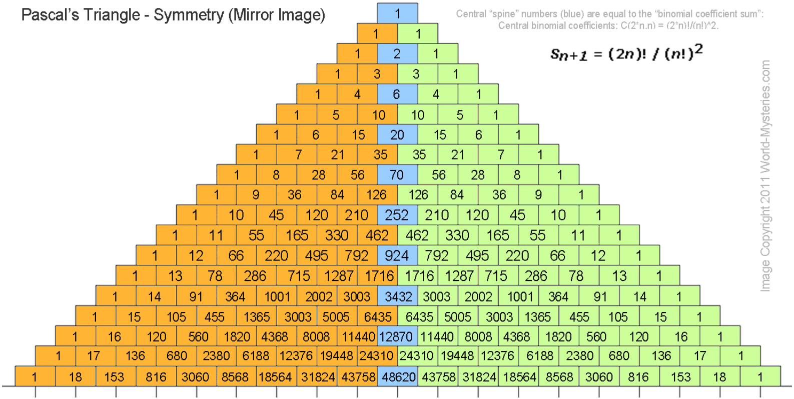
Números binomiais



Fonte: http://blog.world-mysteries.com/

PF 2 (Exercícios)

http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/recu.html

Binomial recursivo

Regra de Pascal

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0, & \text{quando } n = 0 \text{ e } k > 0, \\ 1, & \text{quando } n \geq 0 \text{ e } k = 0, \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, & \text{quando } n, k > 0. \end{cases}$$

Binomial

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	k
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	...	
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	...	
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	...	
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	...	
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	...	
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	...	
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	...	
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	...	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
n											

Binomial recursivo

```
def binomialR0(n,k):
    '''(int,int) -> int
    Recebe um inteiros n e k e retorna o
    número binomial de n e k.
    '''
    if n == 0 and k >  0:  return 0
    if n >= 0 and k == 0:  return 1
       return binomialR0(n-1, k) + \
                   binomialR0(n-1, k-1)
```

binomialR0(3,2)

```
binomialR0(3,2)
  binomialR0(2,2)
    binomialR0(1,2)
      binomialR0(0,2)
      binomialR0(0,1)
    binomialR0(1,1)
      binomialR0(0,1)
      binomialR0(0,0)
  binomialR0(2,1)
    binomialR0(1,1)
      binomialR0(0,1)
      binomialR0(0,0)
    binomialR0(1,0)
binom(3,2)=3.
```

Binomial iterativo

```
def binomialI(n, k):
    # matriz de 0s de dim.  (n+1) x (k+1)
    bin[MAX][MAX] = crie_matriz(n+1,k+1,0)

    for i in range(n+1):  bin[i][0] = 1

    for i in range(1,n+1,1):
        for j in range(1,k+1,1):
            bin[i][j] = bin[i-1][j] + \
                        bin[i-1][j-1]

    return bin[n][k]
```

crie_lista()

```
def crie_lista(n, valor):
    '''(int,objeto) -> list
    Recebe um inteiro n e um objeto valor
    e cria e retorna uma lista de n itens
    que fazem referência a valor.
    '''
    lista = [ ] # lista vazia

    for i in range(0,n,1):
        lista.append(valor)

    return lista
```

crie_matriz()

```
def crie_matriz(n, m, valor):
    '''(int,int,objeto) -> list
    Recebe um inteiros n e m e um objeto
    valor e cria e retorna uma matriz
    de dimensão n x n com itens
    que fazem referência a valor.
    '''
    matriz = [ ] # lista vazia
    for i in range(0,n,1):
        linha = crie_lista(m,valor)
        matriz.append(linha)
    return matriz
```

Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./binomialI.py 30 2
binom(30,2)=435
real                            0m0.023s
user                            0m0.020s
sys                             0m0.000s

meu_prompt> time ./binomialR0.py 30 2
binom(30,2)=435
real                             0m0.024s
user                             0m0.020s
sys                              0m0.000s
```

Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./binomialI.py 30 20
binom(30,20)=30045015
real                        0m0.023s
user                        0m0.020s
sys                         0m0.000s

meu_prompt> time ./binomialR0.py 30 20
binom(30,20)=30045015
real                        6m44.702s
user                        6m44.436s
sys                          0m0.092s
```

Resolve subproblemas muitas vezes

```
binomialR0(3,2)
  binomialR0(2,2)
    binomialR0(1,2)
      binomialR0(0,2)
      binomialR0(0,1)
    binomialR0(1,1)
      binomialR0(0,1)
      binomialR0(0,0)
  binomialR0(2,1)
    binomialR0(1,1)
      binomialR0(0,1)
      binomialR0(0,0)
    binomialR0(1,0)
binom(3,2)=3.
```

Resolve subproblemas muitas vezes

```
binomialR0(5,4)
  binomialR0(4,4)
    binomialR0(3,4)
      binomialR0(2,4)
        binomialR0(1,4)
          binomialR0(0,4)
          binomialR0(0,3)
        binomialR0(1,3)
          binomialR0(0,3)
          binomialR0(0,2)
      binomialR0(2,3)
        binomialR0(1,3)
          binomialR0(0,3)
          binomialR0(0,2)
        binomialR0(1,2)
          binomialR0(0,2)
          binomialR0(0,1)
    binomialR0(3,3)
      binomialR0(2,3)
        binomialR0(1,3)
          binomialR0(0,3)
```

```
          binomialR0(0,2)
        binomialR0(1,2)
          binomialR0(0,2)
          binomialR0(0,1)
      binomialR0(2,2)
        binomialR0(1,2)
          binomialR0(0,2)
          binomialR0(0,1)
        binomialR0(1,1)
          binomialR0(0,1)
          binomialR0(0,0)
  binomialR0(4,3)
    binomialR0(3,3)
      binomialR0(2,3)
        binomialR0(1,3)
          binomialR0(0,3)
          binomialR0(0,2)
        binomialR0(1,2)
          binomialR0(0,2)
          binomialR0(0,1)
      binomialR0(2,2)
```

```
        binomialR0(1,2)
          binomialR0(0,2)
          binomialR0(0,1)
        binomialR0(1,1)
          binomialR0(0,1)
          binomialR0(0,0)
    binomialR0(3,2)
      binomialR0(2,2)
        binomialR0(1,2)
          binomialR0(0,2)
          binomialR0(0,1)
        binomialR0(1,1)
          binomialR0(0,1)
          binomialR0(0,0)
      binomialR0(2,1)
        binomialR0(1,1)
          binomialR0(0,1)
          binomialR0(0,0)
        binomialR0(1,0)
binom(5,4)=5.
```

Mais eficiente . . .

Regra de Pascal

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0, & \text{quando } n < k, \\ 1, & \text{quando } n = k \text{ ou } k = 0, \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, & \text{quando } n, k > 0. \end{cases}$$

Mais eficiente . . .

```
def binomialR1(n, k)
    if n < k:  return 0
    if n == k or k == 0:  return 1
    return binomialR1(n-1, k) \
           + binomialR1(n-1, k-1)
```

E agora? Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./binomialI.py 30 20
binom(30,20)=30045015
real                        0m0.022s
user                        0m0.016s
sys                         0m0.004s

meu_prompt> time ./binomialR1.py 30 20
binom(30,20)=30045015
real                        0m11.947s
user                        0m11.936s
sys                          0m0.004s
```

E agora? Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./binomialI.py 40 30
binom(40,30)=847660528
real                          0m0.025s
user                          0m0.020s
sys                           0m0.004s

meu_prompt> time ./binomialR1.py 40 30
binom(40,30)=847660528
real                          5m31.581s
user                          5m31.332s
sys                            0m0.100s
```

Resolve subproblemas muitas vezes?

```
binomialR1(3,2)
  binomialR1(2,2)
  binomialR1(2,1)
    binomialR1(1,1)
    binomialR1(1,0)
binom(3,2)=3.
```

Resolve subproblemas muitas vezes?

```
binomialR1(5,4)
  binomialR1(4,4)
  binomialR1(4,3)
    binomialR1(3,3)
    binomialR1(3,2)
      binomialR1(2,2)
      binomialR1(2,1)
        binomialR1(1,1)
        binomialR1(1,0)
binom(5,4)=5.
```

Resolve subproblemas muitas vezes?

```
binomialR1(6,4)
  binomialR1(5,4)
    binomialR1(4,4)
    binomialR1(4,3)
      binomialR1(3,3)
      binomialR1(3,2)
        binomialR1(2,2)
        binomialR1(2,1)
          binomialR1(1,1)
          binomialR1(1,0)
  binomialR1(5,3)
    binomialR1(4,3)
      binomialR1(3,3)
      binomialR1(3,2)
        binomialR1(2,2)
```

```
        binomialR1(2,1)
          binomialR1(1,1)
          binomialR1(1,0)
    binomialR1(4,2)
      binomialR1(3,2)
        binomialR1(2,2)
        binomialR1(2,1)
          binomialR1(1,1)
          binomialR1(1,0)
      binomialR1(3,1)
        binomialR1(2,1)
          binomialR1(1,1)
          binomialR1(1,0)
        binomialR1(2,0)
binom(6,4)=15.
```

Sim!

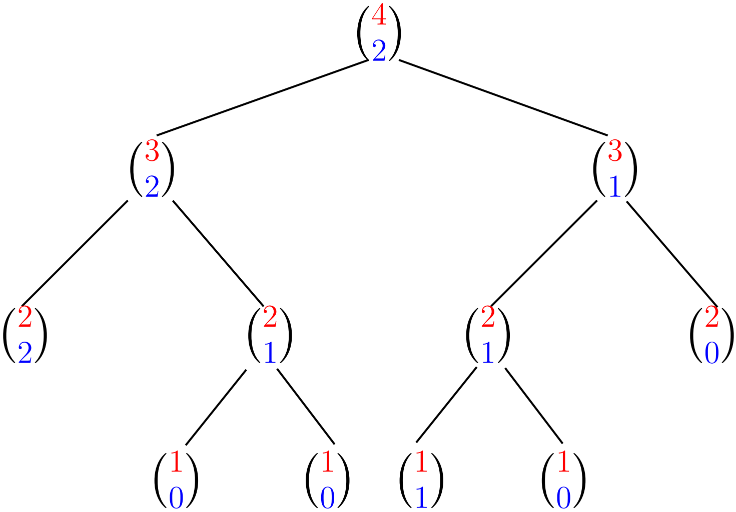
Resolve subproblemas muitas vezes?

```
binomialR1(7,4)
  binomialR1(6,4)
    binomialR1(5,4)
      binomialR1(4,4)
      binomialR1(4,3)
        binomialR1(3,3)
        binomialR1(3,2)
          binomialR1(2,2)
          binomialR1(2,1)
            binomialR1(1,1)
            binomialR1(1,0)
    binomialR1(5,3)
      binomialR1(4,3)
        binomialR1(3,3)
        binomialR1(3,2)
          binomialR1(2,2)
          binomialR1(2,1)
            binomialR1(1,1)
            binomialR1(1,0)
      binomialR1(4,2)
        binomialR1(3,2)
          binomialR1(2,2)
          binomialR1(2,1)
            binomialR1(1,1)
            binomialR1(1,0)
        binomialR1(3,1)
          binomialR1(2,1)
            binomialR1(1,1)
            binomialR1(1,0)
          binomialR1(2,0)
  binomialR1(6,3)
    binomialR1(5,3)
      binomialR1(4,3)
        binomialR1(3,3)
        binomialR1(3,2)
          binomialR1(2,2)
          binomialR1(2,1)
            binomialR1(1,1)
            binomialR1(1,0)
      binomialR1(4,2)
        binomialR1(3,2)
          binomialR1(2,2)
          binomialR1(2,1)
            binomialR1(1,1)
            binomialR1(1,0)
        binomialR1(3,1)
          binomialR1(2,1)
            binomialR1(1,1)
            binomialR1(1,0)
          binomialR1(2,0)
    binomialR1(5,2)
      binomialR1(4,2)
        binomialR1(3,2)
          binomialR1(2,2)
          binomialR1(2,1)
            binomialR1(1,1)
            binomialR1(1,0)
        binomialR1(3,1)
          binomialR1(2,1)
            binomialR1(1,1)
            binomialR1(1,0)
          binomialR1(2,0)
      binomialR1(4,1)
        binomialR1(3,1)
          binomialR1(2,1)
            binomialR1(1,1)
            binomialR1(1,0)
          binomialR1(2,0)
        binomialR1(3,0)
binom(7,4)=35.
```

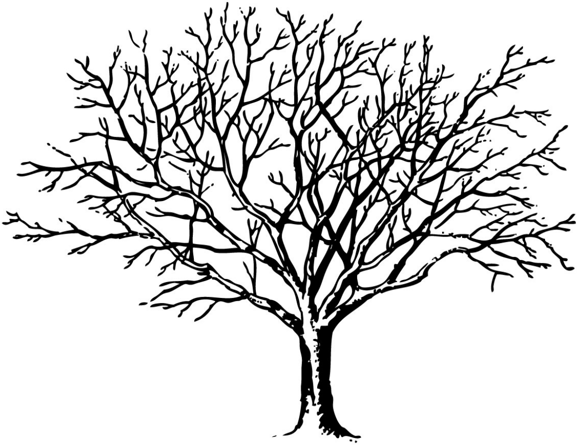
Sim!

Árvore da recursão

`binomialR1` resolve subproblemas muitas vezes.



Árvore



Fonte: http://tfhoa.com/treework

Desempenho de binomialR1

Quantas chamadas recursivas faz a função `binomialR1`?

É o dobro do número de adições.

Vamos calcular o número de adições feitas pela chamada `binomialR1(n,k)`.

Seja $T(n,k)$ o número de adições feitas pela chamada `binomialR1(n,k)`.

Número de adições

```
def binomialR1(int n, int k)
    if n < k:  return 0
    if n == k or k == 0:  return 1
    return binomialR1(n-1, k) \
               + binomialR1(n-1, k-1)
```

Número de adições

linha	número de adições
1	$= 0$
2	$= 0$
3	$= \mathtt{T}(\mathtt{n}{-}1,\mathtt{k})$
4	$= \mathtt{T}(\mathtt{n}{-}1,\mathtt{k}{-}1) + 1$

$$\mathtt{T}(\mathtt{n},\mathtt{k}) = \mathtt{T}(\mathtt{n}{-}1,\mathtt{k}) + \mathtt{T}(\mathtt{n}{-}1,\mathtt{k}{-}1) + 1$$

Relação de recorrência!

Relação de recorrência

$$T(n,k) = \begin{cases} 0, & n < k, \\ 0, & n = k \text{ ou } k = 0, \\ T(n{-}1,k) + T(n{-}1,k{-}1) + 1, & n,k > 0. \end{cases}$$

Quanto vale $T(n,k)$?

Número $T(n, k)$ de adições

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\ldots$	k
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\ldots$	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\ldots$	
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\ldots$	
3	0	2	2	0	0	0	0	0	0	$\ldots$	
4	0	3	5	3	0	0	0	0	0	$\ldots$	
5	0	4	9	9	4	0	0	0	0	$\ldots$	
6	0	5	14	19	14	5	0	0	0	$\ldots$	
7	0	6	20	34	34	20	6	0	0	$\ldots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
n											

Binomial

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	k
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	...	
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	...	
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	...	
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	...	
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	...	
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	...	
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	...	
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	...	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
n											

Número de adições

O número `T(n,k)` de adições feitas pela chamada `binomialR1(n,k)` é

$$\binom{\mathtt{n}}{\mathtt{k}} - 1\,.$$

O consumo de tempo da função é proporcional ao número de iterações e portanto é "*proporcional*" a $\binom{\mathtt{n}}{\mathtt{k}}$.

Quando o valor de `k` é aproximadamente $\mathtt{n}/2$

$$\binom{\mathtt{n}}{\mathtt{k}} \geq 2^{\frac{\mathtt{n}}{2}}$$

e o consumo de tempo é dito "*exponencial*".

Conclusões

Devemos **evitar** resolver o mesmo subproblema várias vezes.

O número de chamadas recursivas feitas por `binomialR1(n,k)` é

$$2 \times \binom{n}{k} - 2\,.$$

Binomial mais eficiente ainda ...

Supondo $n \geq k \geq 1$ temos que

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k)k!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \times \frac{n}{k} \\
&= \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} \times \frac{n}{k} \\
&= \binom{n-1}{k-1} \times \frac{n}{k}.
\end{aligned}$$

Binomial mais eficiente ainda ...

Logo, supondo $n \geq k \geq 1$, podemos escrever

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} n, & \text{quando } k = 1, \\ \binom{n-1}{k-1} \times \frac{n}{k}, & \text{quando } k > 1. \end{cases}$$

```
def binomialR2(n, k):
    if k == 1:  return n
    return binomialR2(n-1, k-1) * n // k
```

A função binomialR2 faz recursão de cauda (*Tail recursion*).

binomialR2(20,10)

```
binomialR2(20,10)
  binomialR2(19,9)
    binomialR2(18,8)
      binomialR2(17,7)
        binomialR2(16,6)
          binomialR2(15,5)
            binomialR2(14,4)
              binomialR2(13,3)
                binomialR2(12,2)
                  binomialR2(11,1)
binom(20,10)=184756.
```

E agora, qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./binomialI.py 30 2
binom(30,2)=435
real                          0m0.026s
user                          0m0.020s
sys                           0m0.004s

meu_prompt> time ./binomialR2.py 30 2
binom(30,2)=435
real                           0m0.022s
user                           0m0.020s
sys                            0m0.000s
```

E agora, qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./binomialI.py 30 20
binom(30,20)=30045015
real                          0m0.024s
user                          0m0.020s
sys                           0m0.000s

meu_prompt> time ./binomialR2.py 30 20
binom(30,20)=30045015
real                          0m0.022s
user                          0m0.020s
sys                           0m0.000s
```

Conclusão

$\boxed{\text{O número de chamadas recursivas feitas por } \texttt{binomialR2(n,k)} \text{ é } k - 1.}$