente**. Este é o **melhor caso** para a função `insercao_binaria`.

Consumo de tempo no pior caso

linha	consumo de tempo (proporcional a)
0	= 1
1	= n
2	= $n - 1$
3	$\approx \lg 1 + \lg 2 + \dots + \lg n \leq n \lg n$
4	$\leq 2 + 3 + \dots + n = (n - 1)(n + 2)/2$
5	$\leq 1 + 2 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$
6	= n

total $\leq n^2 + n \lg n + 3n = O(n^2)$

Consumo de tempo no melhor caso

linha	consumo de tempo (proporcional a)
0	= 1
1	= n
2	= $n - 1$
3	$\approx \lg 1 + \lg 2 + \dots + \lg n \leq n \lg n$
4	= $1 + 1 + \dots + 1 = n$
5	= 0
6	= n

total = $n \lg n + 4n = O(n \lg n)$

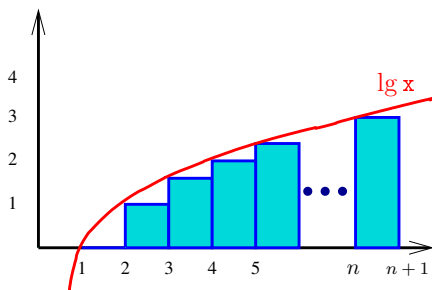
Conclusões

O consumo de tempo da função `insercao_binaria` no **pior caso** é proporcional a n^2 .

O consumo de tempo da função `insercao_binaria` no **melhor caso** é proporcional a $n \lg n$.

O consumo de tempo da função `insercao_binaria` é $O(n^2)$.

$$\lg 1 + \lg 2 + \dots + \lg n = O(n \lg n)$$



$$\lg 1 + \lg 2 + \dots + \lg n \leq \int_1^{n+1} \lg x \, dx$$

$$\lg 1 + \lg 2 + \dots + \lg n = O(n \lg n)$$

$$\begin{aligned} \int_1^{n+1} \lg x \, dx &= \left(\int_1^{n+1} \ln x \, dx \right) / \ln 2 \\ &= x \ln x - x \Big|_1^{n+1} / \ln 2 \\ &= ((n+1) \ln(n+1) - (n+1) + 1) / \ln 2 \\ &= ((n+1) \ln(n+1) - n) / \ln 2 \\ &< (n+1) \lg(n+1) \\ &= O(n \lg n) \end{aligned}$$