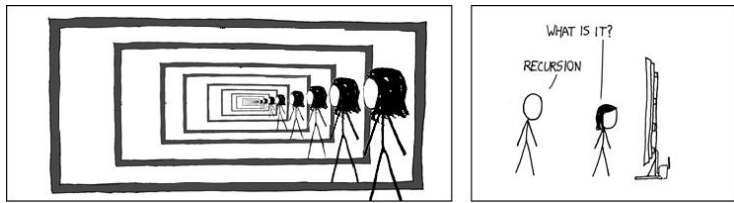


Recursão



Fonte: <http://xkcdsw.com/1105>

PF 2.1, 2.2, 2.3 S 5.1 MD *Recursion*

<http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/recu.html>

Navigation icons

Torres de Hanoi



Fonte: <http://commons.wikimedia.org/>
Licensed under Creative Commons Attribution
Share Alike 3.0 via Wikimedia Commons

http://en.wikipedia.org/wiki/Hanoi_tower

Problem Solving: Tower of Hanoi

Navigation icons

Recursão

“To understand recursion, we must first understand recursion.”

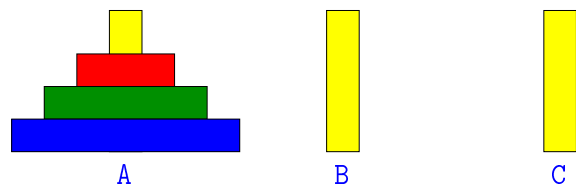
–folclore

“Para fazer uma função recursivo é preciso ter fé.”

–Siang Wu Song

Navigation icons

Torres de Hanoi

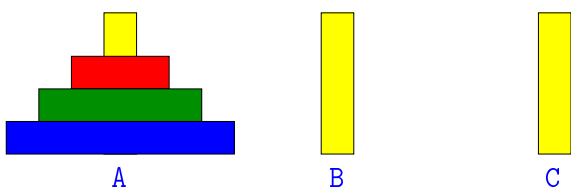


Desejamos transferir n discos do pino A para o pino C usando o pino B como auxiliar e respeitando as regras:

- ▶ podemos mover apenas um disco por vez;
- ▶ nunca um disco de diâmetro maior poderá ser colocado sobre um disco de diâmetro menor.

Navigation icons

Torres de Hanoi

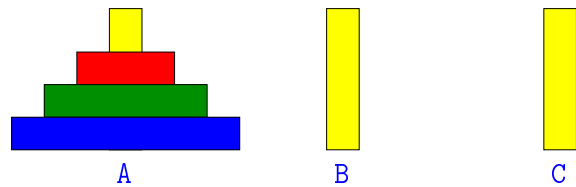


Denotaremos por $\text{Hanoi}(n, A, B, C)$ o problema de transferir n discos do pino A para o pino C usando o pino B como auxiliar

Como resolver $\text{Hanoi}(n, A, B, C)$?

Navigation icons

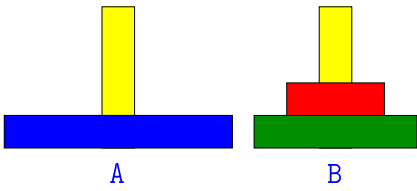
Idéia



Posso não saber qual o primeiro movimento, mas é fácil saber qual é o **movimento do meio**.

Navigation icons

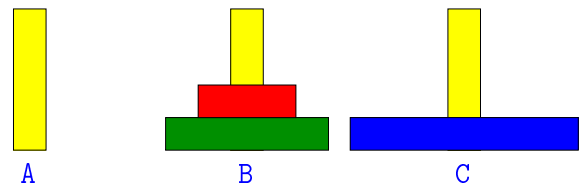
Idéia



Posso não saber qual o primeiro movimento, mas é fácil saber qual é o **movimento do meio**.



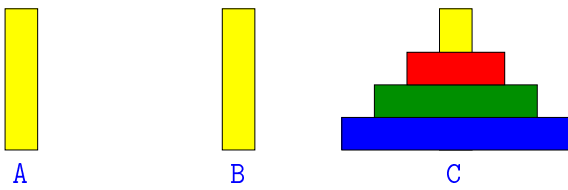
Idéia



Posso não saber qual o primeiro movimento, mas é fácil saber qual é o **movimento do meio**.



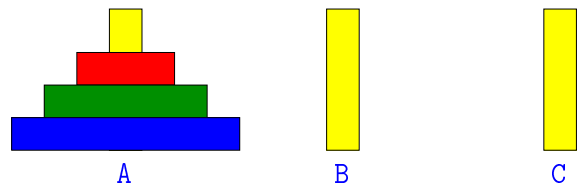
Idéia



Posso não saber qual o primeiro movimento, mas é fácil saber qual é o **movimento do meio**.



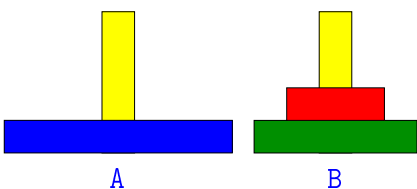
Solução



Para resolver $\text{Hanoi}(n, A, B, C)$ basta:



Solução

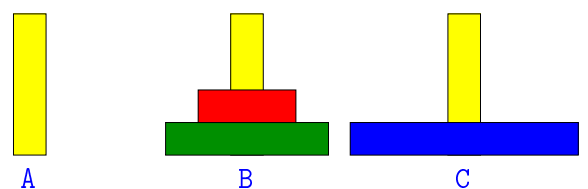


Para resolver $\text{Hanoi}(n, A, B, C)$ basta:

1. resolver $\text{Hanoi}(n-1, A, C, B)$



Solução

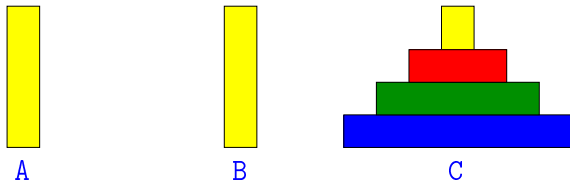


Para resolver $\text{Hanoi}(n, A, B, C)$ basta:

1. resolver $\text{Hanoi}(n-1, A, C, B)$
2. mover o disco n de A para C



Solução



Para resolver $\text{Hanoi}(n, A, B, C)$ basta:

1. resolver $\text{Hanoi}(n-1, A, C, B)$
2. mover o disco n de A para C
3. resolver $\text{Hanoi}(n-1, B, A, C)$



Solução

Para resolver $\text{Hanoi}(n, A, B, C)$ basta:

1. resolver $\text{Hanoi}(n-1, A, C, B)$
2. mover o disco n de A para C
3. resolver $\text{Hanoi}(n-1, B, A, C)$

E daí?

Reduzimos o problema com n discos para 2 problemas com $n-1$ disco!



Função que resolve o problema

```
def hanoi(n, origem, auxiliar, destino):  
    '''(int, str, str, str) -> None  
    Recebe um inteiro n e pinos origem, auxiliar  
    e destino e imprime os movs que resolvem  
    o problema das torres de Hanoi com n discos  
    '''  
    if n > 0:  
        hanoi(n-1, origem, destino, auxiliar)  
        print("mova disco %d de %s para %s."  
              %(n, origem, destino))  
        hanoi(n-1, auxiliar, origem, destino)
```

Primeira chamada: $\text{hanoi}(n, 'A', 'B', 'C');$



Solução

Para resolver $\text{Hanoi}(n, A, B, C)$ basta:

1. resolver $\text{Hanoi}(n-1, A, C, B)$
2. mover o disco n de A para C
3. resolver $\text{Hanoi}(n-1, B, A, C)$

E daí?



Solução

Para resolver $\text{Hanoi}(n, A, B, C)$ basta:

1. resolver $\text{Hanoi}(n-1, A, C, B)$
2. mover o disco n de A para C
3. resolver $\text{Hanoi}(n-1, B, A, C)$

E daí?

Reduzimos o problema com n discos para 2 problemas com $n-1$ disco!

Paramos de reduzir quando soubermos resolver o problema. Por exemplo, sabemos resolver

$\text{Hanoi}(0, \dots, \dots, \dots)$



$\text{hanoi}(3, 'A', 'B', 'C')$

- 1: mova o disco 1 do pino A para o pino C.
- 2: mova o disco 2 do pino A para o pino B.
- 3: mova o disco 1 do pino C para o pino B.
- 4: mova o disco 3 do pino A para o pino C.
- 5: mova o disco 1 do pino B para o pino A.
- 6: mova o disco 2 do pino B para o pino C.
- 7: mova o disco 1 do pino A para o pino C.



hanoi(4, 'A', 'B', 'C')

- 1: mova o disco 1 do pino A para o pino B.
- 2: mova o disco 2 do pino A para o pino C.
- 3: mova o disco 1 do pino B para o pino C.
- 4: mova o disco 3 do pino A para o pino B.
- 5: mova o disco 1 do pino C para o pino A.
- 6: mova o disco 2 do pino C para o pino B.
- 7: mova o disco 1 do pino A para o pino B.
- 8: mova o disco 4 do pino A para o pino C.
- 9: mova o disco 1 do pino B para o pino C.
- 10: mova o disco 2 do pino B para o pino A.
- 11: mova o disco 1 do pino C para o pino A.
- 12: mova o disco 3 do pino B para o pino C.
- 13: mova o disco 1 do pino A para o pino B.
- 14: mova o disco 2 do pino A para o pino C.
- 15: mova o disco 1 do pino B para o pino C.

« ‹ › » 🔍 🔄

hanoi(7, 'A', 'B', 'C')

- 1: mova o disco 1 do pino A para o pino B.
- 2: mova o disco 2 do pino A para o pino C.
- 3: mova o disco 1 do pino B para o pino C.
- 4: mova o disco 3 do pino A para o pino B.
- 5: mova o disco 1 do pino C para o pino A.
- 6: mova o disco 2 do pino C para o pino B.
- 7: mova o disco 1 do pino A para o pino B.
- 8: mova o disco 4 do pino A para o pino C.
- 9: mova o disco 1 do pino B para o pino C.
- 10: mova o disco 2 do pino B para o pino A.
- 11: mova o disco 1 do pino C para o pino A.
- 12: mova o disco 3 do pino B para o pino C.
- 13: mova o disco 1 do pino A para o pino B.
- 14: mova o disco 2 do pino A para o pino C.
- 15: mova o disco 1 do pino B para o pino C.
- 16: mova o disco 5 do pino A para o pino B.
- 17: mova o disco 1 do pino B para o pino C.
- 18: mova o disco 2 do pino B para o pino A.
- 19: mova o disco 1 do pino C para o pino A.
- 20: mova o disco 3 do pino B para o pino C.
- 21: mova o disco 1 do pino C para o pino A.
- 22: mova o disco 2 do pino C para o pino B.
- 23: mova o disco 1 do pino A para o pino B.
- 24: mova o disco 4 do pino B para o pino C.
- 25: mova o disco 1 do pino A para o pino B.
- 26: mova o disco 2 do pino A para o pino C.
- 27: mova o disco 1 do pino C para o pino A.
- 28: mova o disco 3 do pino A para o pino B.
- 29: mova o disco 1 do pino B para o pino C.
- 30: mova o disco 2 do pino B para o pino A.
- 31: mova o disco 1 do pino C para o pino A.
- 32: mova o disco 6 do pino A para o pino B.
- 33: mova o disco 1 do pino C para o pino A.
- 34: mova o disco 2 do pino C para o pino B.
- 35: mova o disco 1 do pino B para o pino C.

As três leis da recursão

Todos os algoritmos recursivos **devem obedecer a três leis:**

1. um algoritmo recursivo **deve** ter um **caso base**;
2. um algoritmo recursivo **deve** alterar o seu estado de maneira a **se aproximar do caso base**;
3. um algoritmo recursivo **deve chamar a si mesmo** (direta ou indiretamente).

« ‹ › » 🔍 🔄

Recursão

A resolução recursiva de um problema tem tipicamente a seguinte estrutura:

se a instância em questão é “pequena”
resolva-a diretamente
(use força bruta se necessário);
senão
reduza-a a uma instância “menor”
do **mesmo problema**,
aplique o método à instância menor e
volte à instância original.

« ‹ › » 🔍 🔄

Curiosidades

Veja “Debugging recursive code” em :

<http://devopsreactions.tumblr.com/>

« ‹ › » 🔍 🔄