Máximo divisor comum

Fonte: http://acaomatematica.blogspot.com.br/

PF 2.3 S 5.1

http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/recu.html

http://www.ime.usp.br/~coelho/mac0122-2012/aulas/mdc/

Divisibilidade

Suponha que m, n e d são números inteiros.

Dizemos que d **divide** m se $m = k\,d$ para algum número inteiro k.

$d \mid m$ é uma abreviatura de "d divide m"

Se d divide m, então dizemos que m é um **multiplo** de d.

Se d divide m e $d > 0$, então dizemos que d é um **divisor** de m

Divisibilidade

Se d divide m e d divide n, então d é um **divisor comum** de m e n.

Exemplos:

os divisores de 30 são: $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15$ e 30
os divisores de 24 são: $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$ e 24
os divisores comuns de 30 e 24 são: $1, 2, 3$ e 6

Máximo divisor comum

O **máximo divisor comum** de dois números inteiros m e n, onde pelo menos um é não nulo, é o maior divisor comum de m e n.

O máximo divisor comum de m e n é denotado por mdc(m, n).

Exemplo:
máximo divisor comum de 30 e 24 é 6
máximo divisor comum de 514229 e 317811 é 1
máximo divisor comum de 3267 e 2893 é 11

Máximo divisor comum

Problema: Dados dois números inteiros não-negativos m e n, determinar mdc(m, n).

Exemplo:
máximo divisor comum de 30 e 24 é 6
máximo divisor comum de 514229 e 317811 é 1
máximo divisor comum de 3267 e 2893 é 11

Solução Intr. Computação

Recebe números inteiros não-negativos m e n e devolve mdc(m, n). Supõe $m, n > 0$.

```
def mdc(m, n):
    d = min(m,n)
    while /*1*/ m % d != 0 or n % d != 0:
        /*2*/
        d -= 1

    /*3*/
    return d
```

/*1*/, /*2*/ e /*3*/ não fazem parte da função.

Invariantes e correção

Passamos agora a verificar a correção do algoritmo.

Correção da função = a função funciona = a função faz o que promete.

A correção de algoritmos iterativos é comumente baseada na demonstração da validade de **invariantes**.

Estes invariantes são afirmações ou relações envolvendo os objetos mantidos pelo algoritmo.

Invariantes e correção

Eis relações invariantes para a função `mdc`.

Em `/*1*/` vale que

(i0) $1 \leq \mathtt{d} \leq \min(\mathtt{m}, \mathtt{n})$, e

(i1) $\mathtt{m}\%\mathtt{t} \neq 0$ ou $\mathtt{n}\%\mathtt{t} \neq 0$ para todo $\mathtt{t} > \mathtt{d}$,

e em `/*2*/` vale que

(i2) $\mathtt{m}\%\mathtt{d} \neq 0$ ou $\mathtt{n}\%\mathtt{d} \neq 0$.

Invariantes e correção

É evidente que em `/*3*/`, antes da função retornar `d`, vale que

$\mathtt{m}\%\mathtt{d} = 0$ e $\mathtt{n}\%\mathtt{d} = 0$.

Como (i1) vale em `/*1*/`, então (i1) também vale em `/*3*/`. Assim, nenhum número inteiro maior que o valor `d` retornado divide `m` e `n`. Portanto, o valor retornado é de fato o `mdc(m,n)`.

Invariantes são assim mesmo. A validade de alguns torna a correção do algoritmo (muitas vezes) evidente. Os invariantes secundários servem para confirmar a validade dos principais.

Invariantes e correção

Relações invariantes, além de serem uma ferramenta útil para demonstrar a correção de algoritmos iterativos, elas nos ajudam a compreender o funcionamento do algoritmo. De certa forma, eles "espelham" a maneira que entendemos o algoritmo.

Consumo de tempo

Quantas iterações do `while` faz a função `mdc`?

Em outras palavras, quantas vezes o comando "`d-=1`" é executado?

A resposta é `min(m,n)-1` ... no **pior caso**.

Aqui, estamos supondo que $\mathtt{m} \geq 0$ e $\mathtt{n} \geq 0$.

Por exemplo, para a chamada `mdc(317811,514229)` a função executará 317811-1 iterações, pois $\mathtt{mdc}(317811, 514229) = 1$, ou seja, 317811 e 514229 são relativamente primos.

Consumo de tempo

Neste caso, costuma-se dizer que o **consumo de tempo** do algoritmo, no **pior caso**, é *proporcional a* $\min(\mathtt{m}, \mathtt{n})$, ou ainda, que o consumo de tempo do algoritmo é da *ordem de* $\min(\mathtt{m}, \mathtt{n})$.

A abreviatura de "ordem blá" é $\mathrm{O}(\text{blá})$.

Isto significa que se o valor de $\min(\mathtt{m}, \mathtt{n})$ dobra então o tempo gasto pela função pode, no **pior caso** dobrar.

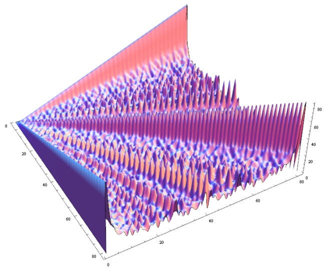
Conclusões

No pior caso, o consumo de tempo da função `mdc` é proporcional a $\min(\mathtt{m},\mathtt{n})$.

O consumo de tempo da função `mdc` é $O(\min(\mathtt{m},\mathtt{n}))$.

Se o valor de $\min(\mathtt{m},\mathtt{n})$ dobra, o consumo de tempo pode dobrar.

Algoritmo de Euclides



Fonte: `http://math.stackexchange.com/`

PF 2 (Exercícios) S 5.1

http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/recu.html

http://www.ime.usp.br/~coelho/mac0122-2014/aulas/mdc/

Algoritmo de Euclides

O máximo divisor comum pode ser determinado através de um algoritmo de 2300 anos (cerca de 300 A.C.), o **algoritmo de Euclides**.

Para calcular o $\mathtt{mdc}(\mathtt{m},\mathtt{n})$ o algoritmo de Euclides usa a recorrência:

$$\mathtt{mdc}(\mathtt{m},0) = \mathtt{m};$$
$$\mathtt{mdc}(\mathtt{m},\mathtt{n}) = \mathtt{mdc}(\mathtt{n},\mathtt{m}\%\mathtt{n}), \text{ para } \mathtt{n} > 0.$$

Assim, por exemplo,

$$\mathtt{mdc}(12,18) = \mathtt{mdc}(18,12) = \mathtt{mdc}(12,6) = \mathtt{mdc}(6,0) = 6.$$

Correção

A correção da recorrência proposta por Euclides é baseada no seguinte fato.

Se $\mathtt{m}$, $\mathtt{n}$ e $\mathtt{d}$ são números inteiros, $\mathtt{m} \geq 0$, $\mathtt{n},\mathtt{d} > 0$, então

$\mathtt{d}$ divide $\mathtt{m}$ e $\mathtt{n}$ $\Leftrightarrow$ $\mathtt{d}$ divide $\mathtt{n}$ e $\mathtt{m}\%\mathtt{n}$.

Euclides recursivo

```
def euclidesR(m, n):
   '''(int,int) -> int
   Recebe inteiros não negativos m e n e
   retorna o máximo divisor comum de me
n.
   Pré-condição:  a função supõe que m >
0
   '''
   if n == 0:  return m
   return euclidesR(n, m % n)
```

Euclides iterativo

```
def euclidesI(m, n):
   '''(int,int) -> int
   Recebe ints m e n e retorna mdc(m,n)
   Pre-condicao:  a funcao supõe n > 0
   '''
   r = m % n;
   while r != 0:
      m = n
      n = r
      r = m % n
   return n
```

euclidesR(317811,514229)

```
euclidesR(317811,514229)
  euclidesR(514229,317811)
    euclidesR(317811,196418)
      euclidesR(196418,121393)
        euclidesR(121393,75025)
          euclidesR(75025,46368)
            euclidesR(46368,28657)
              euclidesR(28657,17711)
                euclidesR(17711,10946)
                  euclidesR(10946,6765)
                    euclidesR(6765,4181)
                      euclidesR(4181,2584)
                        euclidesR(2584,1597)
                          euclidesR(1597,987)
                            euclidesR(987,610)
                              euclidesR(610,377)
                                euclidesR(377,233)
                                  euclidesR(233,144)
                                    euclidesR(144,89)
                                      euclidesR(89,55)
                                        euclidesR(55,34)
                                          euclidesR(34,21)
                                            euclidesR(21,13)
                                              euclidesR(13,8)
                                                euclidesR(8,5)
                                                  euclidesR(5,3)
                                                    euclidesR(3,2)
                                                      euclidesR(2,1)
                                                        euclidesR(1,0)
mdc(317811,514229) = 1.
```

Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt>time ./mdc.py 317811 514229
mdc(317811,514229)=1
real   0m0.074s
user   0m0.072s
sys    0m0.000s

meu_prompt>time ./euclidesR.py 317811 514229
mdc(317811,514229)=1
real   0m0.022s
user   0m0.016s
sys    0m0.000s
```

Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt>time ./mdc.py 2147483647 2147483646
mdc(2147483647,2147483646)=1
real   6m20.511s
user   6m20.214s
sys    0m0.056s

meu_prompt>time ./euclidesR.py 2147483647 2147483646
mdc(2147483647,2147483646)=1
real   0m0.024s
user   0m0.020s
sys    0m0.000s
```

Consumo de tempo

O consumo de tempo da função euclidesR é proporcional ao número de chamadas recursivas.

Suponha que euclidesR faz k chamadas recursivas e que no início da 1a. chamada ao algoritmo tem-se que $0 < n \leq m$.

Sejam

$$(m, n) = (m_0, n_0), (m_1, n_1), \ldots, (m_k, n_k) = (\mathrm{mdc}(m, n), 0),$$

os valores dos parâmetros no início de cada uma das chamadas da função.

Número de chamadas recursivas

Por exemplo, para $m = 514229$ e $n = 317811$ tem-se

$$\begin{aligned}
(m_0, n_0) &= (514229, 317811), \\
(m_1, n_1) &= (317811, 196418), \\
(m_2, n_2) &= (196418, 121393), \\
\ldots &= \ldots \\
(m_{27}, n_{27}) &= (1, 0).
\end{aligned}$$

Número de chamadas recursivas

Estimaremos o valor de k em função de $n = \min(m, n)$.

Note que $m_{i+1} = n_i$ e $n_{i+1} = m_i \% n_i$ para $i=1,2,\ldots,k$.

Note ainda que para inteiros a e b, $0 < b \leq a$ vale que

$$a \% b < \frac{a}{2} \quad \text{(verifique!)}.$$

Número de chamadas recursivas

Desta forma tem-se que

$$
\begin{array}{lllllllll}
n_2 & = & m_1\%n_1 & = & n_0\%n_1 & < & n_0/2 & = & n/2 & = & n/2^1 \\
n_4 & = & m_3\%n_3 & = & n_2\%n_3 & < & n_2/2 & < & n/4 & = & n/2^2 \\
n_6 & = & m_5\%n_5 & = & n_4\%n_5 & < & n_4/2 & < & n/8 & = & n/2^3 \\
n_8 & = & m_7\%n_7 & = & n_6\%n_7 & < & n_6/2 & < & n/16 & = & n/2^4 \\
n_{10} & = & m_9\%n_9 & = & n_8\%n_9 & < & n_8/2 & < & n/32 & = & n/2^5 \\
\dots \\
\dots \\
\dots
\end{array}
$$

Percebe-se que depois de cada 2 chamadas recursivas o valor do segundo parâmetro é reduzido a menos da sua metade.

Número de chamadas recursivas

Seja t o número inteiro tal que

$$2^t \leq n < 2^{t+1}$$

Da primeira desigualdade temos que

$$t \leq \lg n,$$

onde $\lg n$ denota o logaritmo de n na base 2.
Da desigualde estrita, concluímos que

$$k \leq 2(t+1) - 1 = 2t + 1$$

Logo, o número k de chamadas recursivas é não superior a

$$2t + 1 \leq 2\lg n + 1.$$

Número de chamadas recursivas

Para o exemplo acima, onde m=514229 e n=317811, temos que

$$2\lg n + 1 = 2\lg(317811) + 1 < 2 \times 18{,}3 + 1 < 37{,}56$$

e o número de chamadas recursivas feitas por `euclidesR(514229,317811)` foram 27.

Consumo de tempo

Resumindo, a quantidade de tempo consumida pelo algoritmo de Euclides é, no pior caso, proporcional a $\lg n$.

Este desempenho é significativamente melhor que o desempenho do algoritmo *café com leite*, já que a função $f(n) = \lg n$ cresce muito mais lentamente que a função $g(n) = n$.

Consumo de tempo

n	(int) $\lg n$
4	2
5	2
6	2
10	3
64	6
100	6
128	7
1000	9
1024	10
1000000	19
1000000000	29

Conclusões

Suponha que $m > n$.

O número de chamadas recursivas da função `euclidesR` é $\leq 2(\lg n) - 1$.

No pior caso, o consumo de tempo da função `euclidesR` é proporcional a $\lg n$.

Conclusões

Suponha que $m > n$.

O consumo de tempo da função euclidesR é $O(\lg n)$.

Para que o consumo de tempo da função euclidesR dobre é necessário que o valor de n seja elevado ao quadrado.

Euclides e Fibonacci

Demonstre por indução em k que:

Se $m > n \geq 0$ e se a chamada euclidesR(m,n) faz $k \geq 1$ chamadas recursivas, então

$m \geq \text{fibonacci}(k+2)$ e $n \geq \text{fibonacci}(k+1)$.