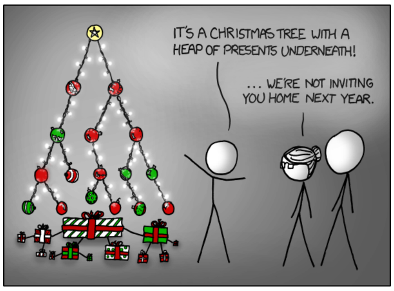
# Árvores em vetores e heaps

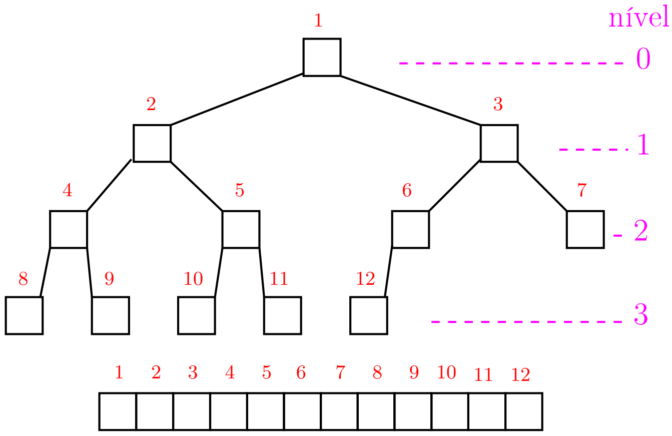



Fonte: http://xkcd.com/835/

PF 10

http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/hpsrt.html

# Representação de árvores em vetores




# Pais e filhos

$\mathtt{v}[1:\mathtt{m}]$ é um vetor representando uma árvore.

Diremos que para qualquer **índice** ou **nó** $\mathtt{i}$,

- $\mathtt{i}//2$ é o **pai** de $\mathtt{i}$;
- $2\,\mathtt{i}$ é o **filho esquerdo** de $\mathtt{i}$;
- $2\,\mathtt{i}+1$ é o **filho direito**.

Um nó $\mathtt{i}$ só tem filho esquerdo se $2\,\mathtt{i} < \mathtt{m}$.

Um nó $\mathtt{i}$ só tem filho direito se $2\,\mathtt{i}+1 < \mathtt{m}$.

# Raiz e folhas

O nó $1$ não tem pai e é chamado de **raiz**.

Um nó $\mathtt{i}$ é um **folha** se não tem **filhos**, ou seja $2\,\mathtt{i} > \mathtt{m}$.

Todo nó $\mathtt{i}$ é raiz da subárvore formada por

$$\mathtt{v}[\mathtt{i}, 2\mathtt{i}, 2\mathtt{i}+1, 4\mathtt{i}, 4\mathtt{i}+1, 4\mathtt{i}+2, 4\mathtt{i}+3, 8\mathtt{i}, \ldots, 8\mathtt{i}+7, \ldots]$$

# Níveis

Cada nível $\mathtt{p}$, exceto talvez o último, tem exatamente $2^{\mathtt{p}}$ nós e esses são

$$2^{\mathtt{p}}, 2^{\mathtt{p}}+1, 2^{\mathtt{p}}+2, \ldots, 2^{\mathtt{p}+1}-1.$$

# Níveis

Cada nível $\mathtt{p}$, exceto talvez o último, tem exatamente $2^{\mathtt{p}}$ nós e esses são

$$2^{\mathtt{p}}, 2^{\mathtt{p}}+1, 2^{\mathtt{p}}+2, \ldots, 2^{\mathtt{p}+1}-1.$$

O nó $\mathtt{i}$ pertence ao nível ???.

## Níveis

Cada nível $p$, exceto talvez o último, tem exatamente $2^p$ nós e esses são

$$2^p, 2^p + 1, 2^p + 2, \ldots, 2^{p+1} - 1.$$

O nó $i$ pertence ao nível $\lfloor \lg i \rfloor$.


## Níveis

Cada nível $p$, exceto talvez o último, tem exatamente $2^p$ nós e esses são

$$2^p, 2^p + 1, 2^p + 2, \ldots, 2^{p+1} - 1.$$

O nó $i$ pertence ao nível $\lfloor \lg i \rfloor$.


Prova: Se $p$ é o nível do nó $i$, então

$$\begin{array}{rcccl} 2^p & \leq & i & < & 2^{p+1} & \Rightarrow \\ \lg 2^p & \leq & \lg i & < & \lg 2^{p+1} & \Rightarrow \\ p & \leq & \lg i & < & p+1 & \end{array}$$

Logo, $p = \lfloor \lg i \rfloor$.


## Níveis

Cada nível $p$, exceto talvez o último, tem exatamente $2^p$ nós e esses são

$$2^p, 2^p + 1, 2^p + 2, \ldots, 2^{p+1} - 1.$$

O nó $i$ pertence ao nível $\lfloor \lg i \rfloor$.

Prova: Se $p$ é o nível do nó $i$, então

$$\begin{array}{rcccl} 2^p & \leq & i & < & 2^{p+1} & \Rightarrow \\ \lg 2^p & \leq & \lg i & < & \lg 2^{p+1} & \Rightarrow \\ p & \leq & \lg i & < & p+1 & \end{array}$$

Logo, $p = \lfloor \lg i \rfloor$.


Portanto, o número total de níveis é ???.


## Níveis

Cada nível $p$, exceto talvez o último, tem exatamente $2^p$ nós e esses são

$$2^p, 2^p + 1, 2^p + 2, \ldots, 2^{p+1} - 1.$$

O nó $i$ pertence ao nível $\lfloor \lg i \rfloor$.

Prova: Se $p$ é o nível do nó $i$, então

$$\begin{array}{rcccl} 2^p & \leq & i & < & 2^{p+1} & \Rightarrow \\ \lg 2^p & \leq & \lg i & < & \lg 2^{p+1} & \Rightarrow \\ p & \leq & \lg i & < & p+1 & \end{array}$$

Logo, $p = \lfloor \lg i \rfloor$.


Portanto, o número total de níveis é $1 + \lfloor \lg m \rfloor$.

## Altura

A **altura** de um nó $i$ é o maior comprimento de um caminho de $i$ a uma folha.

Em outras palavras, a altura de um nó $i$ é o maior comprimento de uma seqüência da forma

$$\langle \texttt{filho}(i), \texttt{filho}(\texttt{filho}(i)), \texttt{filho}(\texttt{filho}(\texttt{filho}(i))), \ldots$$

onde $\texttt{filho}(i)$ vale $2i$ ou $2i + 1$.

Os nós que têm **altura zero** são as folhas.


## Altura

A **altura** de um nó $i$ é o maior comprimento de um caminho de $i$ a uma folha.

Em outras palavras, a altura de um nó $i$ é o maior comprimento de uma seqüência da forma

$$\langle \texttt{filho}(i), \texttt{filho}(\texttt{filho}(i)), \texttt{filho}(\texttt{filho}(\texttt{filho}(i))), \ldots$$

onde $\texttt{filho}(i)$ vale $2i$ ou $2i + 1$.

Os nós que têm **altura zero** são as folhas.


A altura de um nó $i$ é $\lfloor \lg(m/i) \rfloor$ (...).

## Resumão

filho esquerdo de $i$: $2\,i$
filho direito de $i$: $2\,i+1$
pai de $i$: $i//2$

nível da raiz: $0$
nível de $i$: $\lfloor \lg i \rfloor$

altura da raiz: $\lfloor \lg m \rfloor$
altura da árvore: $\lfloor \lg m \rfloor$
altura de $i$: $\lfloor \lg(m/i) \rfloor$ (...)
altura de uma folha: $0$
total de nós de altura $h$ $\leq \lceil m/2^{h+1} \rceil$ (...)

## Heaps

Um vetor $v[1:m]$ é um max-heap se

$$v[i//2] \geq v[i]$$

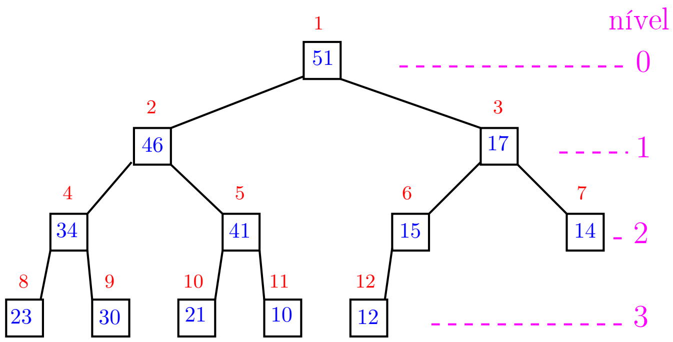
para todo $i = 2, 3, \ldots, m{-}1$.

De uma forma mais geral, $v[j:m]$ é um max-heap se

$$v[i//2] \geq v[i]$$

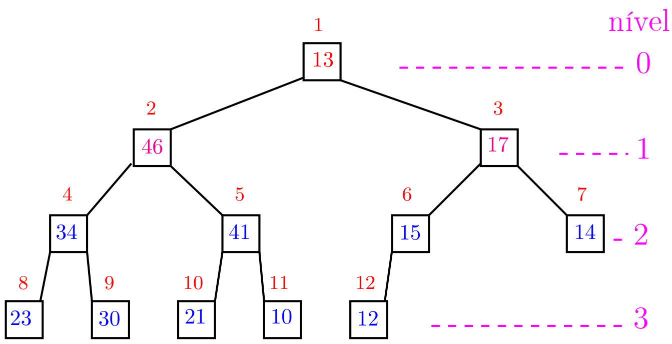
para todo
$i = 2j, 2j+1, 4j, \ldots, 4j+3, 8j, \ldots, 8j+7, \ldots$.
Neste caso também diremos que a subárvore com raiz $j$ é um max-heap.

## max-heap



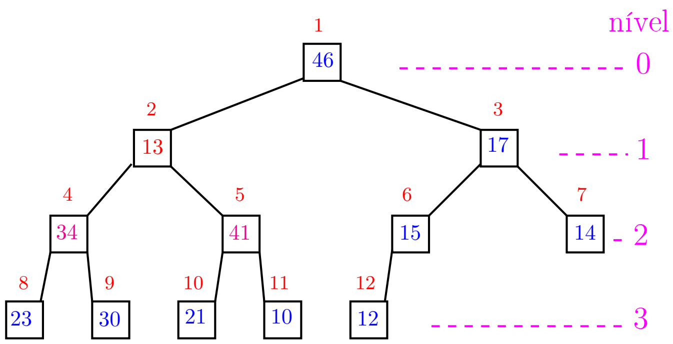

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 46 | 17 | 34 | 41 | 15 | 14 | 23 | 30 | 21 | 10 | 12 |

## Função básica de manipulação de max-heap



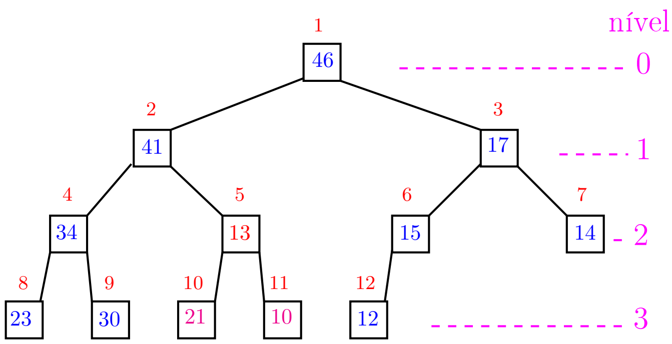

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 46 | 17 | 34 | 41 | 15 | 14 | 23 | 30 | 21 | 10 | 12 |

## Função básica de manipulação de max-heap



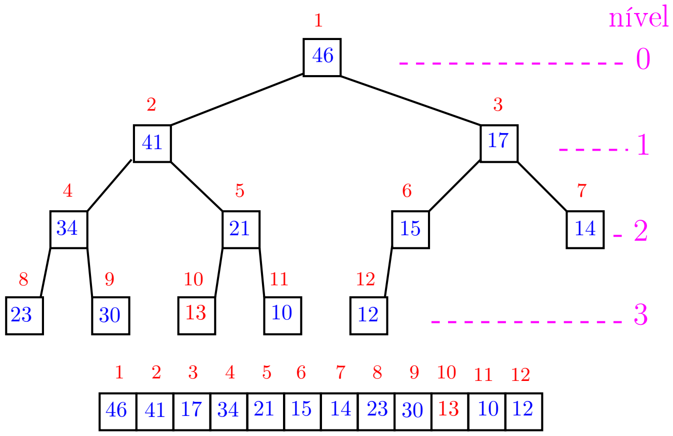

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 46 | 13 | 17 | 34 | 41 | 15 | 14 | 23 | 30 | 21 | 10 | 12 |

## Função básica de manipulação de max-heap

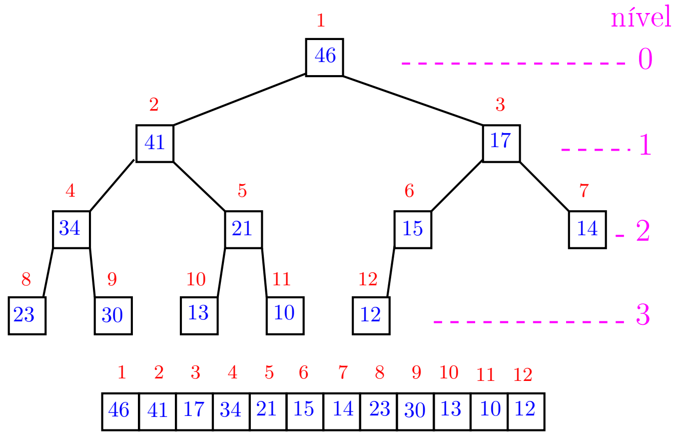



| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 46 | 41 | 17 | 34 | 13 | 15 | 14 | 23 | 30 | 21 | 10 | 12 |

## Função básica de manipulação de max-heap




## Função básica de manipulação de max-heap




## Função peneira

O coração de qualquer algoritmo que manipule um max-heap é uma função que recebe uma lista arbitrário v[1:m] e um índice i e faz v[i] "descer" para sua posição correta.

## Função peneira

Rearranja o vetor v[1:m] de modo que o "subvetor" cuja raiz é i seja um max-heap.

```
def peneira(i, m, v):
1    f = 2*i
2    while f < m:
3        if f < m-1 and v[f] < v[f+1]:f+=1
4        if v[i] >= v[f]:  break
5        v[i], v[f] = v[f], v[i]
6        i = f
6        f = 2*i
```

## Função peneira

Supõe que os "subvetores" cujas raízes são filhos de i já são max-heap.

```
def peneira(i, m, v):
1    f = 2*i
2    while f < m:
3        if f < m-1 and v[f] < v[f+1]:f+=1
4        if v[i] >= v[f]:  break
5        v[i], v[f] = v[f], v[i]
6        i = f
6        f = 2*i
```

## Função peneira

A seguinte implementação é um pouco melhor pois em vez de trocas faz apenas deslocamentos (linha 5).

```
def peneira(i, m, v):
1    x = v[i]
1    f = 2*i
2    while f < m:
3        if f < m-1 and v[f] < v[f+1]:f+=1
4        if x >= v[f]:  break
5        v[i] = v[f]
6        i = f
6        f = 2*i
7    v[i] = x
```

## Consumo de tempo

| linha | | todas as execuções da linha |
|---|---|---|
| 1 | $=$ | $1$ |
| 2 | $\leq$ | $1 + \lg \mathtt{m}$ |
| 3 | $\leq$ | $\lg \mathtt{m}$ |
| 4 | $\leq$ | $\lg \mathtt{m}$ |
| 5 | $\leq$ | $\lg \mathtt{m}$ |
| 6 | $\leq$ | $\lg \mathtt{m}$ |
| 7 | $=$ | $1$ |
| total | $\leq$ | $3 + 5 \lg \mathtt{m} = \mathrm{O}(\lg \mathtt{m})$ |

## Conclusão

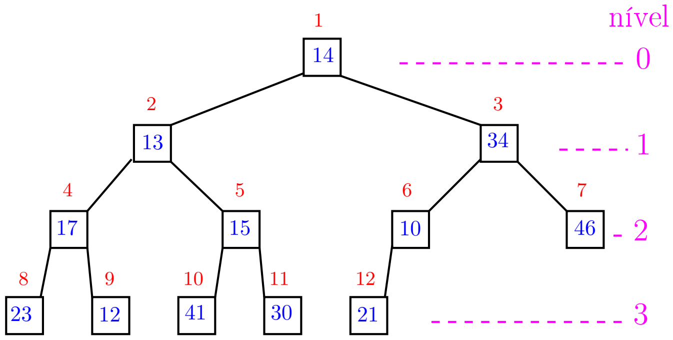
O consumo de tempo da função `peneira` é proporcional a $\lg \mathtt{m}$.

O consumo de tempo da função `peneira` é $\mathrm{O}(\lg \mathtt{m})$.

Verdade seja dita . . . (. . . )

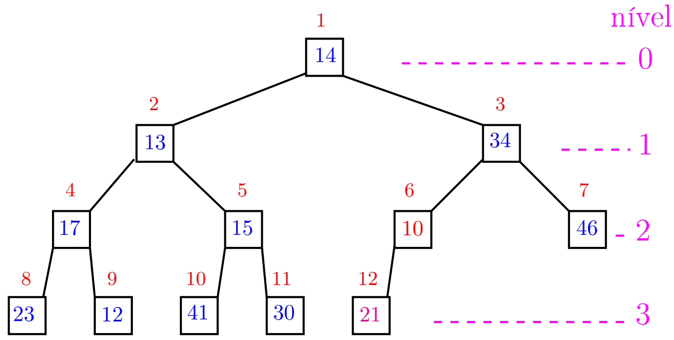
O consumo de tempo da função `peneira` é proporcional a $\mathrm{O}(\lg \mathtt{m}/\mathtt{i})$.

## Construção de um max-heap



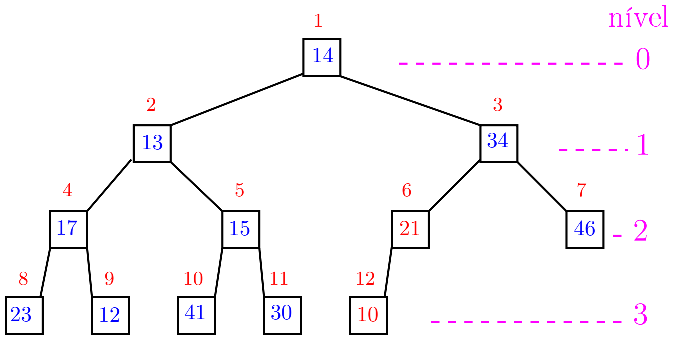

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 13 | 34 | 17 | 15 | 10 | 46 | 23 | 12 | 41 | 30 | 21 |

## Construção de um max-heap



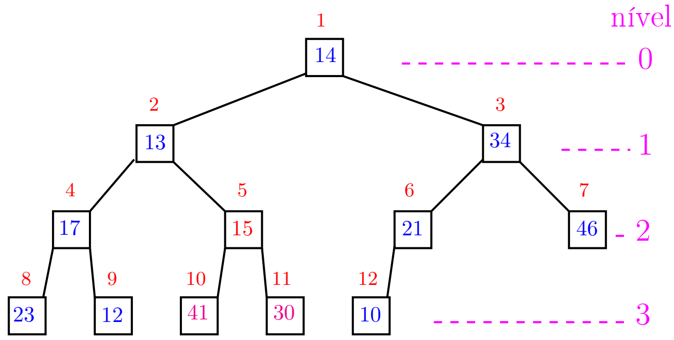

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 13 | 34 | 17 | 15 | 10 | 46 | 23 | 12 | 41 | 30 | 21 |

## Construção de um max-heap



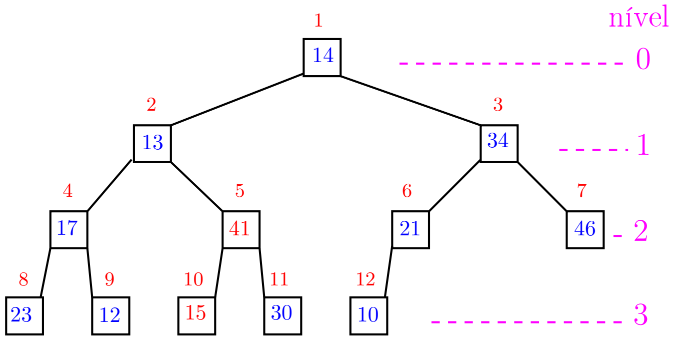

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 13 | 34 | 17 | 15 | 21 | 46 | 23 | 12 | 41 | 30 | 10 |

## Construção de um max-heap



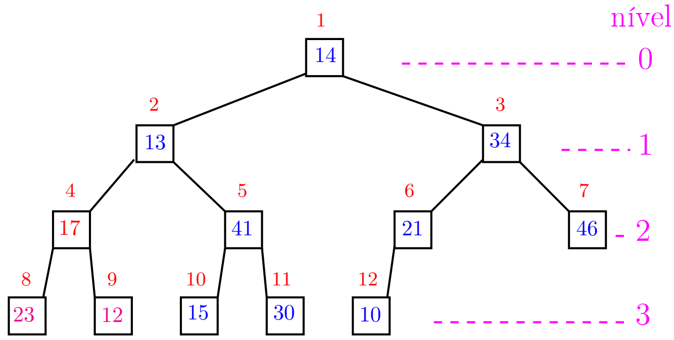

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 13 | 34 | 17 | 15 | 21 | 46 | 23 | 12 | 41 | 30 | 10 |

# Construção de um max-heap



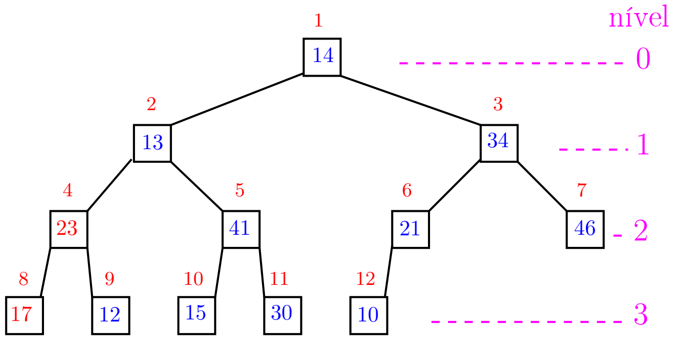

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 13 | 34 | 17 | 41 | 21 | 46 | 23 | 12 | 15 | 30 | 10 |

# Construção de um max-heap



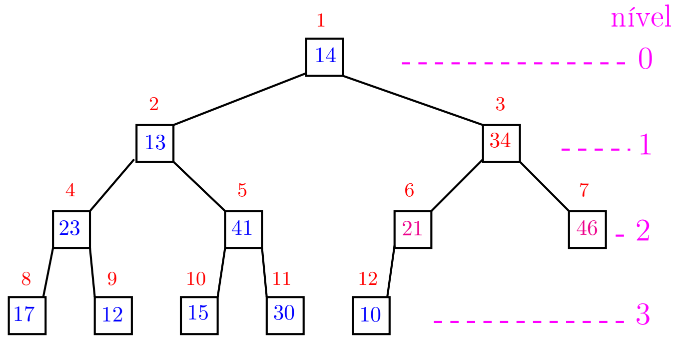

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 13 | 34 | 17 | 41 | 21 | 46 | 23 | 12 | 15 | 30 | 10 |

# Construção de um max-heap



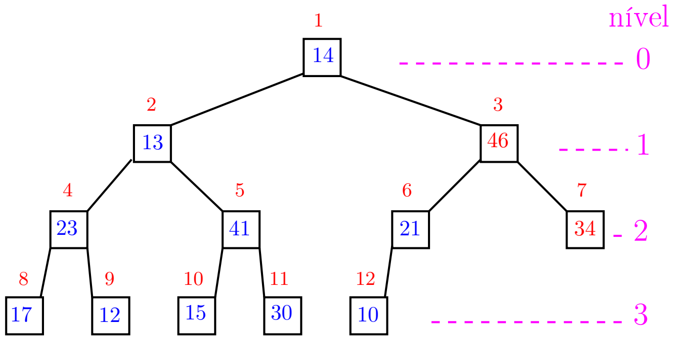

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 13 | 34 | 23 | 41 | 21 | 46 | 17 | 12 | 15 | 30 | 10 |

# Construção de um max-heap



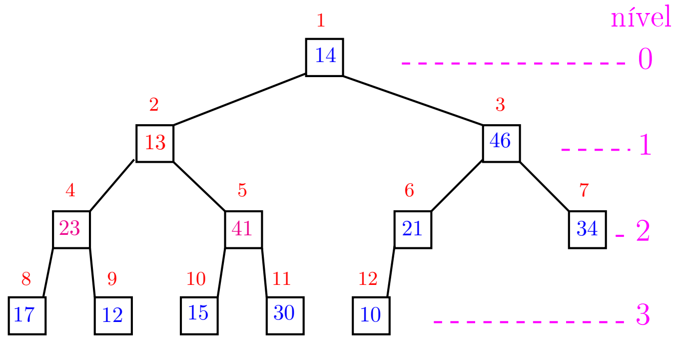

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 13 | 34 | 23 | 41 | 21 | 46 | 17 | 12 | 15 | 30 | 10 |

# Construção de um max-heap



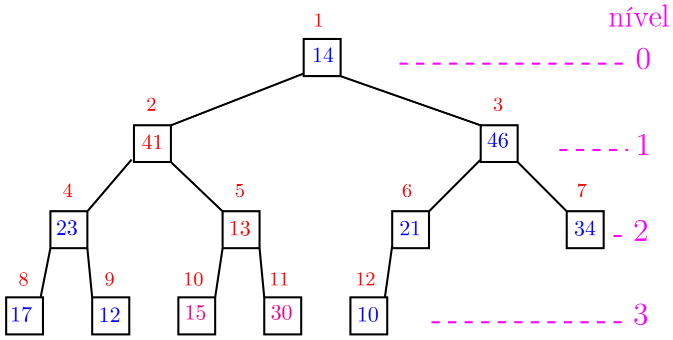

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 13 | 46 | 23 | 41 | 21 | 34 | 17 | 12 | 15 | 30 | 10 |

# Construção de um max-heap



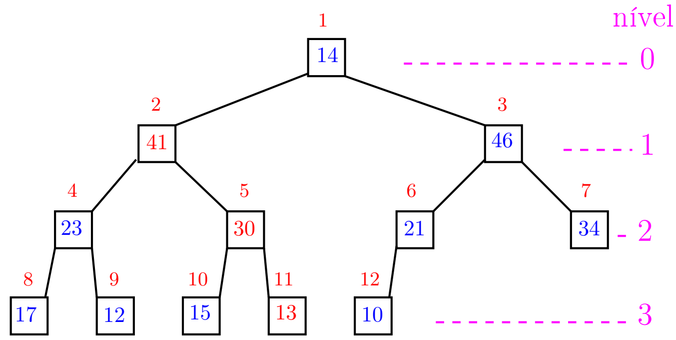

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 13 | 46 | 23 | 41 | 21 | 34 | 17 | 12 | 15 | 30 | 10 |

## Construção de um max-heap



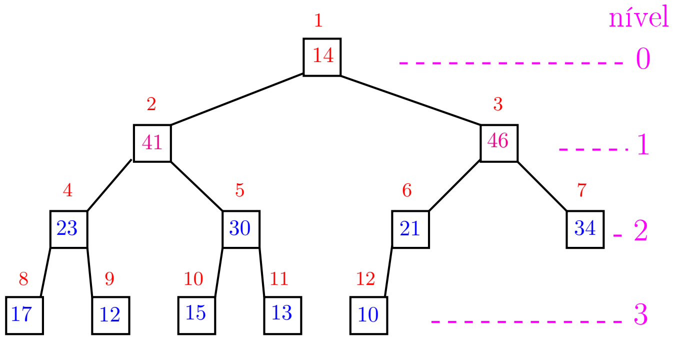

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 41 | 46 | 23 | 13 | 21 | 34 | 17 | 12 | 15 | 30 | 10 |

## Construção de um max-heap



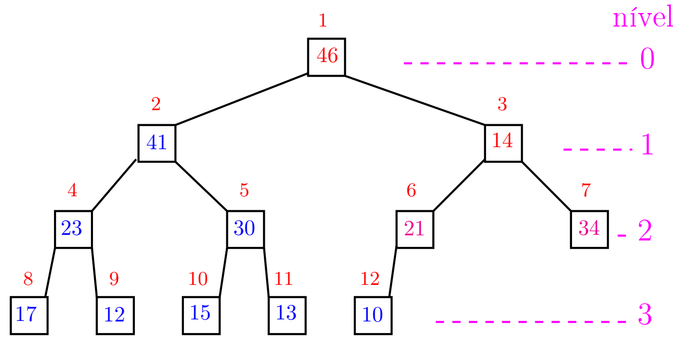

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 41 | 46 | 23 | 30 | 21 | 34 | 17 | 12 | 15 | 13 | 10 |

## Construção de um max-heap



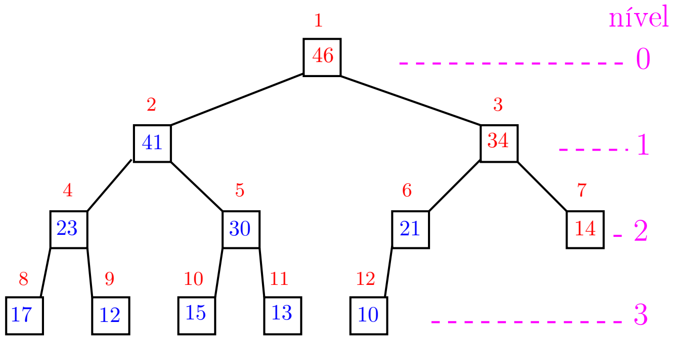

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 41 | 46 | 23 | 30 | 21 | 34 | 17 | 12 | 15 | 13 | 10 |

## Construção de um max-heap



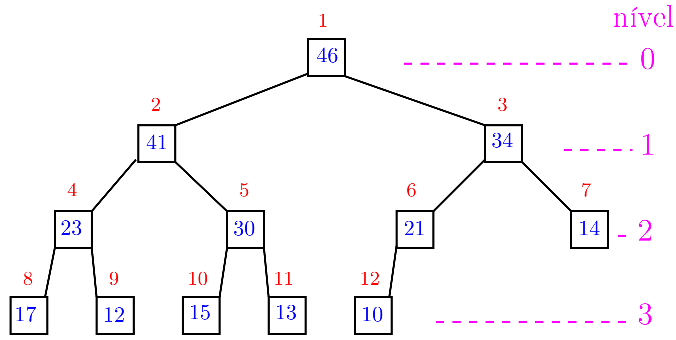

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 46 | 41 | 14 | 23 | 30 | 21 | 34 | 17 | 12 | 15 | 13 | 10 |

## Construção de um max-heap




| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 46 | 41 | 34 | 23 | 30 | 21 | 14 | 17 | 12 | 15 | 13 | 10 |

## Construção de um max-heap




| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 46 | 41 | 34 | 23 | 30 | 21 | 14 | 17 | 12 | 15 | 13 | 10 |

## Construção de um max-heap

Recebe um vetor $v[1:n]$ e rearranja v para que seja max-heap.

```
1   for in range((n-1)//2, 0, -1):  #A#
2       peneira(i, n, v)
```

Relação invariante:

(i0) em #A# vale que, $i+1, \ldots, n-1$ são raízes de max-heaps.

## Consumo de tempo

Análise grosseira: consumo de tempo é

$$\frac{n}{2} \times \lg n = O(n \lg n).$$

Verdade seja dita ... (...)

Análise mais cuidadosa: consumo de tempo é $O(n)$.

## Conclusão

O consumo de tempo para construir um max-heap é $O(n \lg n)$.

Verdade seja dita ... (...)

O consumo de tempo para construir um max-heap é $O(n)$.

## Ordenação: algoritmo Heapsort

PF 10

http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/hpsrt.html

## Ordenação

$v[1:n]$ é crescente se $v[1] \leq \cdots \leq v[n-1]$.

Problema: Rearranjar um vetor $v[1:n-1]$ de modo que ele fique crescente.

Entra:

| 1 | | | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 33 | 55 | 33 | 44 | 33 | 22 | 11 | 99 | 22 | 55 | 77 |

Sai:

| 1 | | | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 22 | 22 | 33 | 33 | 33 | 44 | 55 | 55 | 77 | 99 |

## Heapsort

O Heapsort ilustra o uso de estruturas de dados no projeto de algoritmos eficientes.
Rearranjar um vetor $v[\underline{1:n}]$ de modo que ele fique crescente.

Entra:

| 1 | | | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 33 | 55 | 33 | 44 | 33 | 22 | 11 | 99 | 22 | 55 | 77 |

Sai:

| 1 | | | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 22 | 22 | 33 | 33 | 33 | 44 | 55 | 55 | 77 | 99 |

## Ordenação por seleção

i = 5

| 1 | | | | max | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 50 | 20 | 44 | 10 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

## Ordenação por seleção

i = 5

| 1 | | | j | max | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 50 | 20 | 44 | 10 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

## Ordenação por seleção

i = 5

| 1 | | | j | max | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 50 | 20 | 44 | 10 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

| 1 | | j | max | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 50 | 20 | 44 | 10 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

## Ordenação por seleção

i = 5

| 1 | | | j | max | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 50 | 20 | 44 | 10 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

| 1 | | j | max | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 50 | 20 | 44 | 10 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

| 1 | j | | max | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 50 | 20 | 44 | 10 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

## Ordenação por seleção

i = 5

| 1 | | | j | max | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 50 | 20 | 44 | 10 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

| 1 | | j | max | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 50 | 20 | 44 | 10 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

| 1 | j | | max | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 50 | 20 | 44 | 10 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

| j | max | | | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 50 | 20 | 44 | 10 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

## Ordenação por seleção

i = 5

| 1 | | | j | max | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 50 | 20 | 44 | 10 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

| 1 | | j | max | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 50 | 20 | 44 | 10 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

| 1 | j | | max | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 50 | 20 | 44 | 10 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

| j | max | | | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 50 | 20 | 44 | 10 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

| 1 | max | | | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 50 | 20 | 44 | 10 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

## Ordenação por seleção

| 1 | | | i | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 10 | 20 | 44 | 50 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

## Ordenação por seleção

| 1 | | | i | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 10 | 20 | 44 | 50 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

| 1 | | i | | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 10 | 20 | 44 | 50 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

## Ordenação por seleção

| 1 | | | i | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 10 | 20 | 44 | 50 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

| 1 | | i | | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 10 | 38 | 44 | 50 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

| 1 | i | | | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 10 | 38 | 44 | 50 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

## Ordenação por seleção

| 1 | | | i | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 10 | 20 | 44 | 50 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

| 1 | | i | | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 10 | 38 | 44 | 50 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

| 1 | i | | | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 20 | 38 | 44 | 50 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

| 1 | | | | | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 20 | 38 | 44 | 50 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 | |

## Função selecao

Algoritmo rearranja v[0 : n] em ordem crescente

```
def selecao(n, v):
    for i in range(n-1, 0, -1):   #B#
        max = i
        for j in range(i-1, -1, -1):
            if v[j] > v[max]:  max = j
        v[i], v[max] = v[max], v[i]
```

## Função selecao

Algoritmo rearranja v[1 : n] em ordem crescente

```
def selecao(n, v):
    for i in range(n-1, 1, -1):   #B#
        max = i
        for j in range(i-1, 0, -1):
            if v[j] > v[max]:  max = j
        v[i], v[max] = v[max], v[i]
```

## Função `selecao`

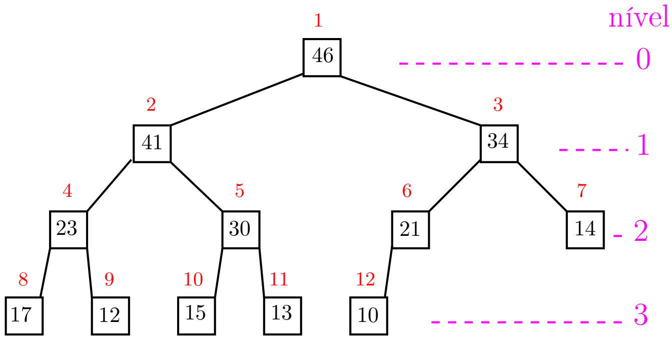
Relações invariantes: Em /*B*/ vale que:

(i0) v[i+1 : n] é crescente;

(i1) v[1 : i] $\leq$ v[i+1];

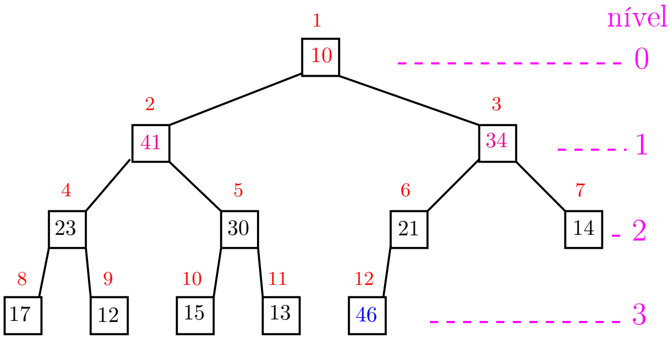
| 1 | | | i | | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 10 | 20 | 44 | 50 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 |

## Heapsort



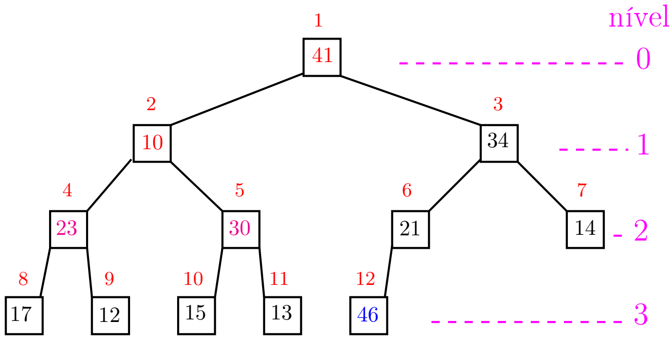

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 46 | 41 | 34 | 23 | 30 | 21 | 14 | 17 | 12 | 15 | 13 | 10 |

## Heapsort



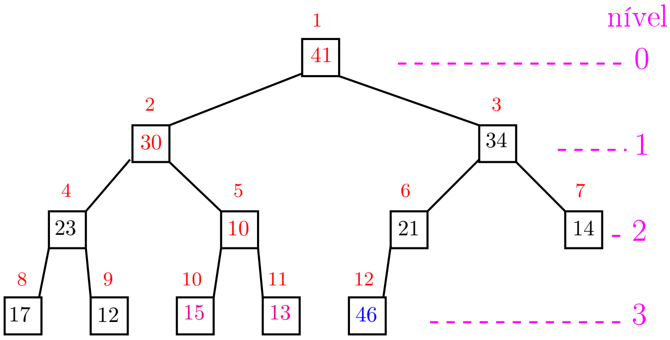

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 41 | 34 | 23 | 30 | 21 | 14 | 17 | 12 | 15 | 13 | 46 |

## Heapsort



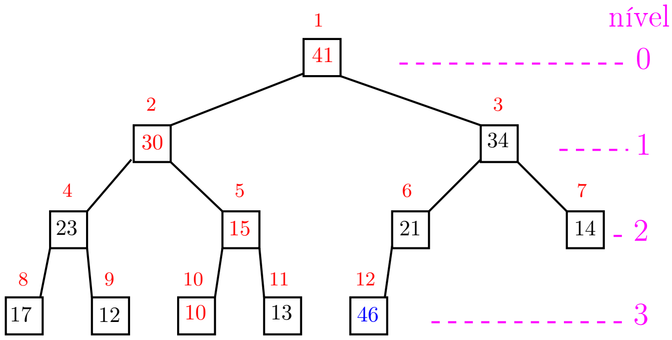

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 41 | 10 | 34 | 23 | 30 | 21 | 14 | 17 | 12 | 15 | 13 | 46 |

## Heapsort



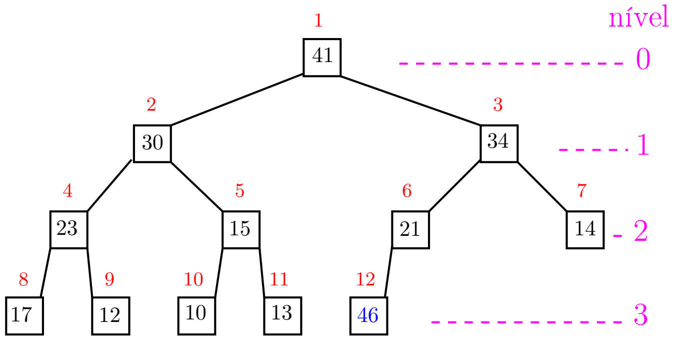

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 41 | 30 | 34 | 23 | 10 | 21 | 14 | 17 | 12 | 15 | 13 | 46 |

## Heapsort



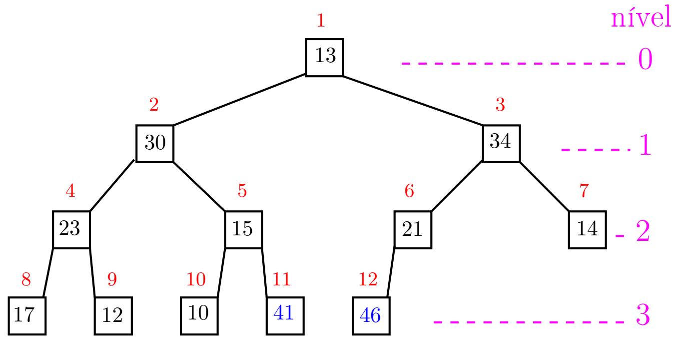

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 41 | 30 | 34 | 23 | 15 | 21 | 14 | 17 | 12 | 10 | 13 | 46 |

## Heapsort



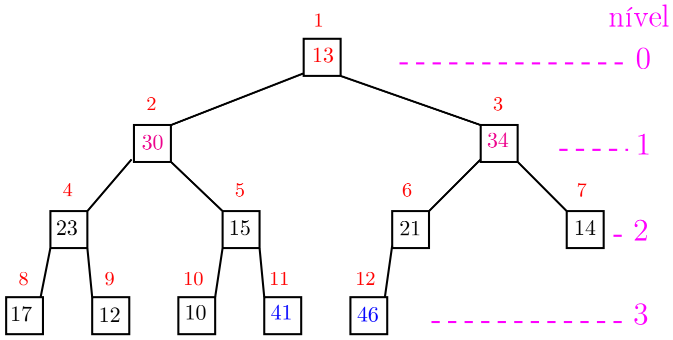

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 41 | 30 | 34 | 23 | 15 | 21 | 14 | 17 | 12 | 10 | 13 | 46 |

## Heapsort



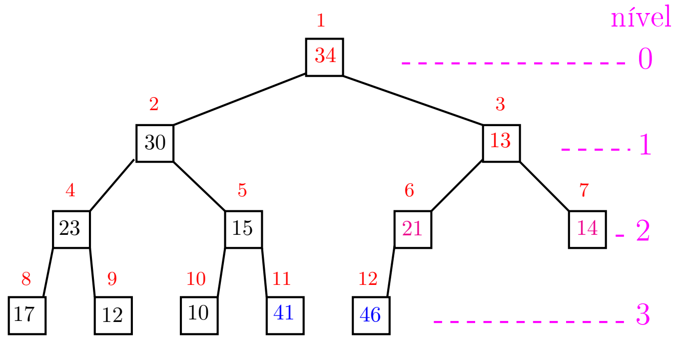

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 30 | 34 | 23 | 15 | 21 | 14 | 17 | 12 | 10 | 41 | 46 |

## Heapsort



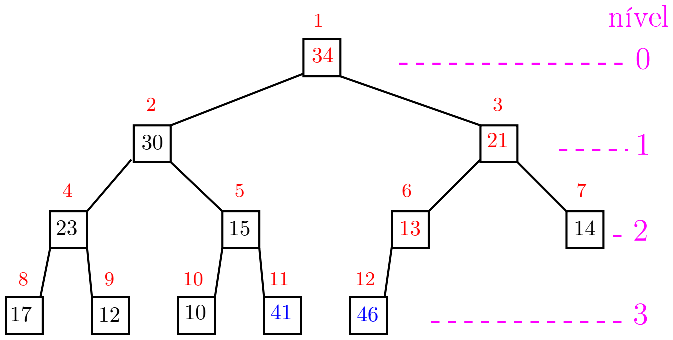

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 30 | 34 | 23 | 15 | 21 | 14 | 17 | 12 | 10 | 41 | 46 |

## Heapsort



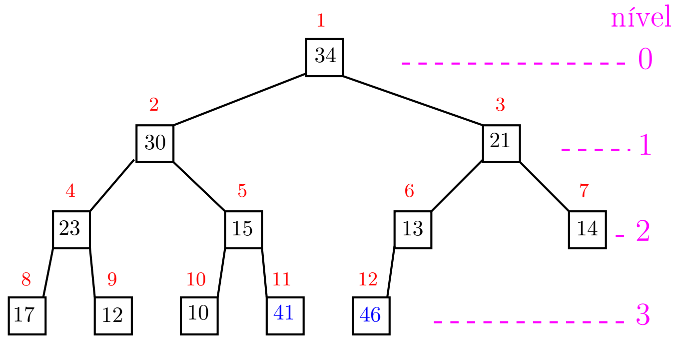

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 34 | 30 | 13 | 23 | 15 | 21 | 14 | 17 | 12 | 10 | 41 | 46 |

## Heapsort



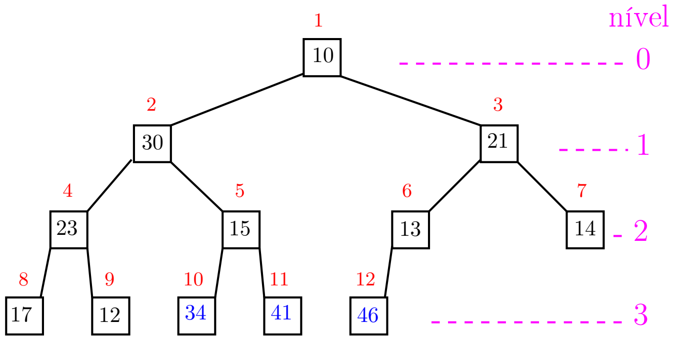

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 34 | 30 | 21 | 23 | 15 | 13 | 14 | 17 | 12 | 10 | 41 | 46 |

## Heapsort



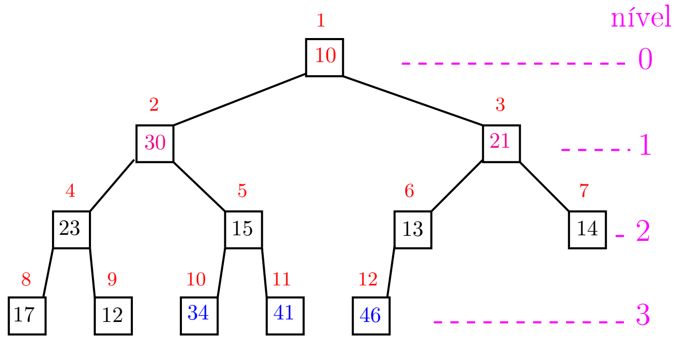

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 34 | 30 | 21 | 23 | 15 | 13 | 14 | 17 | 12 | 10 | 41 | 46 |

## Heapsort



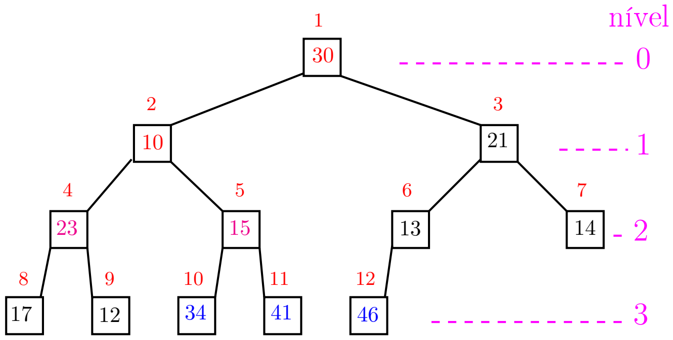

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 30 | 21 | 23 | 15 | 13 | 14 | 17 | 12 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



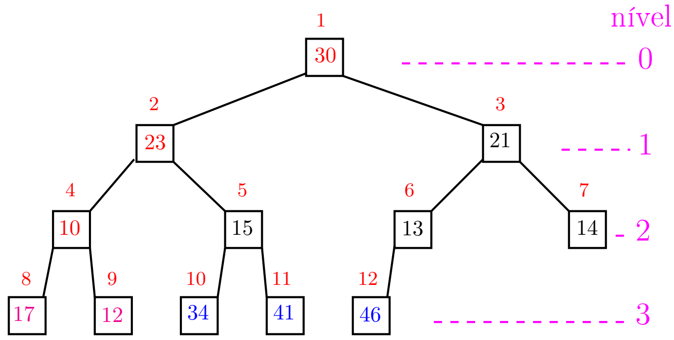

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 30 | 21 | 23 | 15 | 13 | 14 | 17 | 12 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



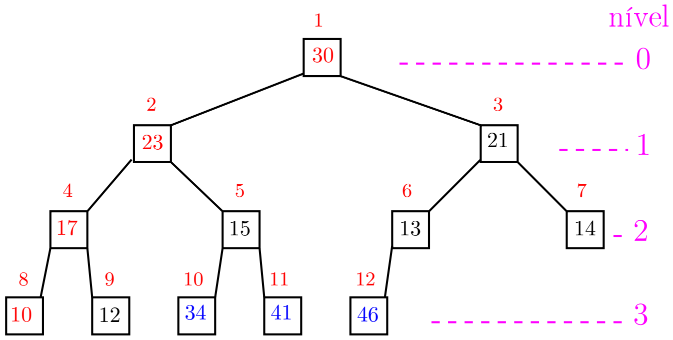

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 10 | 21 | 23 | 15 | 13 | 14 | 17 | 12 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



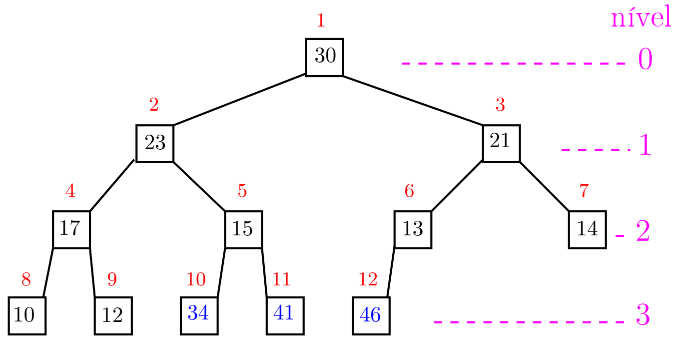

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 23 | 21 | 10 | 15 | 13 | 14 | 17 | 12 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



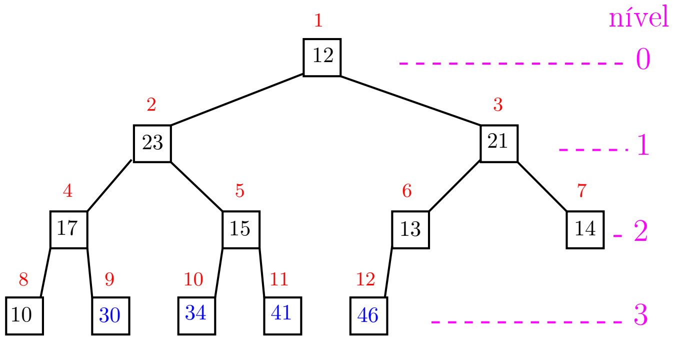

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 23 | 21 | 17 | 15 | 13 | 14 | 10 | 12 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



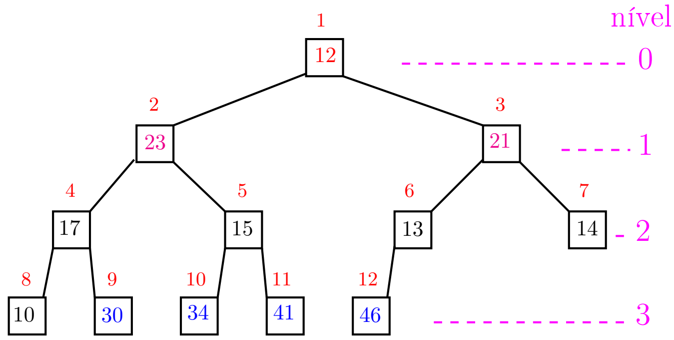

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 23 | 21 | 17 | 15 | 13 | 14 | 10 | 12 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



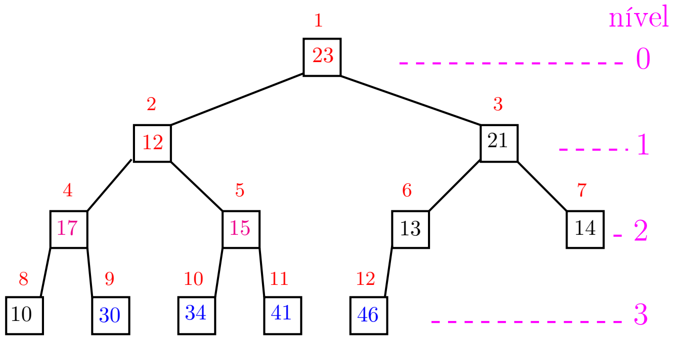

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 23 | 21 | 17 | 15 | 13 | 14 | 10 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



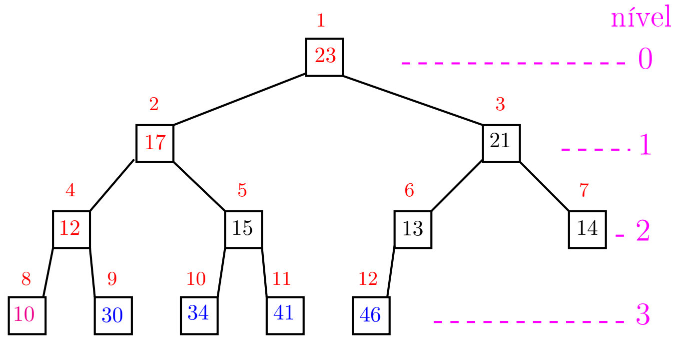

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 23 | 21 | 17 | 15 | 13 | 14 | 10 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



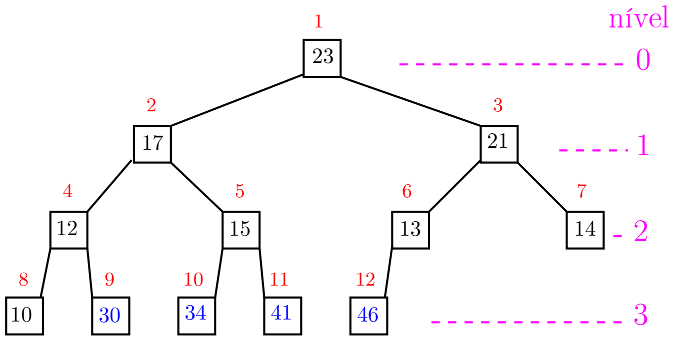

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | 12 | 21 | 17 | 15 | 13 | 14 | 10 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



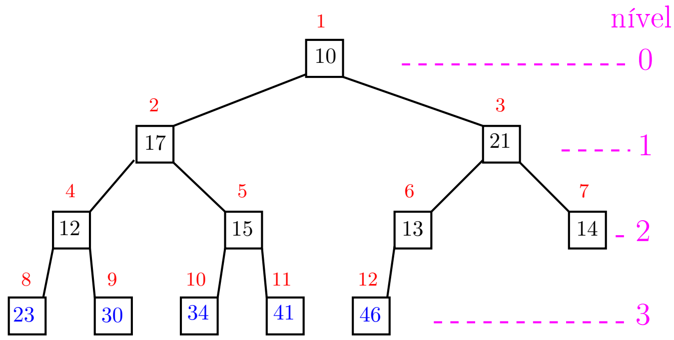

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | 17 | 21 | 12 | 15 | 13 | 14 | 10 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



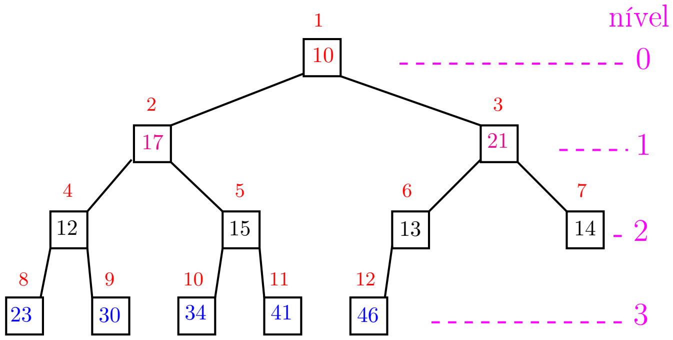

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | 17 | 21 | 12 | 15 | 13 | 14 | 10 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



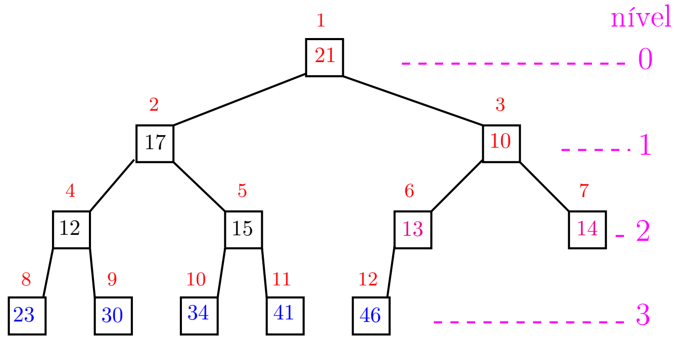

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 17 | 21 | 12 | 15 | 13 | 14 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



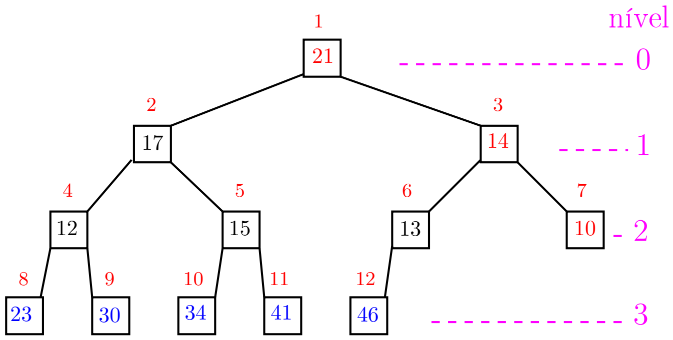

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 17 | 21 | 12 | 15 | 13 | 14 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



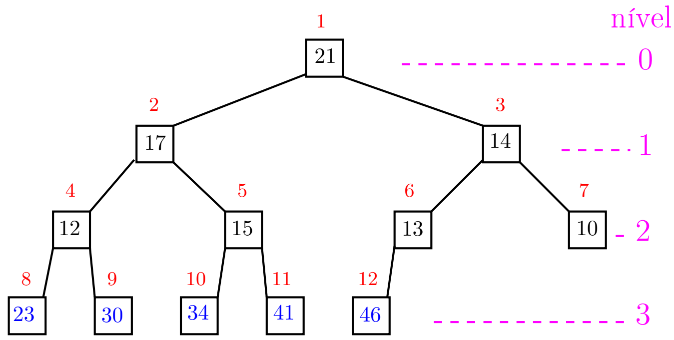

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 17 | 10 | 12 | 15 | 13 | 14 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



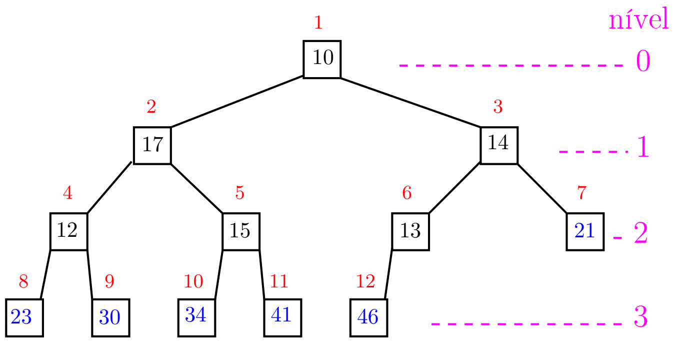

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 17 | 14 | 12 | 15 | 13 | 10 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



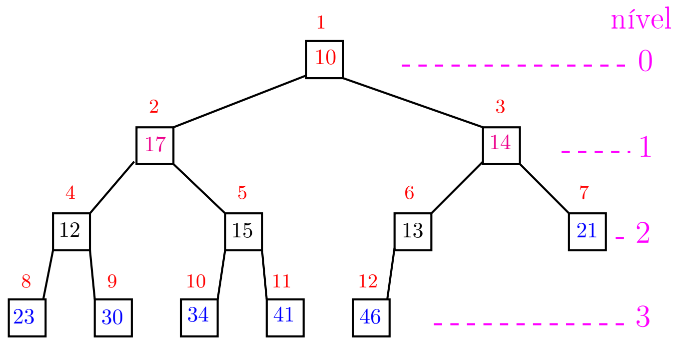

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 17 | 14 | 12 | 15 | 13 | 10 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



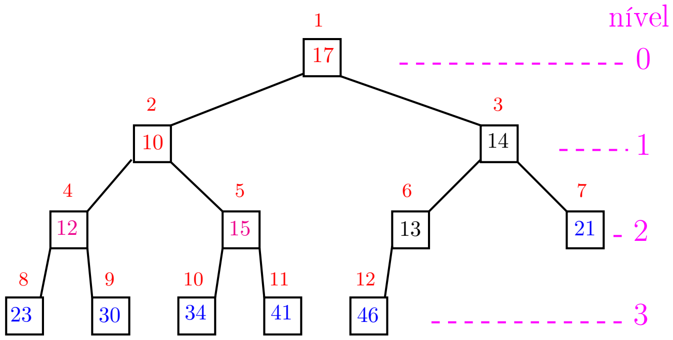

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 17 | 14 | 12 | 15 | 13 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



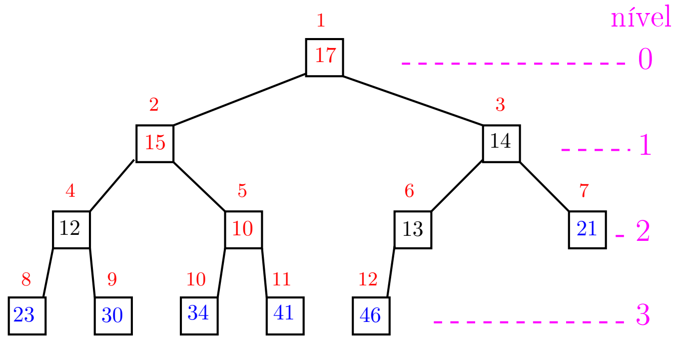

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 17 | 14 | 12 | 15 | 13 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

# Heapsort



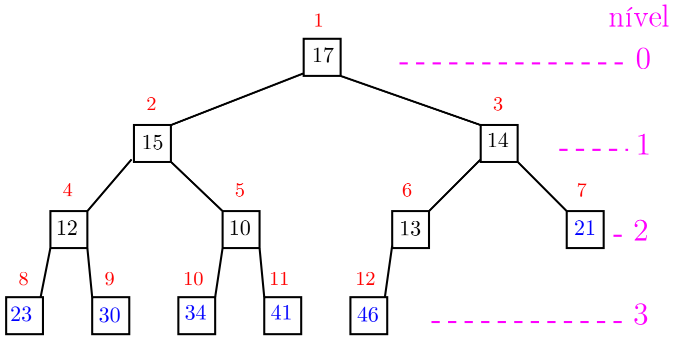

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 10 | 14 | 12 | 15 | 13 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

# Heapsort



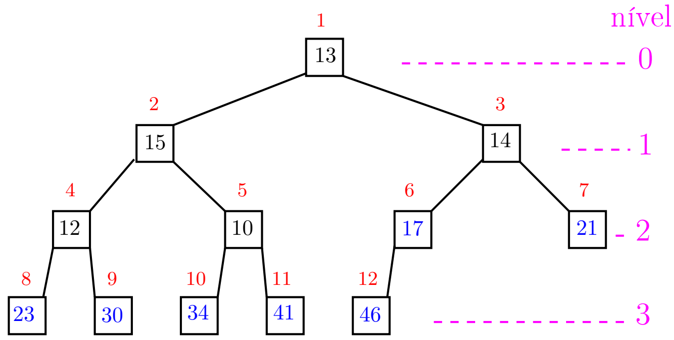

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 15 | 14 | 12 | 10 | 13 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

# Heapsort



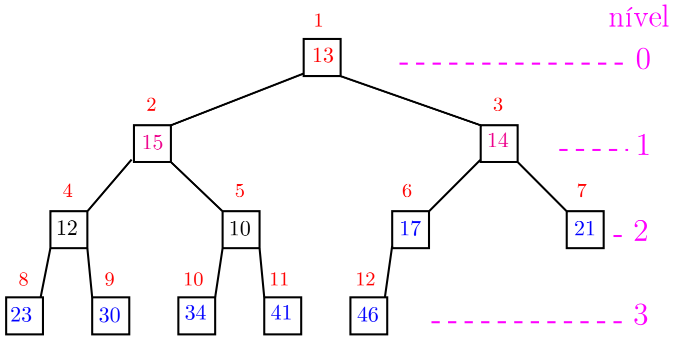

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 15 | 14 | 12 | 10 | 13 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

# Heapsort



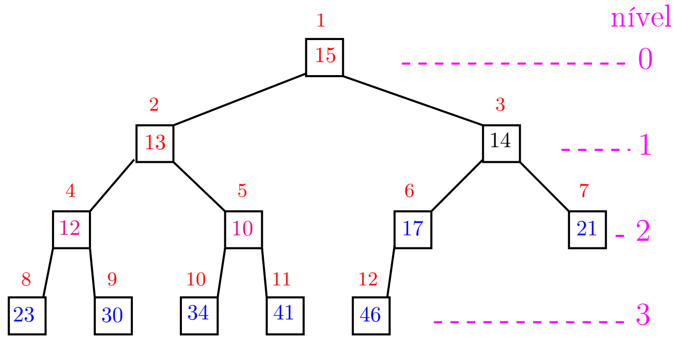

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 15 | 14 | 12 | 10 | 17 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

# Heapsort



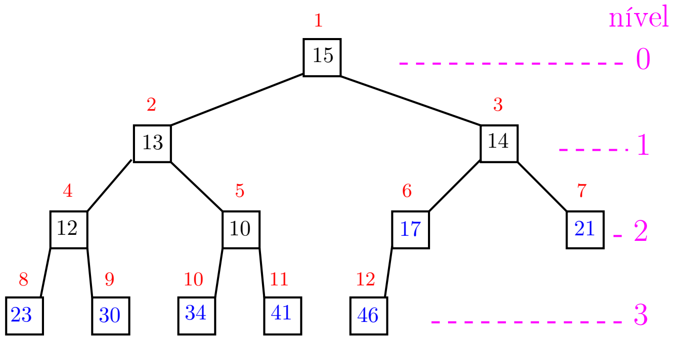

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 15 | 14 | 12 | 10 | 17 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

# Heapsort



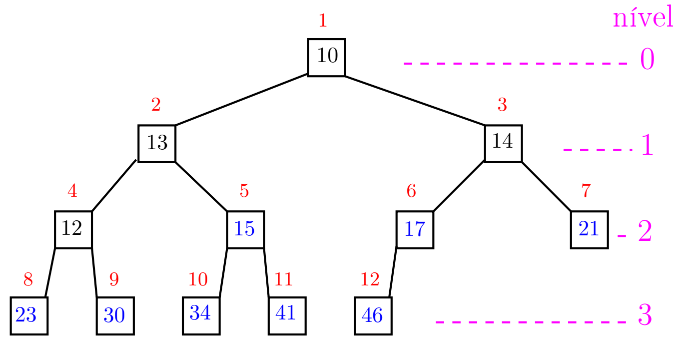

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 13 | 14 | 12 | 10 | 17 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



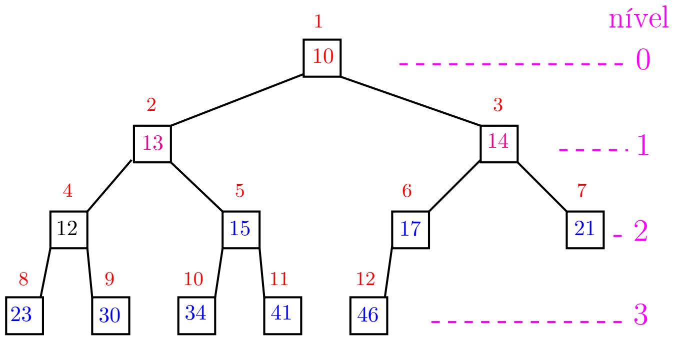

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 13 | 14 | 12 | 10 | 17 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



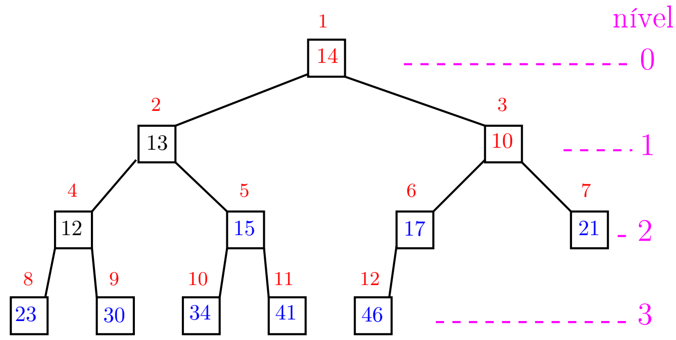

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 13 | 14 | 12 | 15 | 17 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



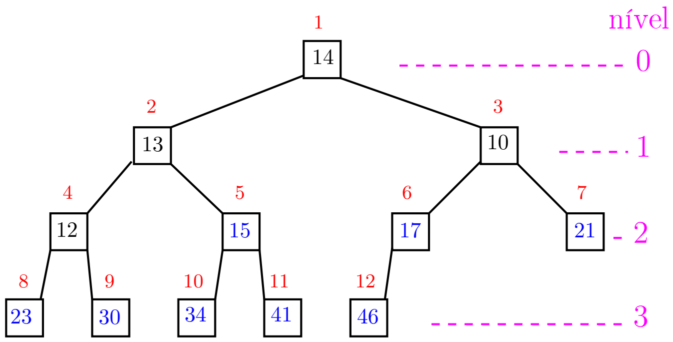

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 13 | 14 | 12 | 15 | 17 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



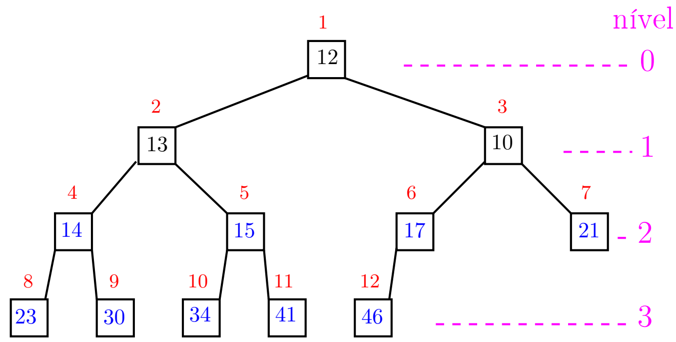

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 13 | 10 | 12 | 15 | 17 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



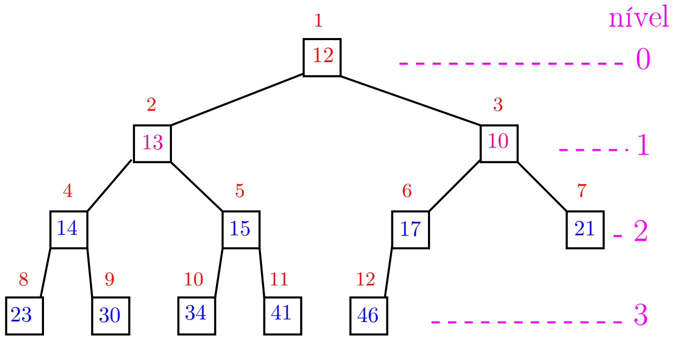

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 13 | 10 | 12 | 15 | 17 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



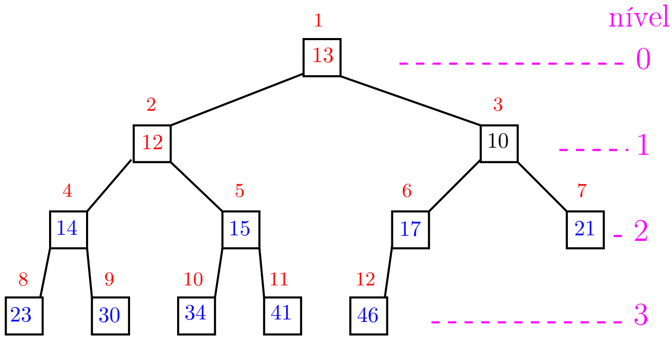

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 13 | 10 | 14 | 15 | 17 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



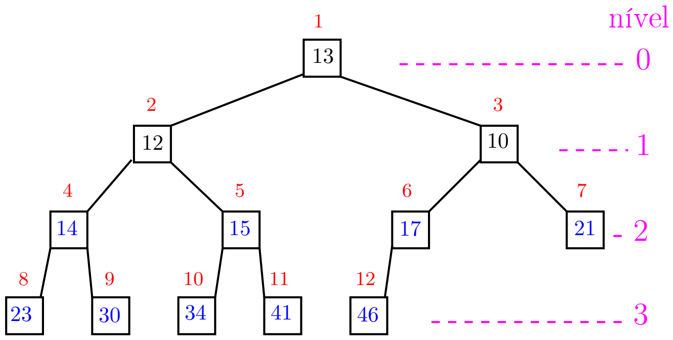

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 13 | 10 | 14 | 15 | 17 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



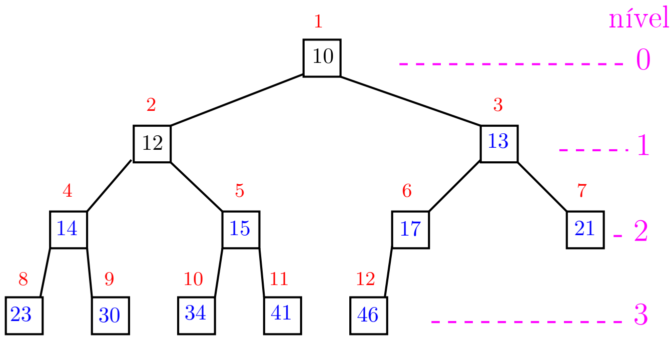

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 12 | 10 | 14 | 15 | 17 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



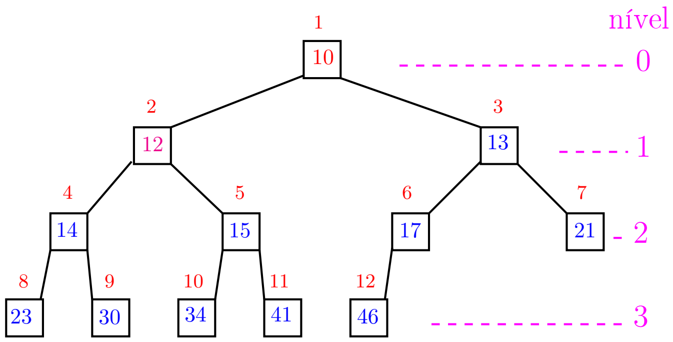

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 12 | 10 | 14 | 15 | 17 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



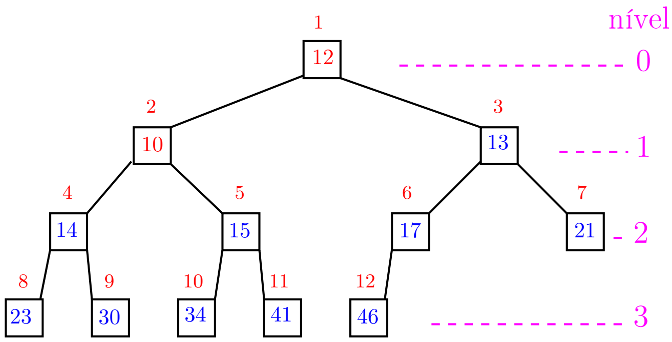

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 13 | 14 | 15 | 17 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



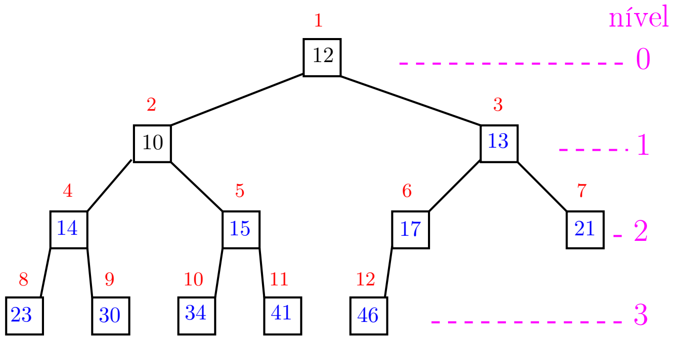

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 13 | 14 | 15 | 17 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



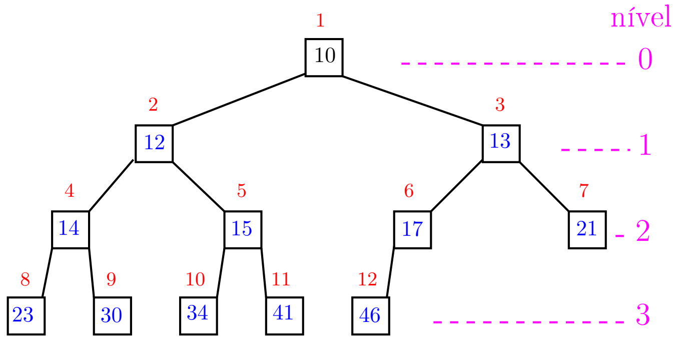

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 10 | 13 | 14 | 15 | 17 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



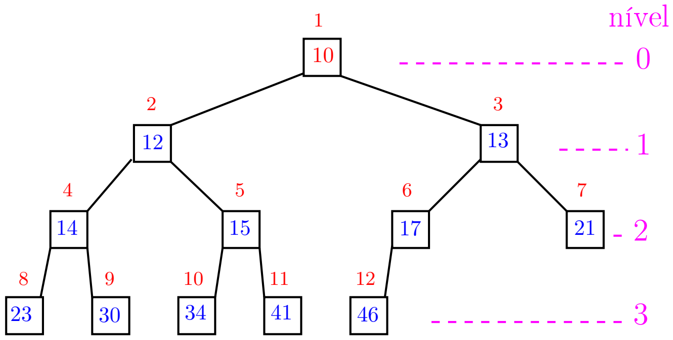

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 10 | 13 | 14 | 15 | 17 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



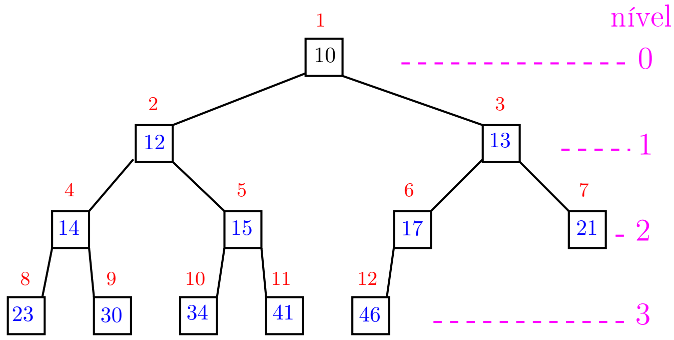

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 13 | 14 | 15 | 17 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort



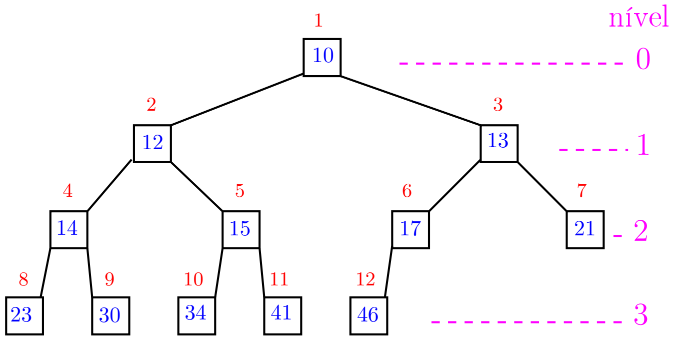

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 13 | 14 | 15 | 17 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort




| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 13 | 14 | 15 | 17 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Heapsort




| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 13 | 14 | 15 | 17 | 21 | 23 | 30 | 34 | 41 | 46 |

## Função heap_sort

Algoritmo rearranja $v[1:n]$ em ordem crescente

```
def heap_sort(n, v):
    # pre-processamento
    for i in range((n-1)//2, 0, -1):
        peneira(i, n, v)

    for i in range(n-1, 1, -1):  #C#
        v[i], v[1] = v[1], v[i]
        peneira(1,i,v)
```

## Função `heap_sort`

Relações invariantes: Em `#C#` vale que:

(i0) $v[i{+}1 : n]$ é crescente;

(i1) $v[1 : i{+}1] \leq v[i{+}1]$;

(i2) $v[1 : i{+}1]$ é um `max-heap`.

| 1 | | | | i | | | | | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 44 | 10 | 38 | 20 | 50 | 55 | 60 | 75 | 85 | 99 |

## Consumo de tempo

| linha | consumo de tempo das execuções da linha | | |
|---|---|---|---|
| 1-2 | $\approx$ | $n \lg n$ | $= O(n \lg n)$ |
| 3 | $\approx$ | $n$ | $= O(n)$ |
| 4 | $\approx$ | $n$ | $= O(n)$ |
| 5 | $\approx$ | $n \lg n$ | $= O(n \lg n)$ |
| total | $=$ | $2n \lg n + 2n$ | $= O(n \lg n)$ |

## Conclusão

O consumo de tempo da função `heap_sort` é proporcional a $n \lg n$.

O consumo de tempo da função `heap_sort` é $O(n \lg n)$.

## Função `insereHeap`

Inseção de um elemento `x` em um `max-heap` $v[1 : n]$

```
void insereHeap (int x, int *n, int v[]) {
    int f /* filho */, p/* pai */, t;
1   *n += 1; f = *n; p = f / 2; v[f] = x;
2   while/*D*/ (f > 1 && v[p] < v[f]) {
3       t = v[p];
4       v[p] = v[f];
5       v[f] = t;
        /* pai no papel de filho */
6       f = p; p = f / 2;
    }
}
```

## Função `insereHeap`

Relações invariantes: Em `/*D*/` vale que:

(i0) $v[1 : {*}n]$ é uma permutação do vetor original

(i1) $v[i/2] \geq v[i]$ para todo $i = 2, \ldots, {*}n$ diferente de `f`.

| 1 | | | | f | | | | | | | *n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 83 | 75 | 25 | 68 | 99 | 15 | 10 | 60 | 57 | 65 | 79 | |

## Conclusão

O consumo de tempo da função `insereHeap` é proporcional a $\lg n$, onde $n$ é o número de elementos no `max-heap`.

O consumo de tempo da função `heap_sort` é $O(n)$, onde $n$ é o número de elementos no `max-heap`.

## Mais análise experimental

Algoritmos implementados:

| | |
|---|---|
| mergeR | merge_sort recursivo. |
| mergeI | merge_sort iterativo. |
| quick | quick_sort recursivo. |
| heap | heap_sort. |

## Mais análise experimental

A plataforma utilizada nos experimentos foi um computador rodando Ubuntu GNU/Linux 3.5.0-17

Compilador:

gcc -Wall -ansi -O2 -pedantic -Wno-unused-result.

Computador:

```
 model name:  Intel(R) Core(TM)2 Quad CPU Q6600 @
2.40GHz
cpu MHz :  1596.000
cache size:  4096 KB
MemTotal :  3354708 kB
```

## Aleatório: média de 10

| n | mergeR | mergeI | quick | heap |
|---|---|---|---|---|
| 8192 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 16384 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 32768 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.00 |
| 65536 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 |
| 131072 | 0.02 | 0.02 | 0.02 | 0.03 |
| 262144 | 0.05 | 0.04 | 0.04 | 0.06 |
| 524288 | 0.10 | 0.08 | 0.08 | 0.12 |
| 1048576 | 0.21 | 0.20 | 0.17 | 0.28 |
| 2097152 | 0.44 | 0.43 | 0.35 | 0.70 |
| 4194304 | 0.92 | 0.90 | 0.73 | 1.73 |
| 8388608 | 1.90 | 1.87 | 1.51 | 4.13 |

Tempos em segundos.

## Decrescente

| n | mergeR | mergeI | quick | heap |
|---|---|---|---|---|
| 1024 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 2048 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 4096 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |
| 8192 | 0.00 | 0.00 | 0.03 | 0.00 |
| 16384 | 0.00 | 0.00 | 0.14 | 0.00 |
| 32768 | 0.00 | 0.01 | 0.57 | 0.00 |
| 65536 | 0.01 | 0.01 | 2.27 | 0.01 |
| 131072 | 0.02 | 0.01 | 9.06 | 0.02 |
| 262144 | 0.03 | 0.03 | 36.31 | 0.04 |

Tempos em segundos.

Para n=524288 quick_sort dá Segmentation fault (core dumped)

## Crescente

| n | mergeR | mergeI | quick | heap |
|---|---|---|---|---|
| 1024 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 2048 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 4096 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 8192 | 0.00 | 0.00 | 0.03 | 0.00 |
| 16384 | 0.00 | 0.00 | 0.14 | 0.01 |
| 32768 | 0.01 | 0.00 | 0.57 | 0.01 |
| 65536 | 0.00 | 0.01 | 2.26 | 0.01 |
| 131072 | 0.02 | 0.02 | 9.05 | 0.02 |
| 262144 | 0.03 | 0.02 | 36.21 | 0.04 |

Tempos em segundos.

Para n=524288 quick_sort dá Segmentation fault (core dumped)

## Resumo

| função | consumo de tempo | observação |
|---|---|---|
| bubble | $O(n^2)$ | todos os casos |
| insercao | $O(n^2)$<br>$O(n)$ | pior caso<br>melhor caso |
| insercao_binaria | $O(n^2)$<br>$O(n \lg n)$ | pior caso<br>melhor caso |
| selecao | $O(n^2)$ | todos os casos |
| merge_sort | $O(n \lg n)$ | todos os casos |
| quick_sort | $O(n^2)$<br>$O(n \lg n)$ | pior caso<br>melhor caso |
| heap_sort | $O(n \lg n)$ | todos os casos |

## Animação de algoritmos de ordenação

Criados por Nicholas André Pinho de Oliveira:
http://nicholasandre.com.br/sorting/

Criados na Sapientia University (Romania):
https://www.youtube.com/channel/UCIqiLefbVHsOAXDAxQJH7X