

Intercalação



Fonte: <http://csunplugged.org/sorting-algorithms>
PF 9

<http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/mrgsrt.html>

Intercalação

Problema: Dados $v[p : q]$ e $v[q : r]$ crescentes, rearranjar $v[p : r]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Para que valores de q o problema faz sentido?

Entra:

	p				q					r
v	22	33	55	77	11	44	66	88	99	

Sai:

	p				q					r
v	11	22	33	44	55	66	77	88	99	

Intercalação

	p				q					r
v	22	33	55	77	11	44	66	88	99	

w										
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Intercalação

	k									
v										

	i									j
w	22	33	55	77	99	88	66	44	11	

Intercalação

	k									
v	11									

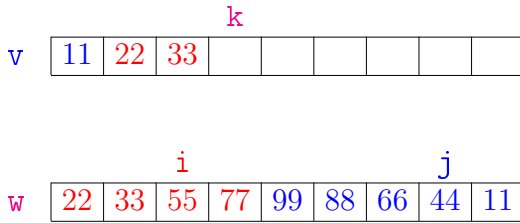
	i									j
w	22	33	55	77	99	88	66	44	11	

Intercalação

	k									
v	11	22								

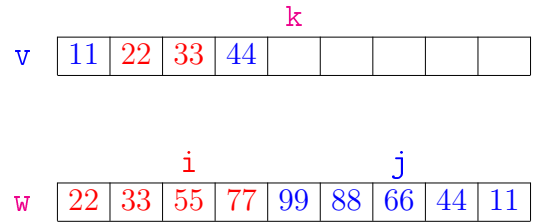
	i									j
w	22	33	55	77	99	88	66	44	11	

Intercalação



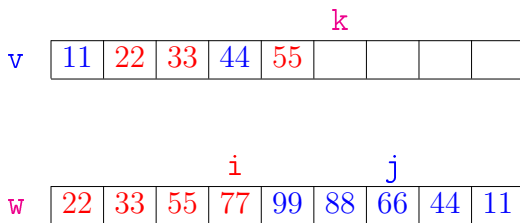
Navigation icons: back, forward, search, etc.

Intercalação



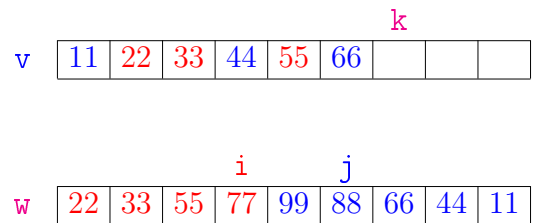
Navigation icons: back, forward, search, etc.

Intercalação



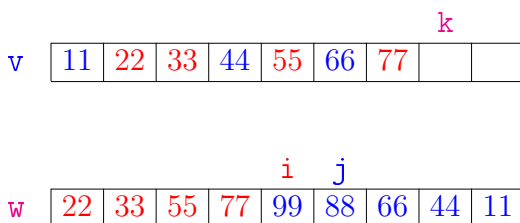
Navigation icons: back, forward, search, etc.

Intercalação



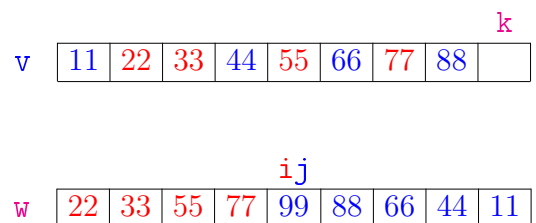
Navigation icons: back, forward, search, etc.

Intercalação



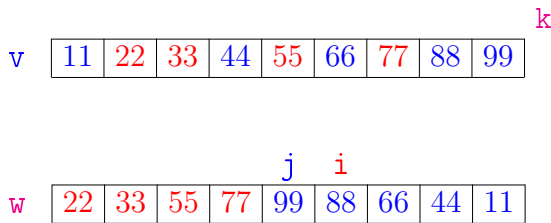
Navigation icons: back, forward, search, etc.

Intercalação



Navigation icons: back, forward, search, etc.

Intercalação



Navigation icons

Consumo de tempo

$$n := r - p$$

linha	proporcional a
1-2	?
3	?
4	?
5-6	?
7	?
8-13	?
total	?

Navigation icons

Conclusão

A função `intercale` consome $5n + 2$ unidades de tempo.

O algoritmo `intercale` consome $O(n)$ unidades de tempo.

Também escreve-se

O algoritmo `intercale` consome tempo $O(n)$.

Navigation icons

Intercalação

```
def intercale(p, q, r, v):
1  e = v[p:q] # clone
2  d = v[q:r] # clone
3  d.reverse() # método mutador
4  w = e + d
5  i = 0
6  j = r-p-1
7  for k in range(p,r):
8      if w[i] <= w[j]):
9          v[k] = w[i]
10         i += 1
11     else:
12         v[k] = w[j]
13         j -= 1
```

Navigation icons

Consumo de tempo

$$n := r - p$$

linha	proporcional a
1-2	$= n$
3	$\leq n$
4	$= n$
5-6	$= 1$
7	$= r - p + 1 = n + 1$
8-13	$= r - p = n$
total	$\approx 5n + 2$

Navigation icons

Ordenação: algoritmo Mergesort



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=XaqR3G_NVoo

PF 9

<http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/mrgsrt.html>

Navigation icons

Ordenação

$v[0 : n]$ é *crecente* se $v[0] \leq \dots \leq v[n-1]$.

Problema: Rearranjar um vetor $v[0 : n]$ de modo que ele fique *crecente*.

Entra:

0														n
	33	55	33	44	33	22	11	99	22	55	77			

Sai:

0														n
	11	22	22	33	33	33	44	55	55	77	99			

merge_sort

Rearranja $v[p : r]$ em *ordem crescente*.

```
def merge_sort (p, r, v):
1  if p < r-1:
2      q = (p + r) // 2
3  merge_sort(p, q, v)
4  merge_sort(q, r, v)
5  intercale(p, q, r, v)
```

p														r
v	33	44	55	66	99	11	77	22	88					

merge_sort

Rearranja $v[p : r]$ em *ordem crescente*.

```
def merge_sort (p, r, v):
1  if p < r-1:
2      q = (p + r) // 2
3  merge_sort(p, q, v)
4  merge_sort(q, r, v)
5  intercale(p, q, r, v)
```

p														r
v	11	22	33	44	55	66	77	88	99					

merge_sort

Rearranja $v[p : r]$ em *ordem crescente*.

```
def merge_sort (p, r, v):
1  if p < r-1:
2      q = (p + r) // 2
3  merge_sort(p, q, v)
4  merge_sort(q, r, v)
5  intercale(p, q, r, v)
```

p														r
v	55	33	66	44	99	11	77	22	88					

merge_sort

Rearranja $v[p : r]$ em *ordem crescente*.

```
def merge_sort (p, r, v):
1  if p < r-1:
2      q = (p + r) // 2
3  merge_sort(p, q, v)
4  merge_sort(q, r, v)
5  intercale(p, q, r, v)
```

p														r
v	33	44	55	66	11	22	77	88	99					

merge_sort

Rearranja $v[p : r]$ em *ordem crescente*.

```
def merge_sort (p, r, v):
1  if p < r-1:
2      q = (p + r) // 2
3  merge_sort(p, q, v)
4  merge_sort(q, r, v)
5  intercale(p, q, r, v)
```

p														r
v	11	22	33	44	55	66	77	88	99					

Mergesort

v

	p			q					r
55	33	66	44	99	11	77	22	88	

Navigation icons

Mergesort

v

	p			q					r
55	33	66	44	99	11	77	22	88	

Navigation icons

Mergesort

v

	p			q					r
55	33	66	44	99	11	77	22	88	

v

	p		q		r				
55	33	66	44						

v

	p	q	r						
55	33								

Navigation icons

Mergesort

v

	p			q					r
55	33	66	44	99	11	77	22	88	

v

	p		q		r				
55	33	66	44						

v

	p	q	r						
55	33								

v

	p	r							
55									

Navigation icons

Mergesort

v

	p			q					r
55	33	66	44	99	11	77	22	88	

v

	p		q		r				
55	33	66	44						

v

	p	q	r						
55	33								

v

	p	r							
55									

Navigation icons

Mergesort

v

	p			q					r
55	33	66	44	99	11	77	22	88	

v

	p		q		r				
55	33	66	44						

v

	p	q	r						
55	33								

v

	p	r							
55	33								

Navigation icons

Mergesort

v	^p	33	55	66	44	^q	99	11	77	22	88	^r
---	--------------	----	----	----	----	--------------	----	----	----	----	----	--------------

v	^p	33	55	66	44							
---	--------------	----	----	----	----	--	--	--	--	--	--	--

v			^p	66	44	^r						
---	--	--	--------------	----	----	--------------	--	--	--	--	--	--

v				^p	44	^r						
---	--	--	--	--------------	----	--------------	--	--	--	--	--	--

< > < > < > < > < > < > < >

Mergesort

v	^p	33	55	66	44	^q	99	11	77	22	88	^r
---	--------------	----	----	----	----	--------------	----	----	----	----	----	--------------

v	^p	33	55	66	44							
---	--------------	----	----	----	----	--	--	--	--	--	--	--

v			^p	66	44	^r						
---	--	--	--------------	----	----	--------------	--	--	--	--	--	--

< > < > < > < > < > < > < >

Mergesort

v	^p	33	55	44	66	^q	99	11	77	22	88	^r
---	--------------	----	----	----	----	--------------	----	----	----	----	----	--------------

v	^p	33	55	44	66							
---	--------------	----	----	----	----	--	--	--	--	--	--	--

v			^p	44	66	^r						
---	--	--	--------------	----	----	--------------	--	--	--	--	--	--

< > < > < > < > < > < > < >

Mergesort

v	^p	33	55	44	66	^q	99	11	77	22	88	^r
---	--------------	----	----	----	----	--------------	----	----	----	----	----	--------------

v	^p	33	55	44	66							
---	--------------	----	----	----	----	--	--	--	--	--	--	--

< > < > < > < > < > < > < >

Mergesort

v	^p	33	44	55	66	^q	99	11	77	22	88	^r
---	--------------	----	----	----	----	--------------	----	----	----	----	----	--------------

v	^p	33	44	55	66							
---	--------------	----	----	----	----	--	--	--	--	--	--	--

< > < > < > < > < > < > < >

Mergesort

v	^p	33	44	55	66	^q	99	11	77	22	88	^r
---	--------------	----	----	----	----	--------------	----	----	----	----	----	--------------

< > < > < > < > < > < > < >

Mergesort

v

33	44	55	66	99	11	77	22	88
----	----	----	----	----	----	----	----	----

v

				99	11	77	22	88
--	--	--	--	----	----	----	----	----

Navigation icons

Mergesort

v

33	44	55	66	99	11	77	22	88
----	----	----	----	----	----	----	----	----

v

				99	11	77	22	88
--	--	--	--	----	----	----	----	----

v

				99	11			
--	--	--	--	----	----	--	--	--

Navigation icons

Mergesort

v

33	44	55	66	99	11	77	22	88
----	----	----	----	----	----	----	----	----

v

				99	11	77	22	88
--	--	--	--	----	----	----	----	----

v

				99	11			
--	--	--	--	----	----	--	--	--

v

				99				
--	--	--	--	----	--	--	--	--

Navigation icons

Mergesort

v

33	44	55	66	99	11	77	22	88
----	----	----	----	----	----	----	----	----

v

				99	11	77	22	88
--	--	--	--	----	----	----	----	----

v

				99	11			
--	--	--	--	----	----	--	--	--

v

				99				
--	--	--	--	----	--	--	--	--

Navigation icons

Mergesort

v

33	44	55	66	99	11	77	22	88
----	----	----	----	----	----	----	----	----

v

				99	11	77	22	88
--	--	--	--	----	----	----	----	----

v

				99	11			
--	--	--	--	----	----	--	--	--

v

					11			
--	--	--	--	--	----	--	--	--

Navigation icons

Mergesort

v

33	44	55	66	99	11	77	22	88
----	----	----	----	----	----	----	----	----

v

				99	11	77	22	88
--	--	--	--	----	----	----	----	----

v

				99	11			
--	--	--	--	----	----	--	--	--

v

					11			
--	--	--	--	--	----	--	--	--

Navigation icons

Mergesort

v

	^p				^q					^r
	33	44	55	66	99	11	77	22	88	

v

					^p	^q				^r
					99	11	77	22	88	

v

					^p	^q	^r			
					99	11				

Navigation icons

Mergesort

v

	^p				^q					^r
	33	44	55	66	11	99	77	22	88	

v

					^p	^q				^r
					11	99	77	22	88	

v

					^p	^q	^r			
					11	99				

Navigation icons

Mergesort

v

	^p				^q					^r
	33	44	55	66	11	99	77	22	88	

v

					^p	^q				^r
					11	99	77	22	88	

Navigation icons

Mergesort

v

	^p				^q					^r
	33	44	55	66	11	99	77	22	88	

v

					^p	^q				^r
					11	99	77	22	88	

v

							^p	^q	^r	
							77	22	88	

Navigation icons

Mergesort

v

	^p				^q					^r
	33	44	55	66	11	99	77	22	88	

v

					^p	^q				^r
					11	99	77	22	88	

v

						^p	^q			^r
						77	22	88		

v

						^p	^r			
						77				

Navigation icons

Mergesort

v

	^p				^q					^r
	33	44	55	66	11	99	77	22	88	

v

					^p	^q				^r
					11	99	77	22	88	

v

						^p	^q			^r
						77	22	88		

v

						^p	^r			
						77				

Navigation icons

Mergesort

v

	^p 33	44	55	66	^q 11	99	77	22	88	^r
--	-----------------	----	----	----	-----------------	----	----	----	----	--------------

v

					^p 11	99	^q 77	22	88	^r
--	--	--	--	--	-----------------	----	-----------------	----	----	--------------

v

							^p 77	^q 22	88	^r
--	--	--	--	--	--	--	-----------------	-----------------	----	--------------

v

								^p 22	^q 88	^r
--	--	--	--	--	--	--	--	-----------------	-----------------	--------------

Navigation icons

Mergesort

v

	^p 33	44	55	66	^q 11	99	77	22	88	^r
--	-----------------	----	----	----	-----------------	----	----	----	----	--------------

v

					^p 11	99	^q 77	22	88	^r
--	--	--	--	--	-----------------	----	-----------------	----	----	--------------

v

							^p 77	^q 22	88	^r
--	--	--	--	--	--	--	-----------------	-----------------	----	--------------

v

								^p 22	^q 88	^r
--	--	--	--	--	--	--	--	-----------------	-----------------	--------------

Navigation icons

Mergesort

v

	^p 33	44	55	66	^q 11	99	77	^r 22	88
--	-----------------	----	----	----	-----------------	----	----	-----------------	----

v

					^p 11	99	^q 77	^r 22	88
--	--	--	--	--	-----------------	----	-----------------	-----------------	----

v

							^p 77	^q 22	^r 88
--	--	--	--	--	--	--	-----------------	-----------------	-----------------

v

								^p 22	^q 88	^r
--	--	--	--	--	--	--	--	-----------------	-----------------	--------------

Navigation icons

Mergesort

v

	^p 33	44	55	66	^q 11	99	77	^r 22	88
--	-----------------	----	----	----	-----------------	----	----	-----------------	----

v

					^p 11	99	^q 77	^r 22	88
--	--	--	--	--	-----------------	----	-----------------	-----------------	----

v

							^p 77	^q 22	^r 88
--	--	--	--	--	--	--	-----------------	-----------------	-----------------

Navigation icons

Mergesort

v

	^p 33	44	55	66	^q 11	99	22	77	88	^r
--	-----------------	----	----	----	-----------------	----	----	----	----	--------------

v

					^p 11	99	^q 22	77	88	^r
--	--	--	--	--	-----------------	----	-----------------	----	----	--------------

v

							^p 22	^q 77	88	^r
--	--	--	--	--	--	--	-----------------	-----------------	----	--------------

Navigation icons

Mergesort

v

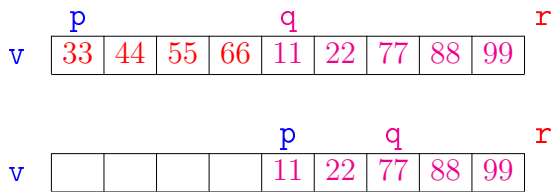
	^p 33	44	55	66	^q 11	99	22	77	88	^r
--	-----------------	----	----	----	-----------------	----	----	----	----	--------------

v

					^p 11	99	^q 22	77	88	^r
--	--	--	--	--	-----------------	----	-----------------	----	----	--------------

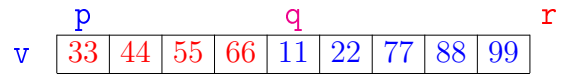
Navigation icons

Mergesort



Navigation icons

Mergesort



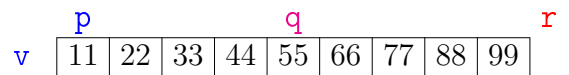
Navigation icons

Mergesort



Navigation icons

Mergesort



Navigation icons

Correção

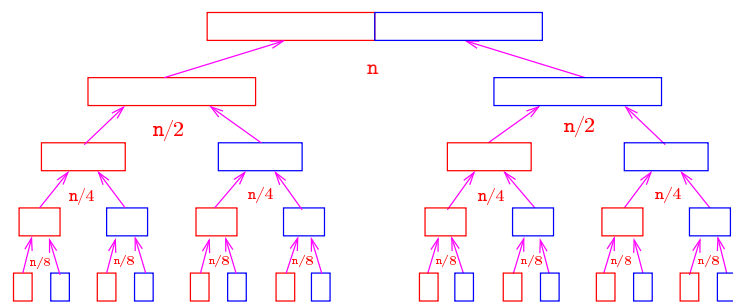
```
def merge_sort (p, r, v):  
1  if p < r-1:  
2      q = (p + r) // 2  
3      merge_sort(p, q, v)  
4      merge_sort(q, r, v)  
5      intercale(p, q, r, v)
```

A função está **correta**?

A **correção** da função, que se apóia na correção do **intercale**, pode ser demonstrada por indução em $n := r - p$.

Navigation icons

Consumo de tempo: versão MAC0122



Navigation icons

Consumo de tempo: versão MAC0122

O consumo de tempo em cada nível da recursão é proporcional a n .

Há cerca de $\lg n$ níveis de recursão.

nível	consumo de tempo (proporcional a)	
1	$\approx n$	$= n$
2	$\approx n/2 + n/2$	$= n$
3	$\approx n/4 + n/4 + n/4 + n/4$	$= n$
...	...	
$\lg n$	$\approx 1 + 1 + 1 + 1 \dots + 1 + 1$	$= n$
Total $\approx n \lg n = O(n \lg n)$		

Consumo de tempo: outra versão

```
def merge_sort (p, r, v) {
1   if p < r-1:
2       q = (p + r) // 2
3       merge_sort(p, q, v)
4       merge_sort(q, r, v)
5       intercale(p, q, r, v)
```

Consumo de tempo?

$T(n)$:= consumo de tempo quando $n = r - p$

Consumo de tempo: outra versão

```
def merge_sort (p, r, v):
1   if p < r-1:
2       q = (p + r) // 2
3       merge_sort(p, q, v)
4       merge_sort(q, r, v)
5       intercale(p, q, r, v)
```

linha	consumo na linha (proporcional a)
1	?
2	?
3	?
4	?
5	?

$T(n) = ?$

Consumo de tempo: outra versão

```
def merge_sort (p, r, v):
1   if p < r-1:
2       q = (p + r) // 2
3       merge_sort(p, q, v)
4       merge_sort(q, r, v)
5       intercale(p, q, r, v)
```

linha	consumo na linha (proporcional a)
1	$= 1$
2	$= 1$
3	$= T(\lfloor n/2 \rfloor)$
4	$= T(\lceil n/2 \rceil)$
5	$= n$

$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n + 2$

Consumo de tempo: outra versão

$T(n)$:= consumo de tempo quando $n = r - p$

$T(1) = 1$

$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n$ para $n = 2, 3, 4, \dots$

Solução: $T(n)$ é $O(n \lg n)$.

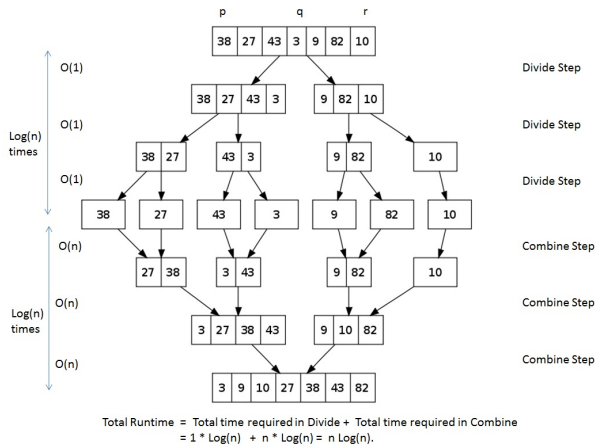
Demonstração: ...

Conclusão

O consumo de tempo da função `merge_sort` é proporcional a $n \lg n$.

O consumo de tempo da função `merge_sort` é $O(n \lg n)$.

Consumo de tempo



Fonte: <http://images.1233.tw/in-place-quicksort-algorithm/>

Divisão e conquista

Algoritmos por **divisão-e-conquista** têm três passos em cada nível da recursão:

Dividir: o problema é dividido em subproblemas de tamanho menor;

Conquistar: os subproblemas são resolvidos **recursivamente** e subproblemas "pequenos" são resolvidos diretamente;

Combinar: as soluções dos subproblemas são combinadas para obter uma solução do problema original.

Exemplo: ordenação por intercalação (**merge_sort**).

merge_sort: versão iterativa

```
def merge_sort (n, v):
    b = 1
    while b < n:
        p = 0
        while p + b < n:
            r = p + 2*b
            if r > n: r = n
            intercale(p, p+b, r, v)
            p = p + 2*b
        b = 2*b
```

Navigation icons: back, forward, search, etc.