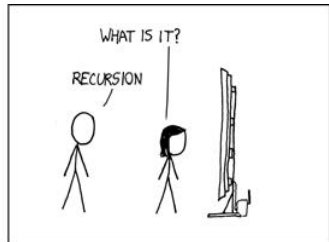
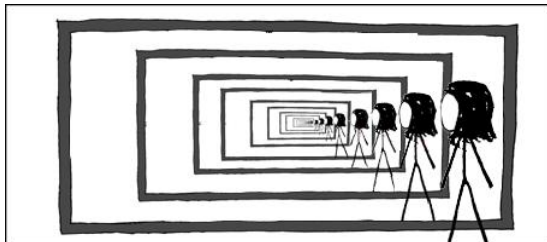


Recursão



Fonte: <http://xkcdsw.com/1105>

PF 2.1, 2.2, 2.3 S 5.1 MD *Recursion*

<http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/recu.html>

Recursão

“To understand recursion, we must first understand recursion.”

–folclore

“Para fazer uma função recursivo é preciso ter fé.”

–Siang Wu Song

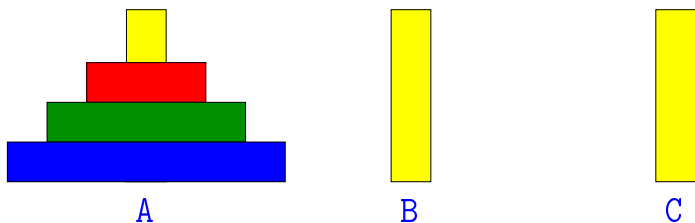
Torres de Hanoi



Fonte: <http://commons.wikimedia.org/>
Licensed under Creative Commons Attribution
Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons

http://en.wikipedia.org/wiki/Hanoi_tower
Problem Solving: Tower of Hanoi

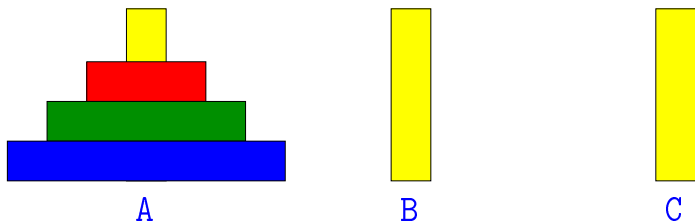
Torres de Hanoi



Desejamos transferir n discos do pino A para o pino C usando o pino B como auxiliar e respeitando as regras:

- ▶ podemos mover apenas um disco por vez;
- ▶ nunca um disco de diâmetro maior poderá ser colocado sobre um disco de diâmetro menor.

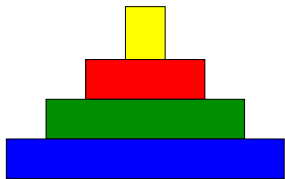
Torres de Hanoi



Denotaremos por $\text{Hanoi}(n, A, B, C)$ o problema de transferir n discos do pino A para o pino C usando o pino B como auxiliar

Como resolver $\text{Hanoi}(n, A, B, C)$?

Idéia



A



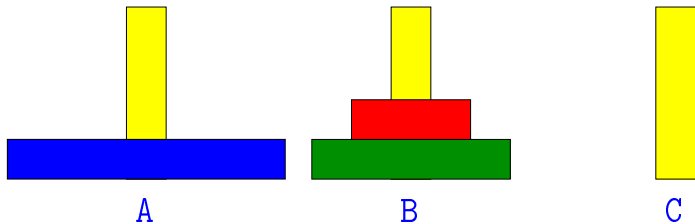
B



C

Posso não saber qual o primeiro movimento, mas é fácil saber qual é o **movimento do meio**.

Idéia

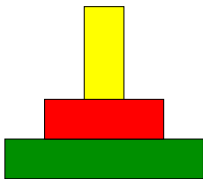


Posso não saber qual o primeiro movimento, mas é fácil saber qual é o **movimento do meio**.

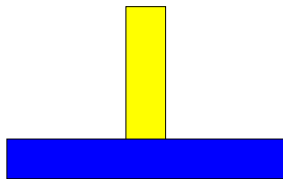
Idéia



A



B



C

Posso não saber qual o primeiro movimento, mas é fácil saber qual é o **movimento do meio**.

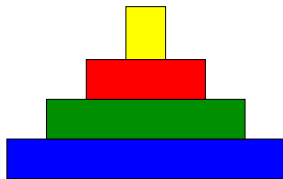
Idéia



A



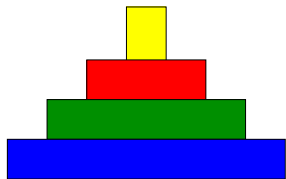
B



C

Posso não saber qual o primeiro movimento, mas é fácil saber qual é o **movimento do meio**.

Solução



A



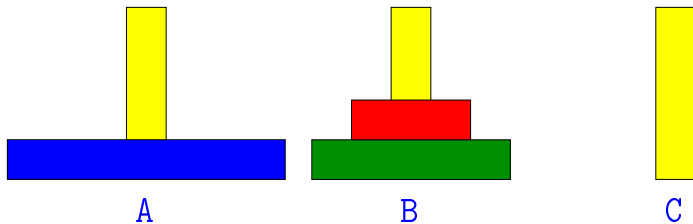
B



C

Para resolver $\text{Hanoi}(n, A, B, C)$ basta:

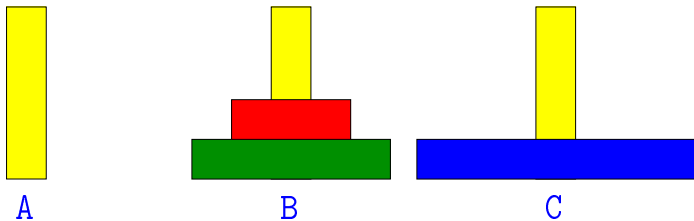
Solução



Para resolver $\text{Hanoi}(n, A, B, C)$ basta:

1. resolver $\text{Hanoi}(\underline{n-1}, A, C, B)$

Solução



Para resolver $\text{Hanoi}(n, A, B, C)$ basta:

1. resolver $\text{Hanoi}(n-1, A, C, B)$
2. mover o disco n de A para C

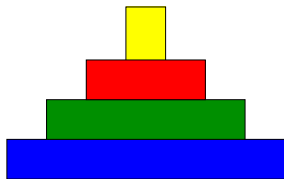
Solução



A



B



C

Para resolver $\text{Hanoi}(n, A, B, C)$ basta:

1. resolver $\text{Hanoi}(\underline{n-1}, A, C, B)$
2. mover o disco n de A para C
3. resolver $\text{Hanoi}(\underline{n-1}, B, A, C)$

Solução

Para resolver $\text{Hanoi}(n, A, B, C)$ basta:

1. resolver $\text{Hanoi}(\underline{n-1}, A, C, B)$
2. mover o disco n de A para C
3. resolver $\text{Hanoi}(\underline{n-1}, B, A, C)$

E daí?

Solução

Para resolver $\text{Hanoi}(n, A, B, C)$ basta:

1. resolver $\text{Hanoi}(n-1, A, C, B)$
2. mover o disco n de A para C
3. resolver $\text{Hanoi}(n-1, B, A, C)$

E daí?

Reduzimos o problema com n discos para 2 problemas com $n-1$ disco!

Solução

Para resolver $\text{Hanoi}(n, A, B, C)$ basta:

1. resolver $\text{Hanoi}(n-1, A, C, B)$
2. mover o disco n de A para C
3. resolver $\text{Hanoi}(n-1, B, A, C)$

E daí?

Reduzimos o problema com n discos para 2 problemas com $n-1$ disco!

Paramos de reduzir quando soubermos resolver o problema. Por exemplo, sabemos resolver

$\text{Hanoi}(0, \dots, \dots, \dots)$

Função que resolve o problema

```
def hanoi(n, origem, auxiliar, destino):  
    '''(int,str,str,str) -> None  
    Recebe um inteiro n e pinos origem, auxiliar  
    e destino e imprime os movs que resolvem  
    o problema das torres de Hanoi com n discos  
    '''  
    if n > 0:  
        hanoi(n-1, origem, destino, auxiliar)  
        print("mova disco %d de %s para %s."  
              %(n, origem, destino))  
        hanoi(n-1, auxiliar, origem, destino)
```

Primeira chamada: `hanoi(n, 'A', 'B', 'C');`

hanoi(3, 'A', 'B', 'C')

- 1: mova o disco 1 do pino A para o pino C.
- 2: mova o disco 2 do pino A para o pino B.
- 3: mova o disco 1 do pino C para o pino B.
- 4: mova o disco 3 do pino A para o pino C.
- 5: mova o disco 1 do pino B para o pino A.
- 6: mova o disco 2 do pino B para o pino C.
- 7: mova o disco 1 do pino A para o pino C.

hanoi(4, 'A', 'B', 'C')

- 1: mova o disco 1 do pino A para o pino B.
- 2: mova o disco 2 do pino A para o pino C.
- 3: mova o disco 1 do pino B para o pino C.
- 4: mova o disco 3 do pino A para o pino B.
- 5: mova o disco 1 do pino C para o pino A.
- 6: mova o disco 2 do pino C para o pino B.
- 7: mova o disco 1 do pino A para o pino B.
- 8: mova o disco 4 do pino A para o pino C.
- 9: mova o disco 1 do pino B para o pino C.
- 10: mova o disco 2 do pino B para o pino A.
- 11: mova o disco 1 do pino C para o pino A.
- 12: mova o disco 3 do pino B para o pino C.
- 13: mova o disco 1 do pino A para o pino B.
- 14: mova o disco 2 do pino A para o pino C.
- 15: mova o disco 1 do pino B para o pino C.

hanoi(7, 'A', 'B', 'C')

1: mova o disco 1 do pino A para 44pimovA. o disco 3 do pino B para85:pimovA o disco 1 do pino C para o pin
2: mova o disco 2 do pino A para 45pimovA. o disco 1 do pino C para86:pimovA o disco 4 do pino C para o pin
3: mova o disco 1 do pino C para 46pimovA. o disco 2 do pino C para88:pimovA o disco 1 do pino B para o pin
4: mova o disco 3 do pino A para 47pimovA. o disco 1 do pino B para90:pimovA o disco 2 do pino B para o pin
5: mova o disco 1 do pino B para 48pimovA. o disco 5 do pino C para94:pimovA o disco 1 do pino A para o pin
6: mova o disco 2 do pino B para 49pimovA. o disco 1 do pino A para92:pimovA o disco 3 do pino B para o pin
7: mova o disco 1 do pino A para 50pimovA. o disco 2 do pino A para98:pimovA o disco 1 do pino C para o pin
8: mova o disco 4 do pino A para 51pimovA. o disco 1 do pino C para94:pimovA o disco 2 do pino C para o pin
9: mova o disco 1 do pino C para 52pimovA. o disco 3 do pino A para95:pimovA o disco 1 do pino B para o pin
10: mova o disco 2 do pino C para58:pimovA o disco 1 do pino B para96:pimovA o disco 6 do pino B para o pin
11: mova o disco 1 do pino B para54:pimovA o disco 2 do pino B para97:pimovA o disco 1 do pino A para o pin
12: mova o disco 3 do pino C para55:pimovA o disco 1 do pino A para98:pimovA o disco 2 do pino A para o pin
13: mova o disco 1 do pino A para56:pimovA o disco 4 do pino A para99:pimovA o disco 1 do pino C para o pin
14: mova o disco 2 do pino A para57:pimovA o disco 1 do pino C para100pimovA. o disco 3 do pino A para o pi
15: mova o disco 1 do pino C para58:pimovA o disco 2 do pino C para101pimovA. o disco 1 do pino B para o pi
16: mova o disco 5 do pino A para59:pimovA o disco 1 do pino B para102pimovA. o disco 2 do pino B para o pi
17: mova o disco 1 do pino B para60:pimovA o disco 3 do pino C para103pimovA. o disco 1 do pino A para o pi
18: mova o disco 2 do pino B para64:pimovA o disco 1 do pino A para104pimovA. o disco 4 do pino A para o pi
19: mova o disco 1 do pino A para62:pimovA o disco 2 do pino A para105pimovA. o disco 1 do pino C para o pi
20: mova o disco 3 do pino B para68:pimovA o disco 1 do pino C para106pimovA. o disco 2 do pino C para o pi
21: mova o disco 1 do pino C para64:pimovA o disco 7 do pino A para107pimovA. o disco 1 do pino B para o pi
22: mova o disco 2 do pino C para65:pimovA o disco 1 do pino B para108pimovA. o disco 3 do pino C para o pi
23: mova o disco 1 do pino B para66:pimovA o disco 2 do pino B para109pimovA. o disco 1 do pino A para o pi
24: mova o disco 4 do pino B para68:pimovA o disco 1 do pino A para104OpimovA. o disco 2 do pino A para o pi
25: mova o disco 1 do pino A para68:pimovA o disco 3 do pino B para1041pimovA. o disco 1 do pino C para o pi
26: mova o disco 2 do pino A para69:pimovA o disco 1 do pino C para1042pimovA. o disco 5 do pino A para o pi
27: mova o disco 1 do pino C para70:pimovA o disco 2 do pino C para1043pimovA. o disco 1 do pino B para o pi
28: mova o disco 3 do pino A para70:pimovA o disco 1 do pino B para1044pimovA. o disco 2 do pino B para o pi
29: mova o disco 1 do pino B para72:pimovA o disco 4 do pino B para1045pimovA. o disco 1 do pino A para o pi
30: mova o disco 2 do pino B para73:pimovA o disco 1 do pino A para1046pimovA. o disco 3 do pino B para o pi
31: mova o disco 1 do pino A para74:pimovA o disco 2 do pino A para1047pimovA. o disco 1 do pino C para o pi
32: mova o disco 6 do pino A para75:pimovA o disco 1 do pino C para1048pimovA. o disco 2 do pino C para o pi
33: mova o disco 1 do pino C para76:pimovA o disco 3 do pino A para1049pimovA. o disco 1 do pino B para o pi
34: mova o disco 2 do pino C para78:pimovA o disco 1 do pino B para1050pimovA. o disco 4 do pino B para o pi
35: mova o disco 1 do pino B para78:pimovA o disco 2 do pino B para1081pimovA. o disco 1 do pino A para o pi

As três leis da recursão

Todos os algoritmos recursivos **devem obedecer a três leis**:

1. um algoritmo recursivo **deve** ter um **caso base**;
2. um algoritmo recursivo **deve** alterar o seu estado de maneira a **se aproximar do caso base**;
3. um algoritmo recursivo **deve chamar a si mesmo** (direta ou indiretamente).

Recursão

A resolução recursiva de um problema tem tipicamente a seguinte estrutura:

```
se a instância em questão é “pequena”  
  resolva-a diretamente  
  (use força bruta se necessário);  
senão  
  reduza-a a uma instância “menor”  
  do mesmo problema,  
  aplique o método à instância menor e  
  volte à instância original.
```

Curiosidades

Veja “Debugging recursive code” em :

<http://devopsreactions.tumblr.com/>