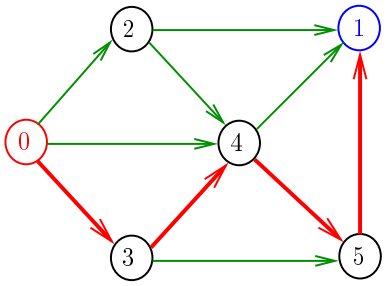
Melhores momentos

AULAS PASSADAS

Procurando um caminho

Problema: dados um digrafo G e dois vértices s e t decidir se existe um caminho de s a t

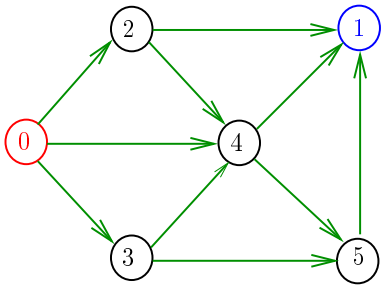
Exemplo: para s = 0 e t = 1 a resposta é SIM



Procurando um caminho

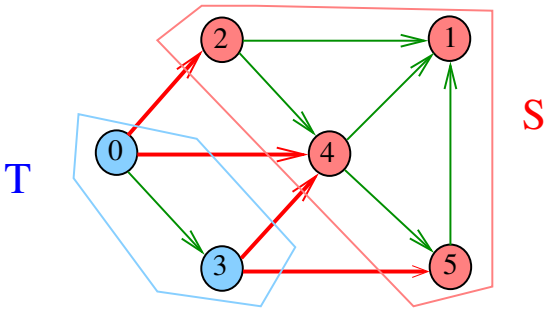
Problema: dados um digrafo G e dois vértices s e t decidir se existe um caminho de s a t

Exemplo: para s = 5 e t = 4 a resposta é NÃO



Certificado de inexistência

Exemplo: certificado de que não há caminho de 2 a 3



Consumo de tempo

A classe DepthFirstPath, para vetor de listas de adjacência, consome tempo $O(V + E)$ para encontrar caminhos a partir um dado vértice s a todos os vértices atingíveis a partir de s.

Certificados

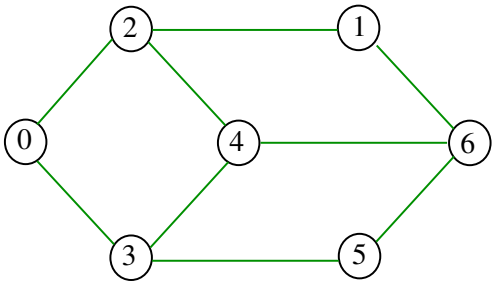
Para quaisquer vértices s e t de um digrafo, vale uma e apenas umas das seguintes afirmações:

- existe um caminho de s a t
- existe st-corte (S, T) em que todo arco no corte tem ponta inicial em T e ponta final em S.

Bipartição

Um grafo é **bipartido** (= *bipartite*) se existe uma bipartição do seu conjunto de vértices tal que cada aresta tem uma ponta em uma das partes da bipartição e a outra ponta na outra parte

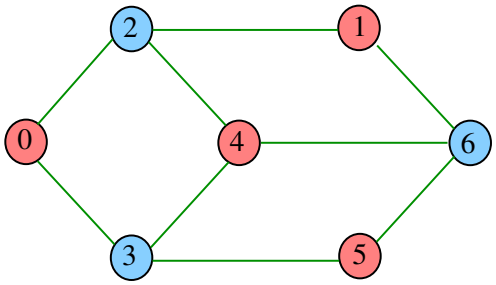
Exemplo:



Bipartição

Um grafo é **bipartido** (= *bipartite*) se existe uma bipartição do seu conjunto de vértices tal que cada aresta tem uma ponta em uma das partes da bipartição e a outra ponta na outra parte

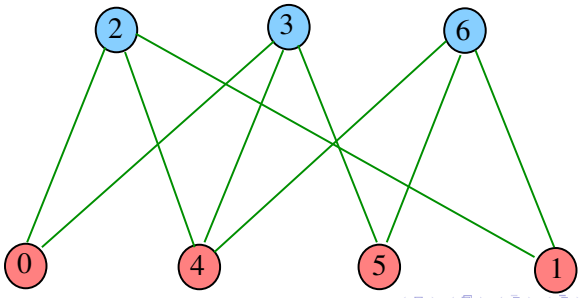
Exemplo:



Bipartição

Um grafo é **bipartido** (= *bipartite*) se existe uma bipartição do seu conjunto de vértices tal que cada aresta tem uma ponta em uma das partes da bipartição e a outra ponta na outra parte

Exemplo:



Consumo de tempo

A classe `TwoColor`, para vetor de listas de adjacência, consome tempo $O(V + E)$ para decidir se um grafo é bipartido.

Certificados

Para todo grafo `G`, vale uma e apenas umas das seguintes afirmações:

- `G` possui um ciclo ímpar
- `G` é bipartido

AULA 17

Busca DFS

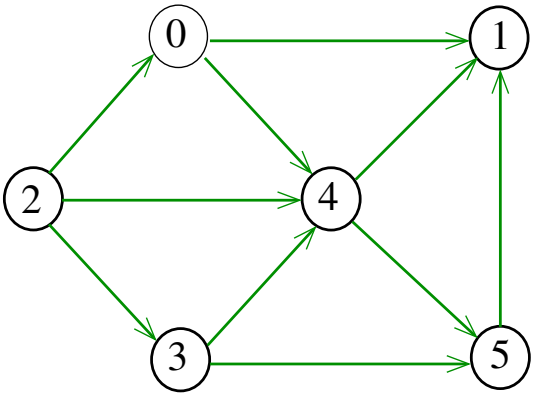
S 18.1 e 18.2

Busca ou varredura

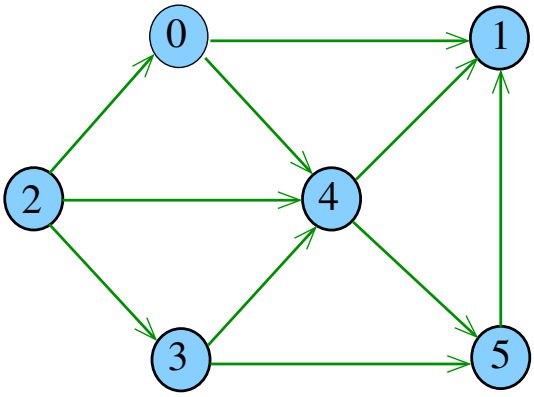
Um algoritimo de **busca** (ou **varredura**) examina, sistematicamente, todos os vértices e todos os arcos de um digrafo.

Cada arco é examinado **uma só vez**.
Despois de visitar sua ponta inicial o algoritmo percorre o arco e visita sua ponta final.

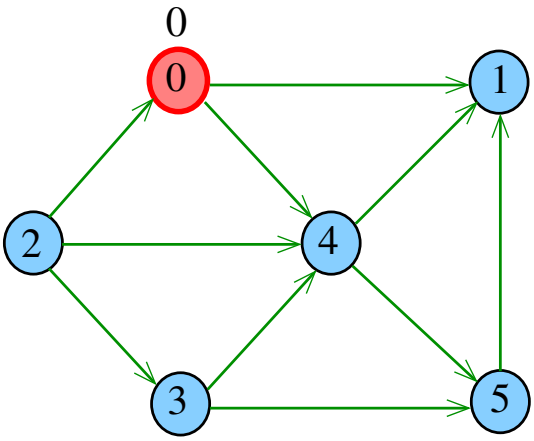
DFS(G)



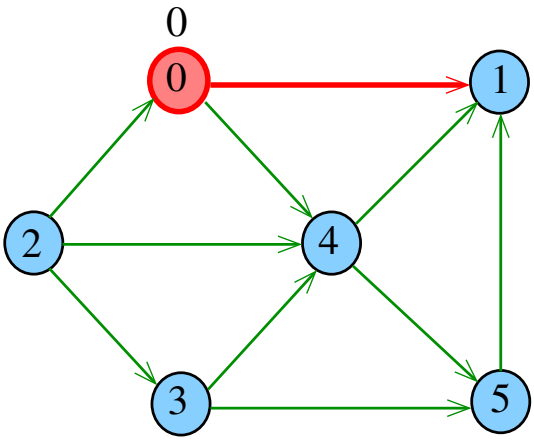
DFS(G)



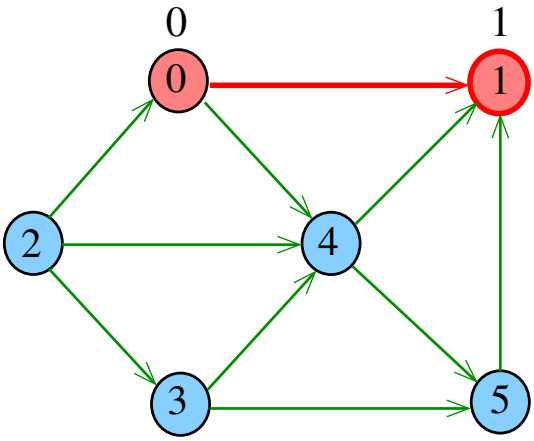
dfs(G,0)



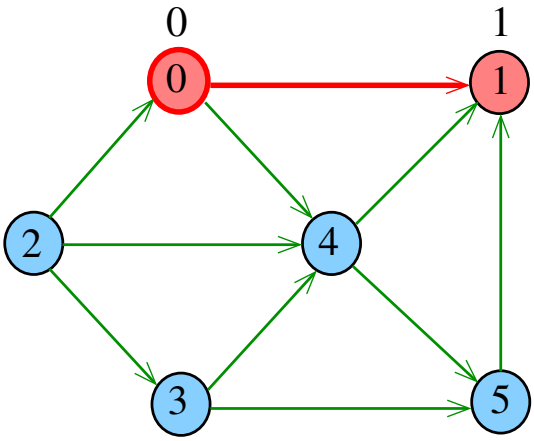
dfs(G,0)



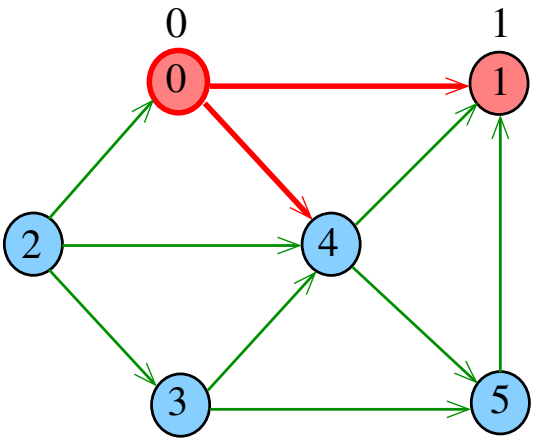
dfs(G,1)



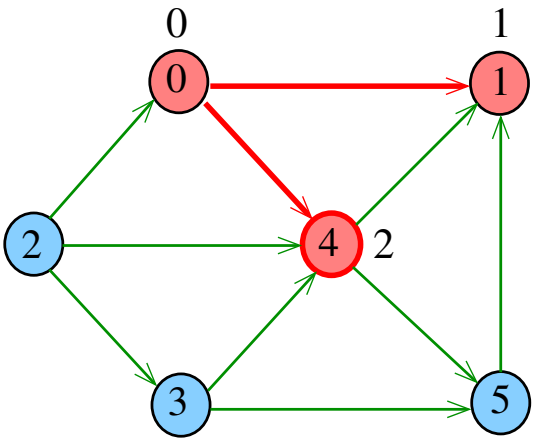
dfs(G,0)



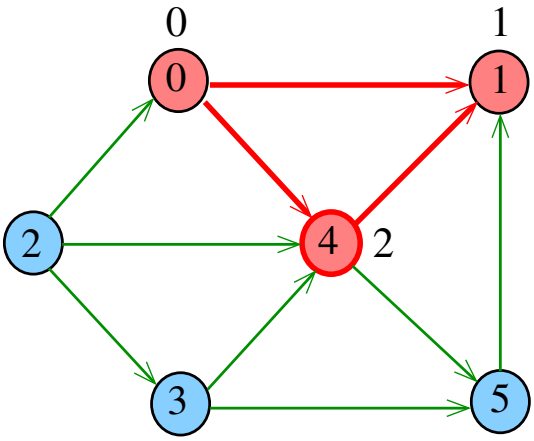
dfs(G,0)



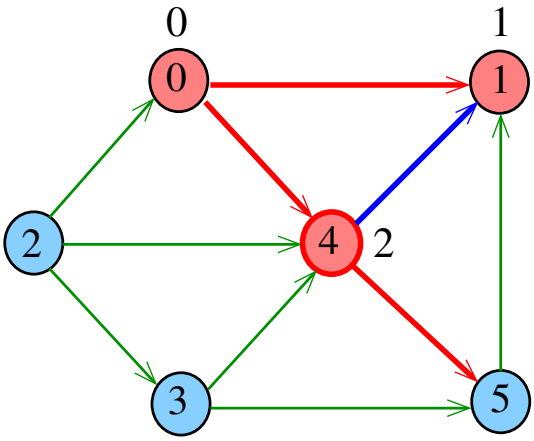
dfs(G,4)



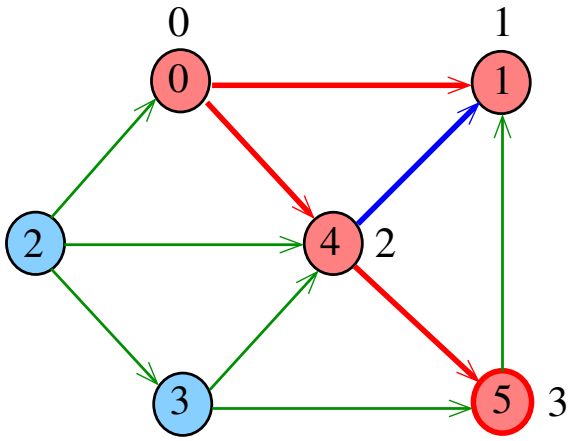
dfs(G,4)



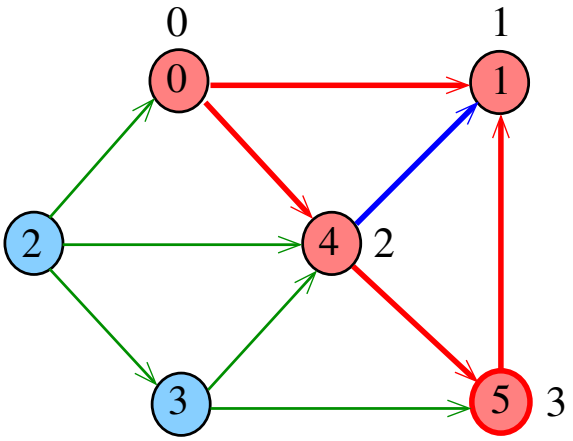
dfs(G,4)



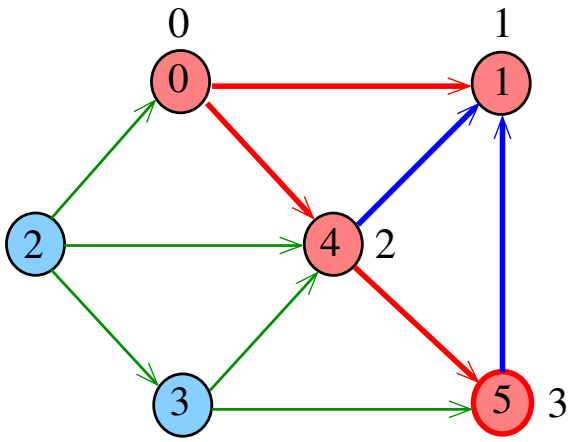
dfs(G,5)



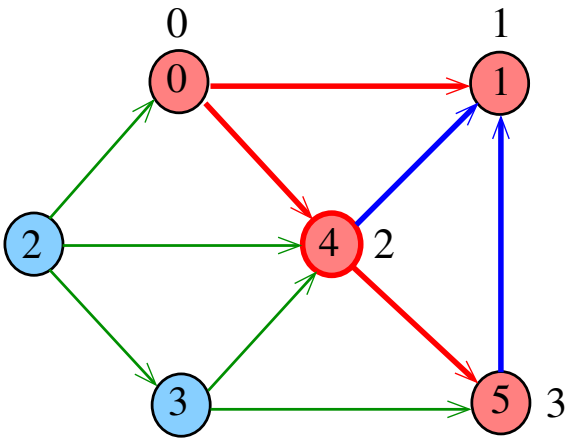
dfs(G,5)



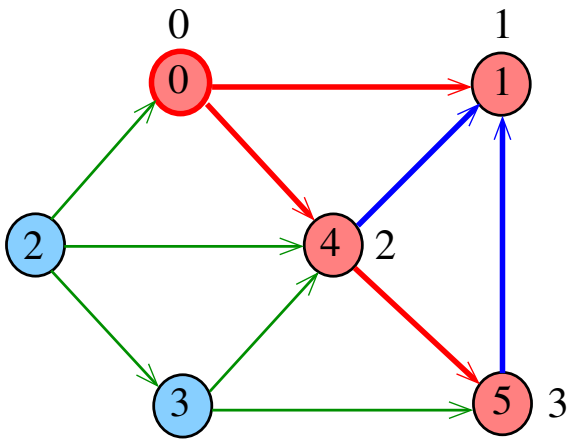
dfs(G,5)



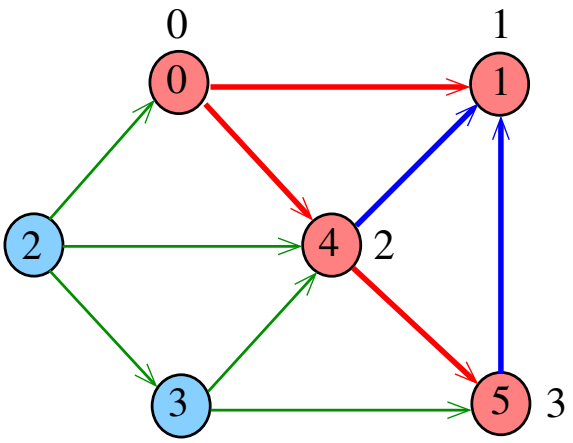
dfs(G,4)



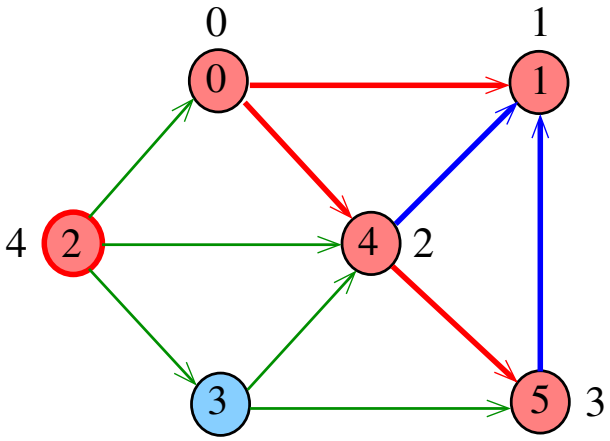
dfs(G,0)



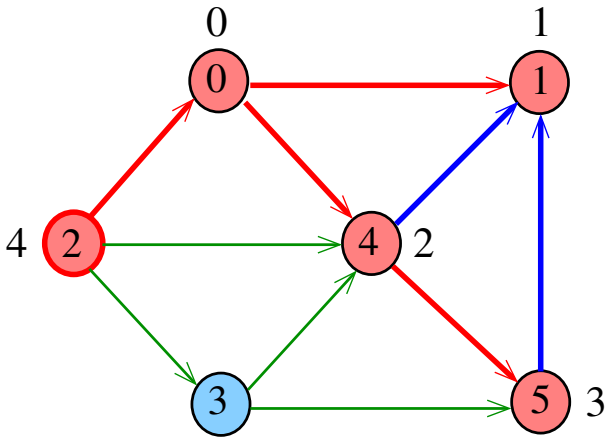
DIGRAPHdfs(G)



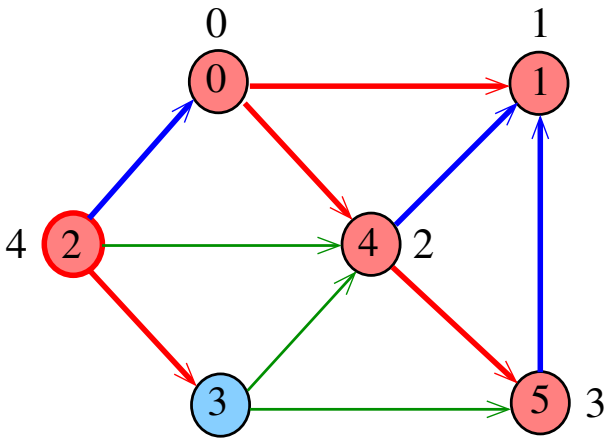
dfs(G,2)



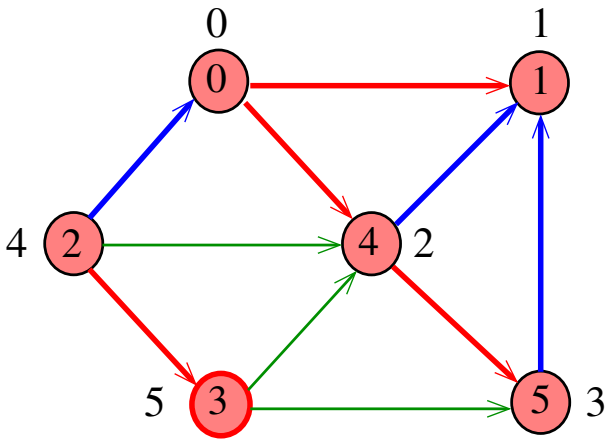
dfs(G,2)



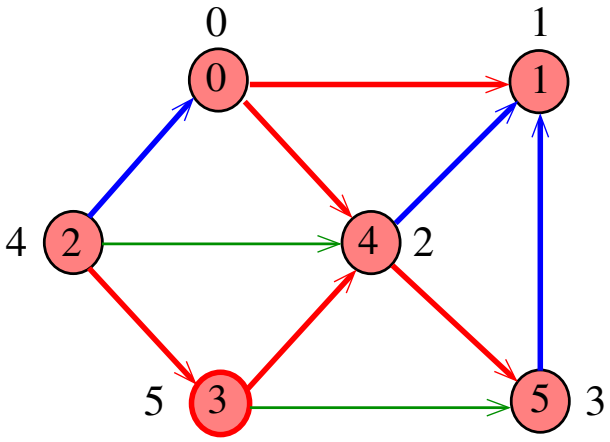
dfs(G,2)



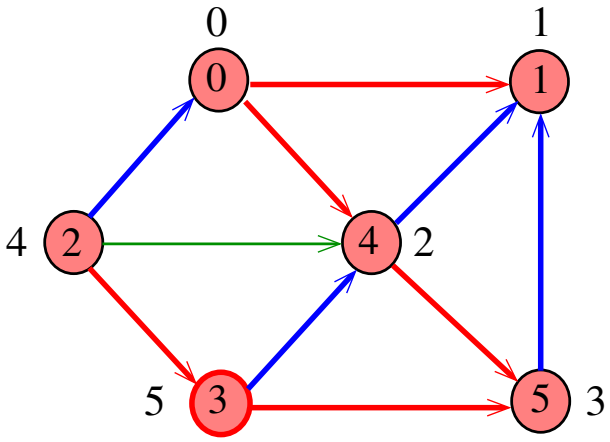
dfs(G,3)



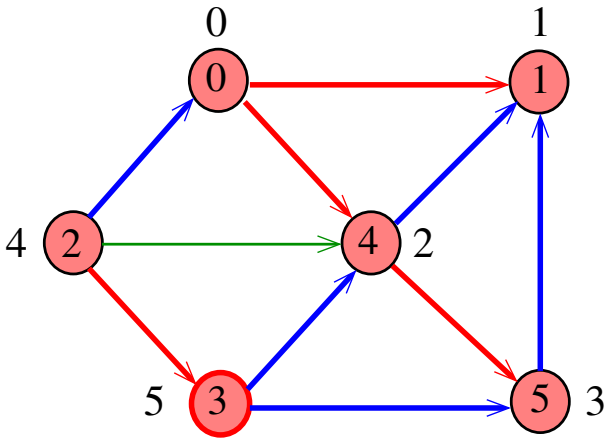
dfs(G,3)



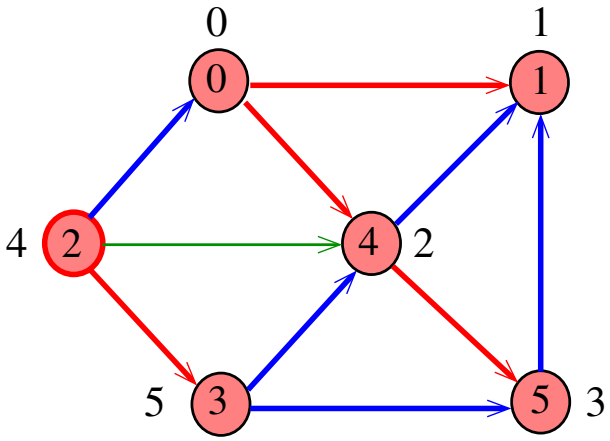
dfs(G,3)



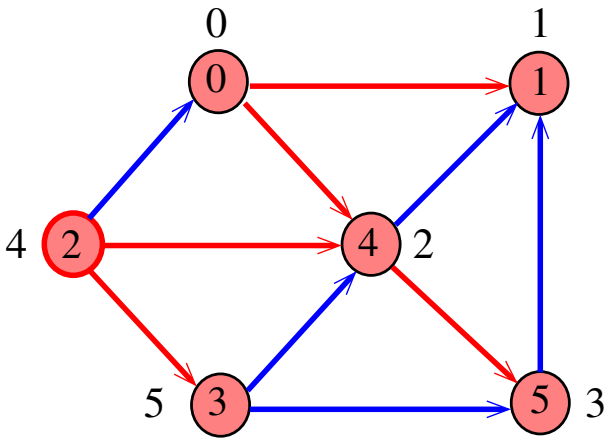
dfs(G,3)



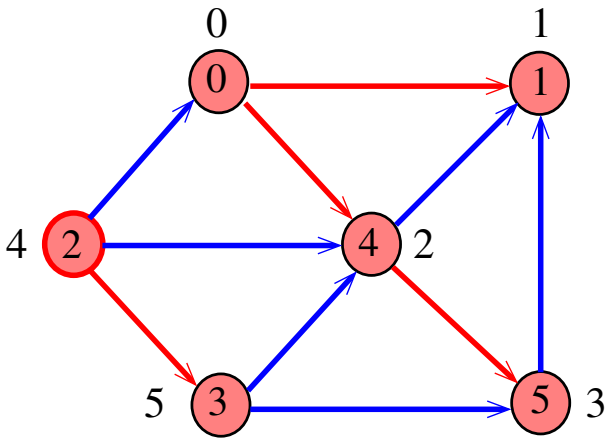
dfs(G,2)



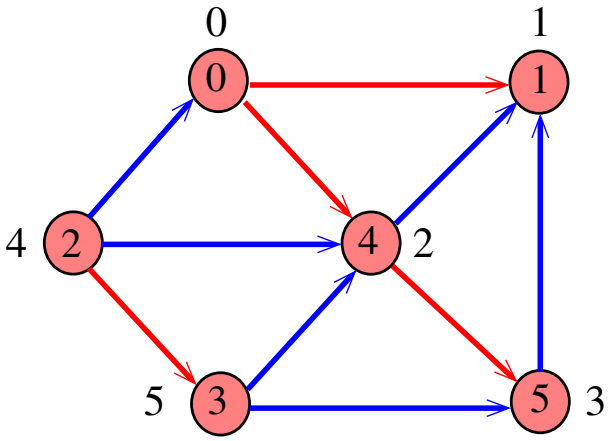
dfs(G,2)



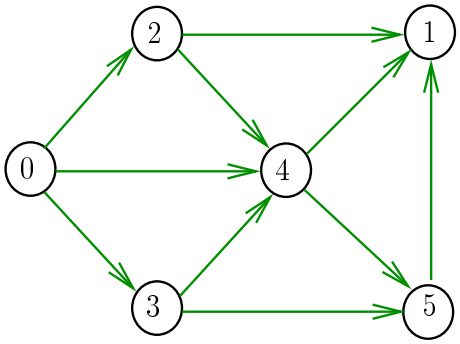
dfs(G,2)



DIGRAPHdfs(G)

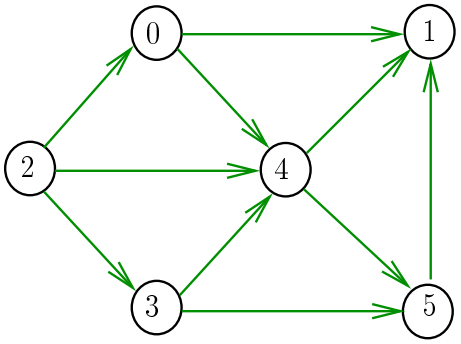


DFS(G)




```
dfs(G, 0)
  0-2 dfs(G,2)
    2-1 dfs(G,1)
    2-4 dfs(G,4)
      4-1
      4-5 dfs(G,5)
        5-1
  0-3 dfs(G,3)
    3-4
    3-5
  0-4
```

DFS(G)




```
dfs(G, 0)
  0-1 dfs(G, 1)
  0-4 dfs(G, 4)
    4-1
    4-5 dfs(G, 5)
      5-1
dfs(G, 2)
  2-0
  2-3 dfs(G, 3)
    3-4
    3-5
  2-4
```

Consumo de tempo

O consumo de tempo de DFS para vetor de listas de adjacência é $\Theta(V + E)$.

O consumo de tempo de DFS para matriz de adjacência é $\Theta(V^2)$.

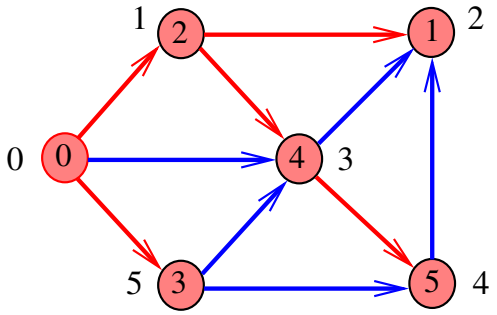
Arborescência de busca em profundidade

Classificação dos arcos

S 18.4 e 19.2
CLRS 22

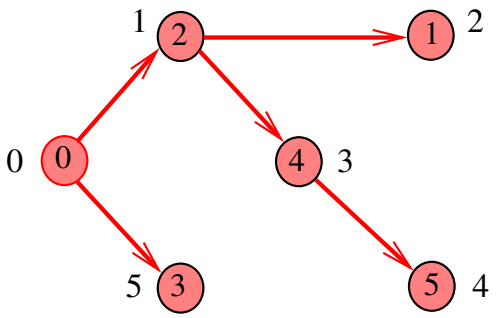
Arcos da arborescência

Arcos da arborescência são os arcos v-w que dfsR percorre para visitar w pela primeira vez
Exemplo: arcos em vermelho são arcos da arborescência



Arcos da arborescência

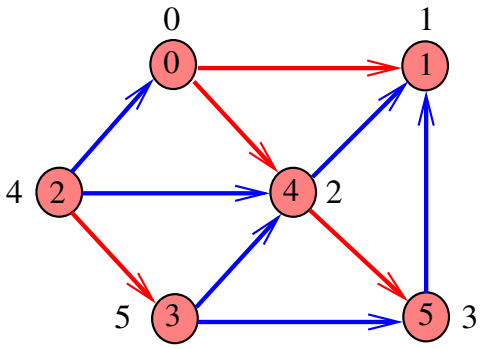
Arcos da arborescência são os arcos v-w que dfsR percorre para visitar w pela primeira vez
Exemplo: arcos em vermelho são arcos da arborescência



Floresta DFS

Conjunto de arborescências é a **floresta da busca em profundidade** (= *DFS forest*)

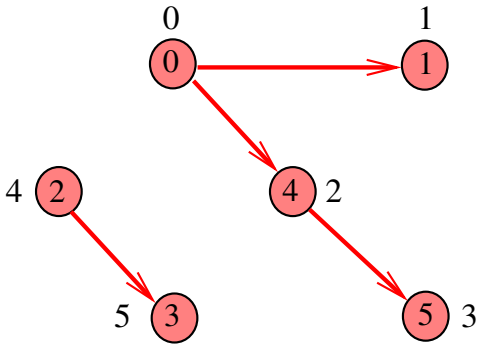
Exemplo: arcos em vermelho formam a floresta DFS



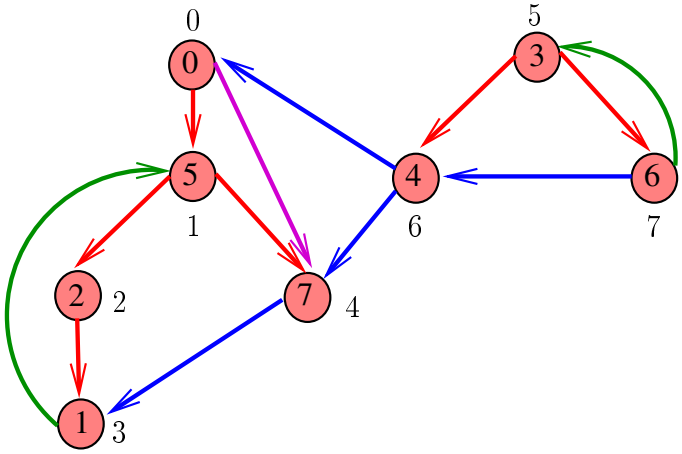
Floresta DFS

Conjunto de arborescências é a **floresta da busca em profundidade** (= *DFS forest*)

Exemplo: arcos em vermelho formam a floresta DFS

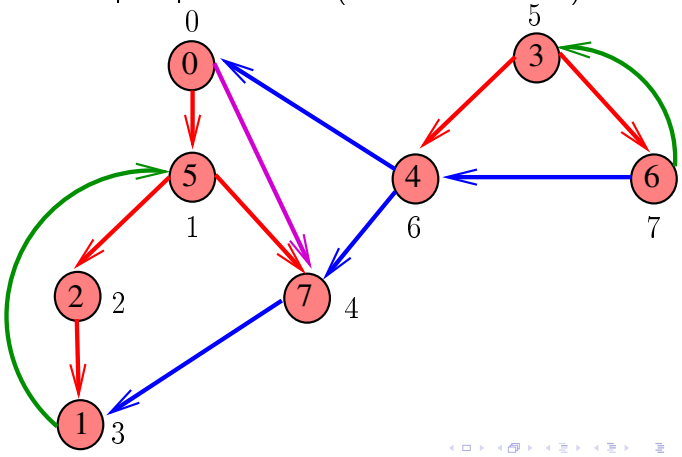


Classificação dos arcos



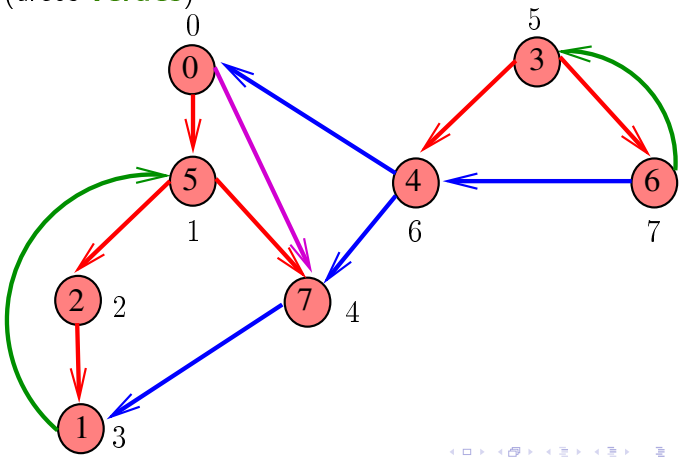
Arcos de arborescência

v-w é **arco de arborescência** se foi usado para visitar w pela primeira vez (arcos **vermelhos**)



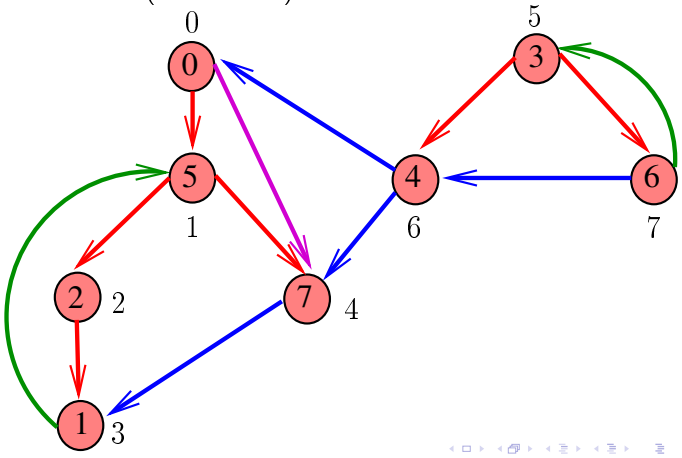
Arcos de retorno

v-w é **arco de retorno** se w é ancestral de v (arcos **verdes**)



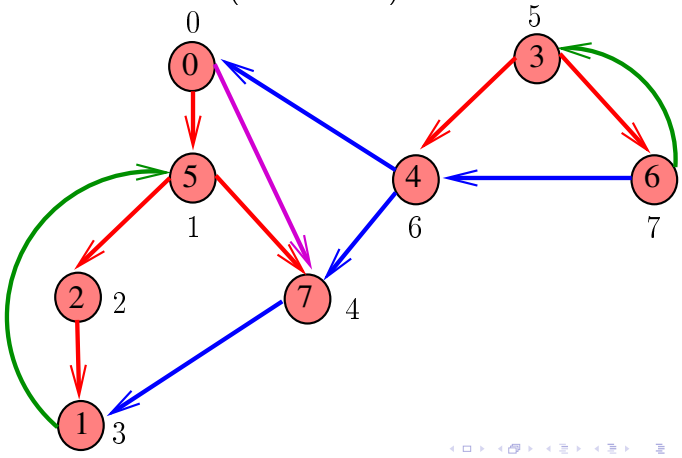
Arcos descendentes

v-w é **descendente** se w é descendente de v, mas não é filho (arco **roxo**)



Arcos cruzados

v-w é **arco cruzado** se w não é ancestral nem descendente de v (arcos **azuis**)



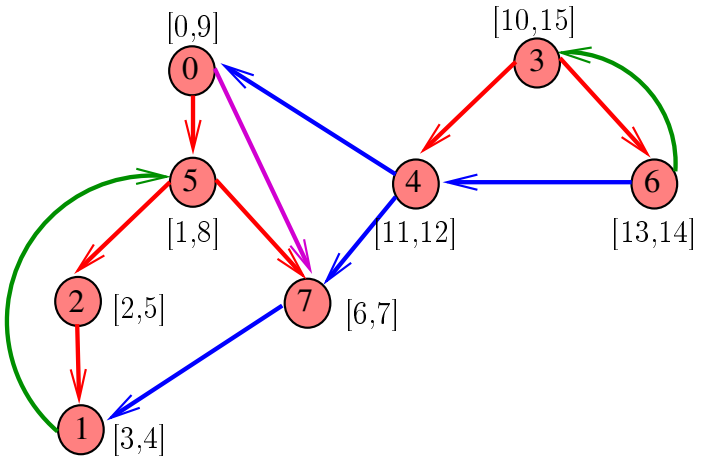
Busca DFS (CLRS)

Vamos supor que nossos digrafos têm no máximo `maxV` vértices

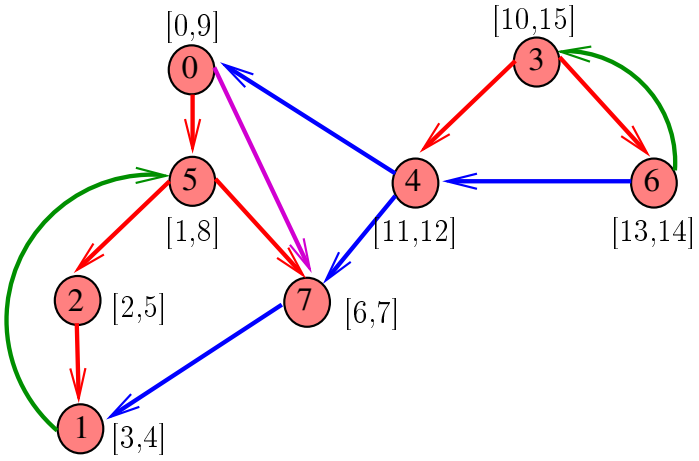
```
private int time;
private int[] d= new int[G.V()];
private int[] f= new int[G.V()];
```

`DIGRAPHdfs` visita todos os vértices e arcos do digrafo `G`.
A função registra em `d[v]` o 'momento' em que `v` foi descoberto e em `f[v]` o momento em que ele foi completamente examinado

Busca DFS (CLRS)

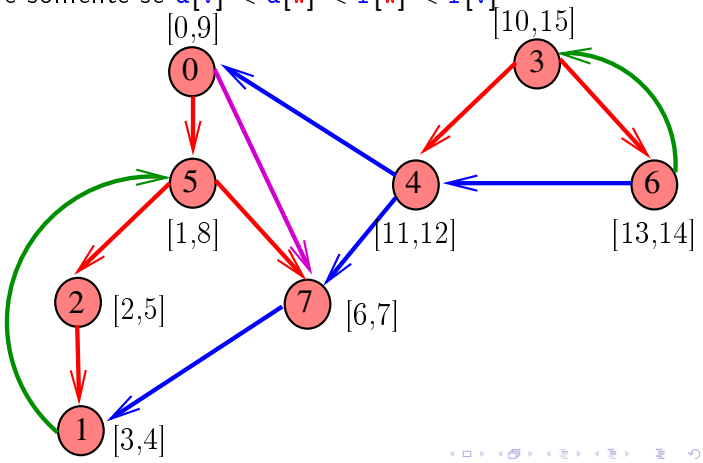


Classificação dos arcos



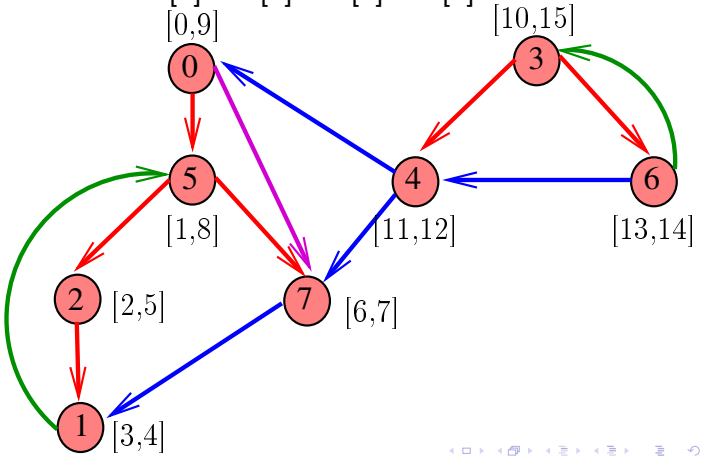
Arcos de arborescência ou descendentes

`v-w` é **arco de arborescência** ou **descendente** se e somente se $d[v] < d[w] < f[w] < f[v]$



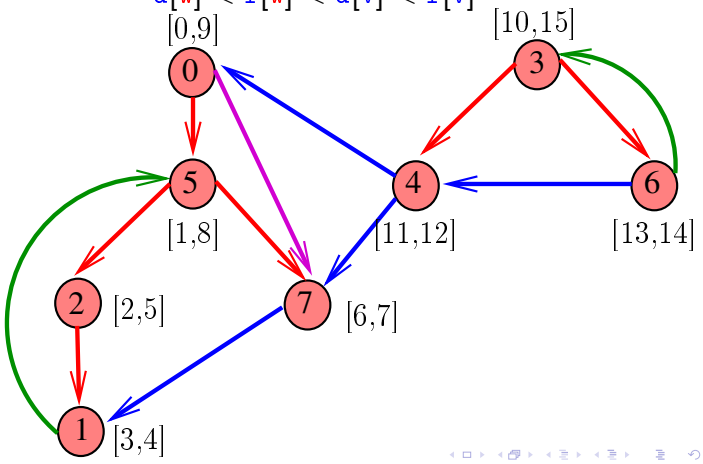
Arcos de retorno

`v-w` é **arco de retorno** se e somente se $d[w] < d[v] < f[v] < f[w]$



Arcos cruzados

`v-w` é arco **cruzado** se e somente se $d[w] < f[w] < d[v] < f[v]$



Conclusões

v-w é:

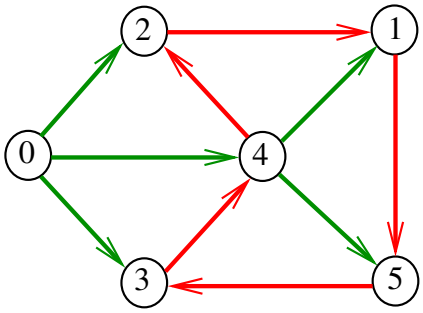
- **arco de arborescência** se e somente se $d[v] < d[w] < f[w] < f[v]$ e $edgeTo[w] = v$;
- **arco descendente** se e somente se $d[v] < d[w] < f[w] < f[v]$ e $edgeTo[w] \neq v$;
- **arco de retorno** se e somente se $d[w] < d[v] < f[v] < f[w]$;
- **arco cruzado** se e somente se $d[w] < f[w] < d[v] < f[v]$;

Ciclos em digrafos

Ciclos

Um **ciclo** num digrafo é qualquer seqüência da forma v_0–v_1–v_2–...–v_{k-1}–v_p, onde v_{k-1}-v_k é um arco para $k = 1, \ldots, p$ e $v_0 = v_p$.

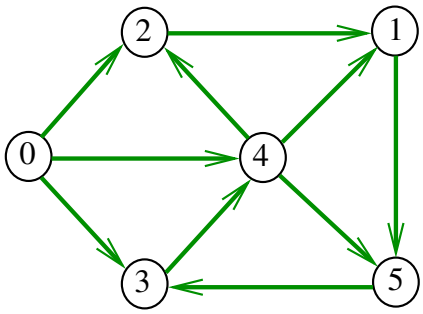
Exemplo: 2-1-5-3-4-2 é um ciclo



Procurando um ciclo

Problema: decidir se dado digrafo G possui um ciclo

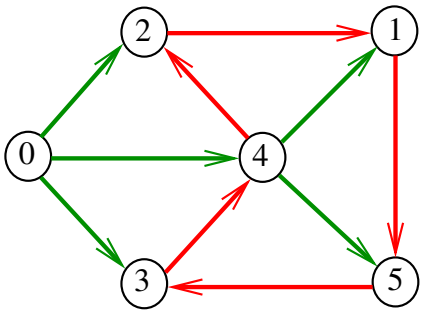
Exemplo: para o grafo a seguir a resposta é **SIM**



Procurando um ciclo

Problema: decidir se dado digrafo G possui um ciclo

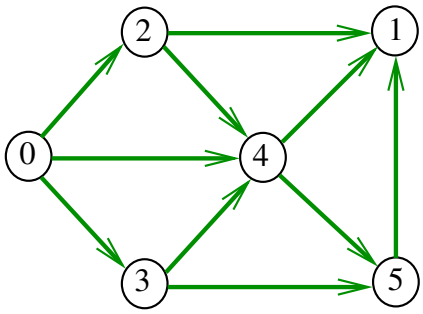
Exemplo: para o grafo a seguir a resposta é **SIM**



Procurando um ciclo

Problema: decidir se dado digrafo G possui um ciclo

Exemplo: para o grafo a seguir a resposta é **NÃO**



DirectedCycle café com leite

Recebe um digrafo `G` e decide se existe um ciclo.

Para cada arco `u-v` podemos fazer

```
DirectedDFS dfs = new DirectedDFS(G,
v);
```

e verificar se `dfs.hasPath(u)`

O consumo de tempo para vetor de listas de adjacência é $O(E\,(V+E))$.

DirectedCycle

Recebe um digrafo `G` e decide se existe um ciclo em `G`.

public `DirectedCycle (Digraph G);`

O algoritmo tem por base a seguinte observação: em relação a **qualquer** floresta de busca em profundidade,

todo *arco de* ***retorno*** *pertence a um ciclo e* ***todo*** *ciclo tem um arco de* ***retorno***

DirectedCycle

vértices no caminho ativo

```
private boolean[] onPath;
```

ciclo

```
private Stack<Integer> cycle;
```

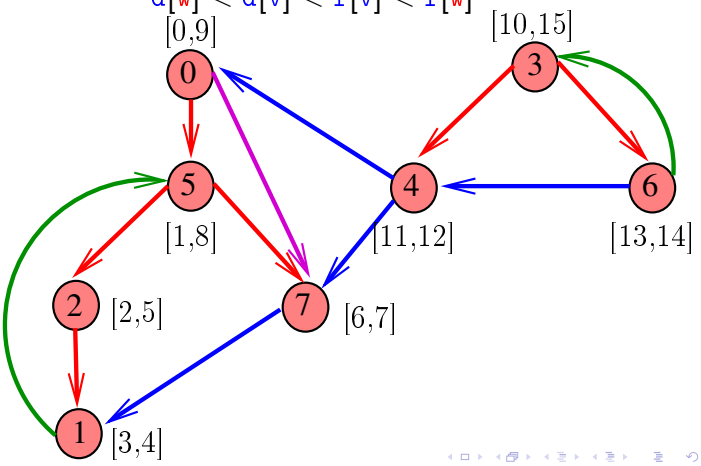
vértice no caminho

```
private int onCycle = -1;
```

Arcos de retorno

`v-w` é **arco de retorno** se e somente se

$d[w] < d[v] < f[v] < f[w]$



Consumo de tempo

O consumo de tempo de `DirectedCycle` para vetor de listas de adjacência é $O(V+E)$.

O consumo de tempo da função `Directedcycle` para matriz de adjacência é $O(V^2)$.

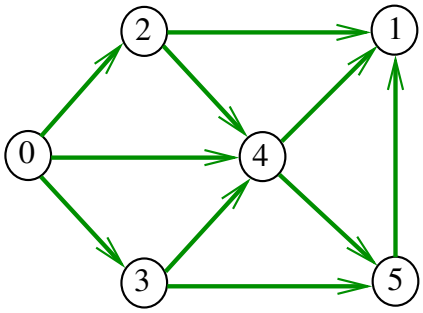
Digrafos acíclicos (DAGs)

S 19.5 e 19.6

DAGs

Um digrafo é **acíclico** se não tem ciclos
Digrafos acíclicos também são conhecidos como DAGs (= *directed acyclic graphs*)

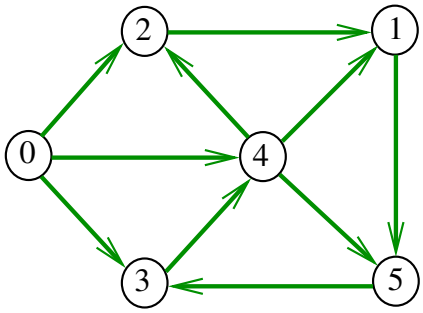
Exemplo: um digrafo acíclico



DAGs

Um digrafo é **acíclico** se não tem ciclos
Digrafos acíclicos também são conhecidos como DAGs (= *directed acyclic graphs*)

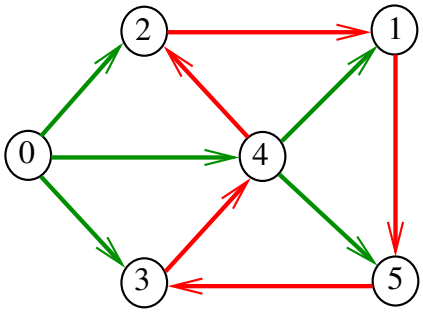
Exemplo: um digrafo que **não** é acíclico



DAGs

Um digrafo é **acíclico** se não tem ciclos
Digrafos acíclicos também são conhecidos como DAGs (= *directed acyclic graphs*)

Exemplo: um digrafo que **não** é acíclico



Ordenaçao topológica

Uma **permutação** dos vértices de um digrafo é uma seqüência em que cada vértice aparece uma e uma só vez

Uma **ordenação topológica** (= *topological sorting*) de um digrafo é uma permutação

`ts[0], ts[1],..., ts[V-1]`

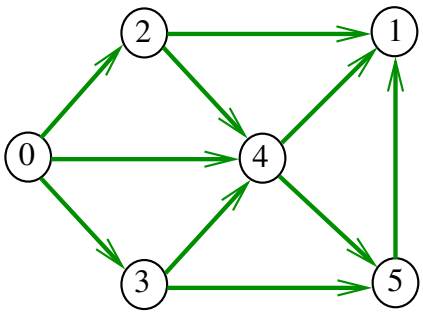
dos seus vértices tal que todo arco tem a forma

`ts[i]-ts[j]` com `i < j`

`ts[0]` é necessariamente uma **fonte**
`ts[V-1]` é necessariamente um **sorvedouro**

Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



DAGs versus ordenação topológica

É evidente que digrafos com ciclos **não** admitem ordenação topológica.

É menos evidente que **todo** DAG admite ordenação topológica.

A prova desse fato é um algoritmo que recebe qualquer digrafo e devolve

- um ciclo;
- uma ordenação topológica do digrafo.

Algoritmos de ordenação topológica

S 19.6

Algoritmo de eliminação de fontes

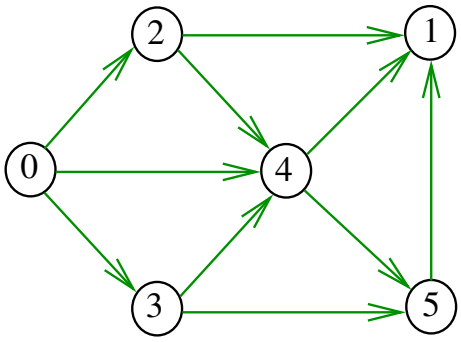
Armazena em `ts[0 . . i-1]` uma permutação de um subconjunto do conjunto de vértices de `G` e devolve o valor de `i`

Se `i` = `G->V` então `ts[0 . . i-1]` é uma ordenação topológica de `G`.
Caso contrário, `G` **não** é um DAG

```
int DAGts1 (Digraph G, Vertex ts[]);
```

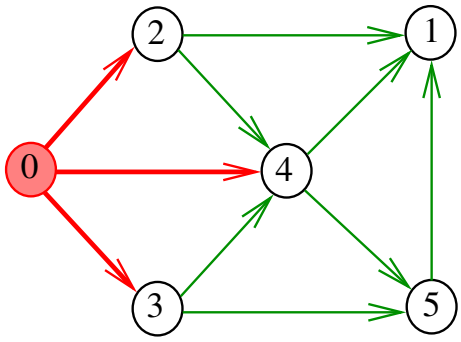
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						



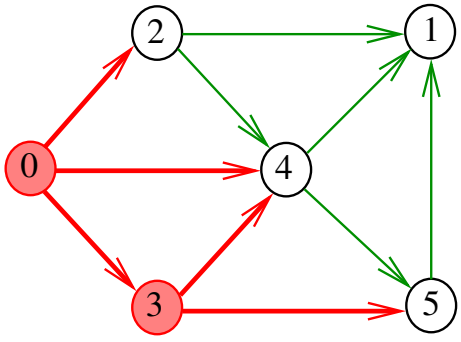
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0					



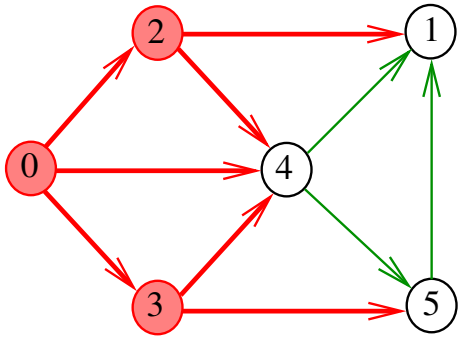
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3				



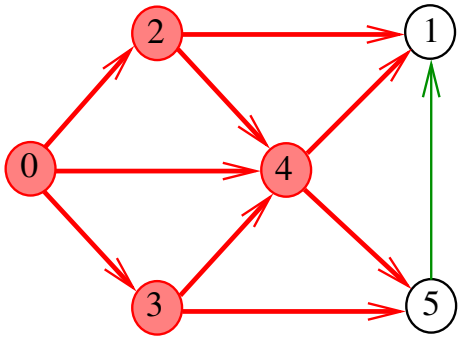
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2			



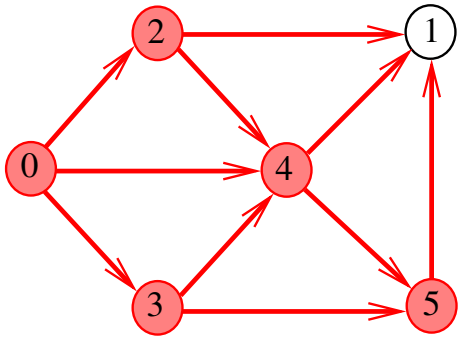
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4		



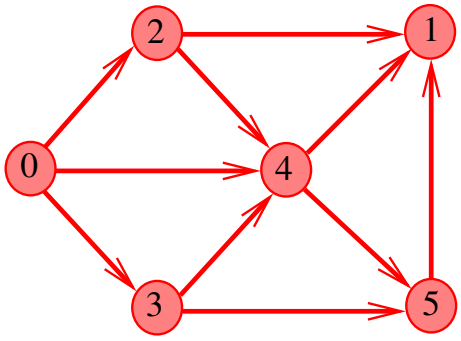
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	



Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



Consumo de tempo

O consumo de tempo dessa algoritmo para vetor de listas de adjacência é $O(V + A)$.

Algoritmos de ordenação topológica

S 19.6

Algoritmo DFS

Recebe um DAG `G` e armazena em `ts[0..V-1]` uma ordenação topológica de `G`

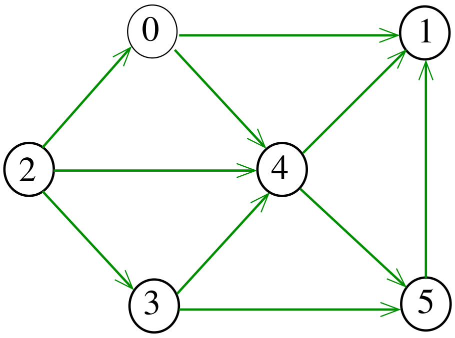
```
public Topological (Digraph G);
```

ordem topológica dos vértices

```
privateStack<Integer> reversedPost;
```

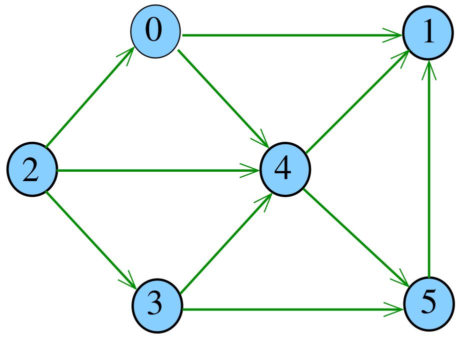
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						



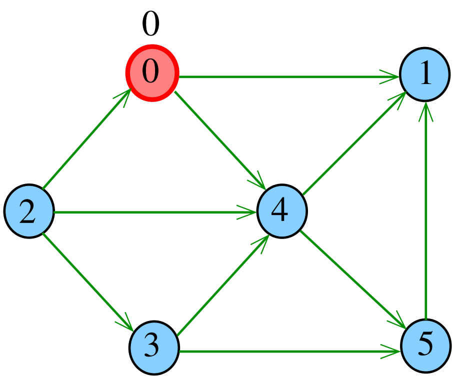
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						



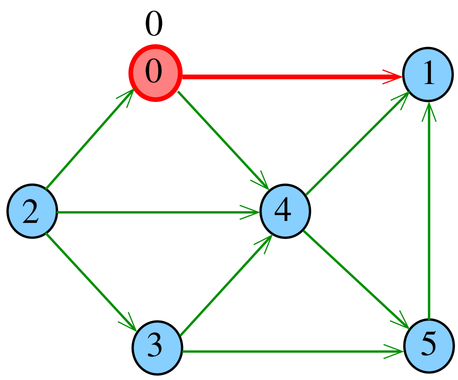
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						



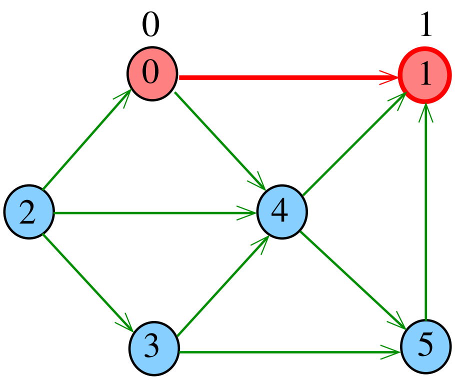
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						



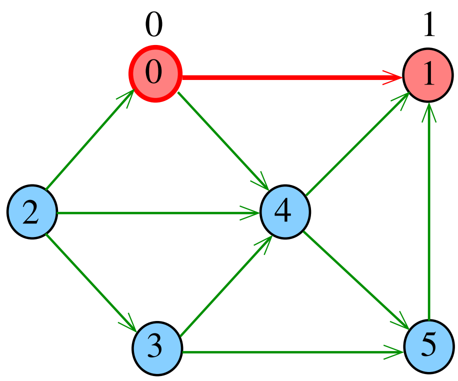
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						



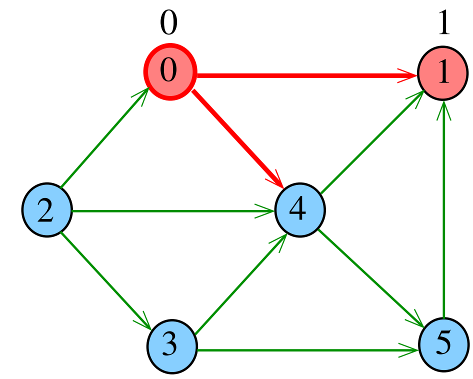
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



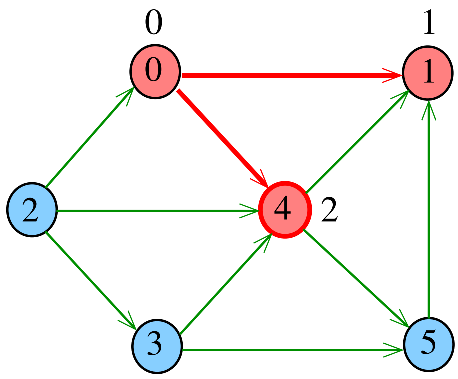
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



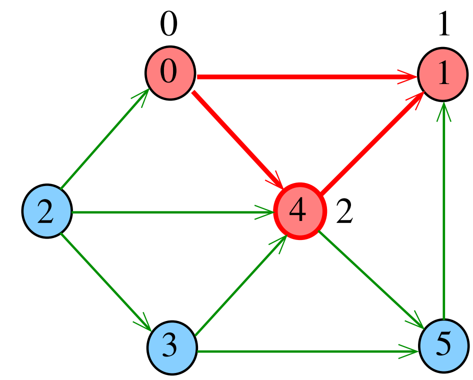
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



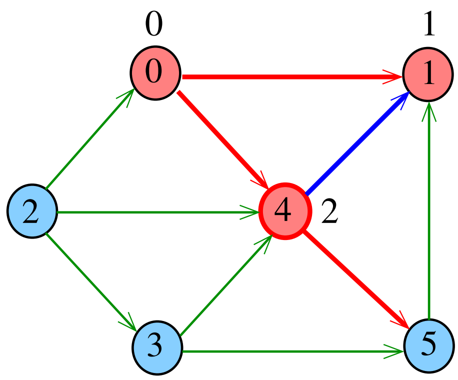
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



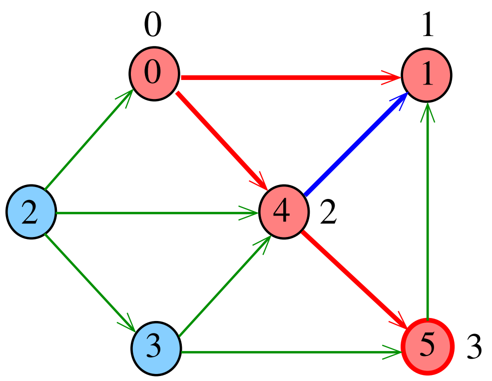
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



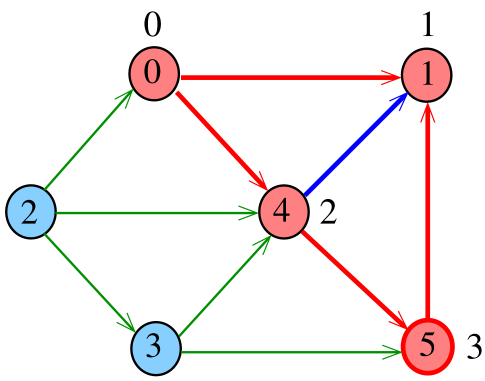
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



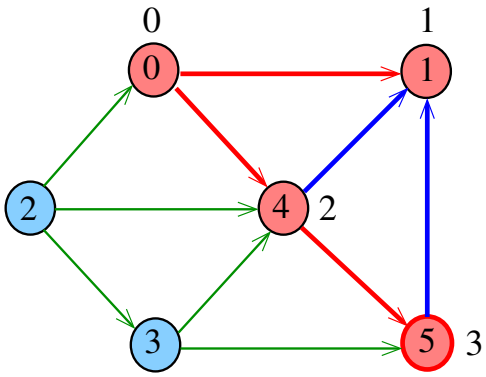
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



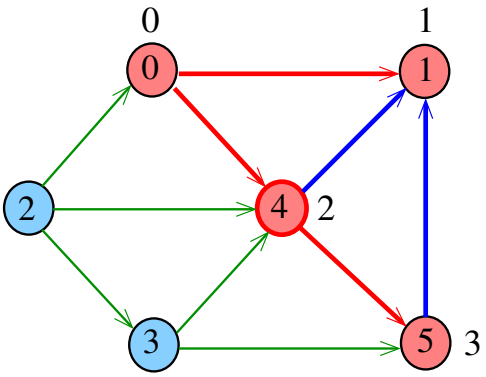
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



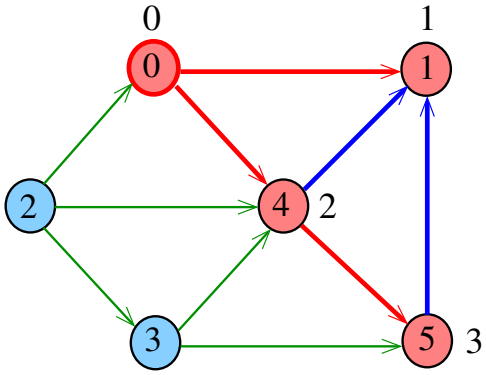
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]					5	1



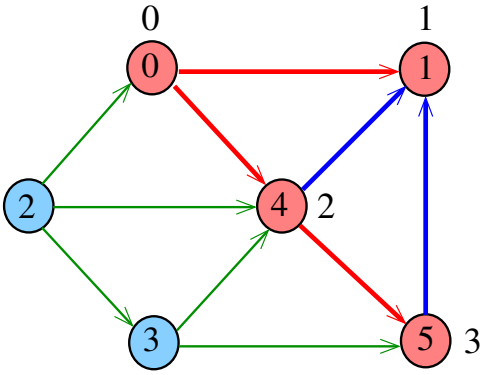
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]				4	5	1



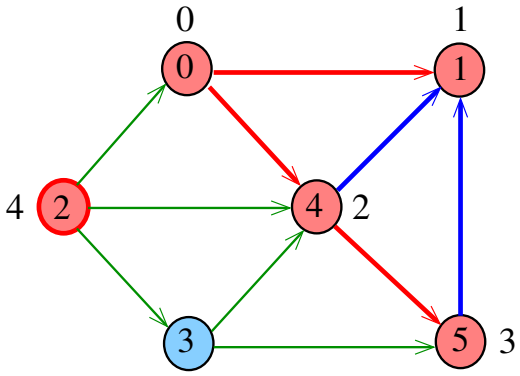
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



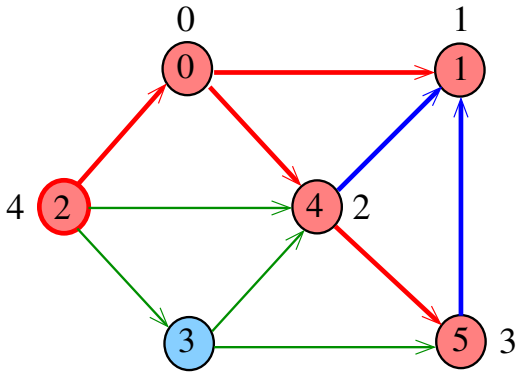
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



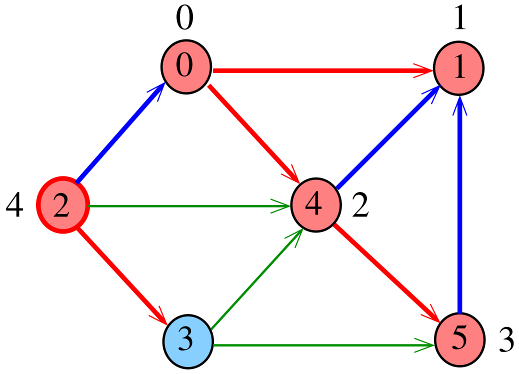
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



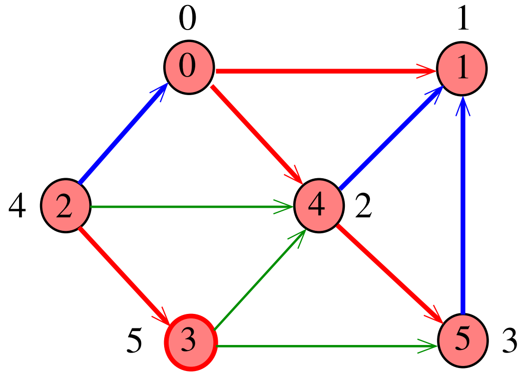
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



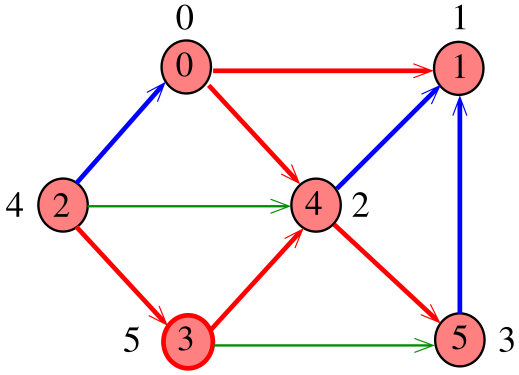
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



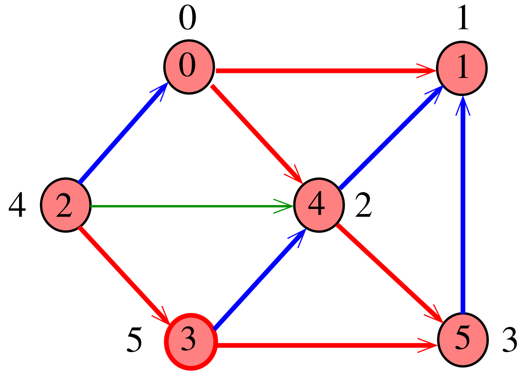
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



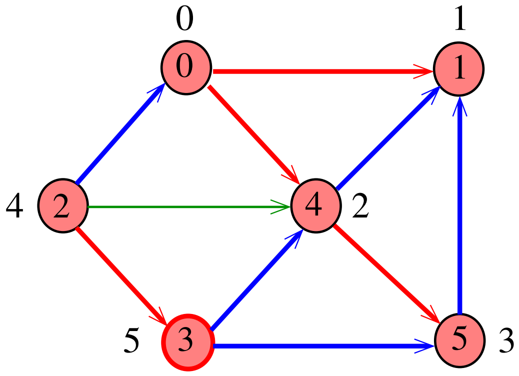
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



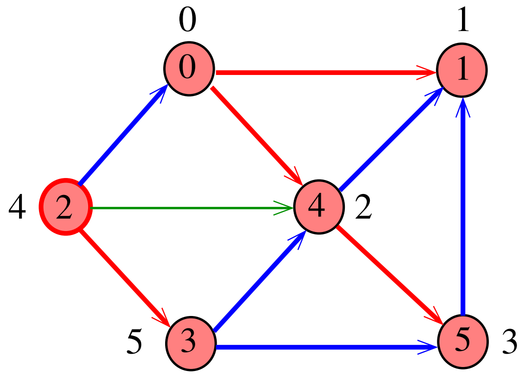
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



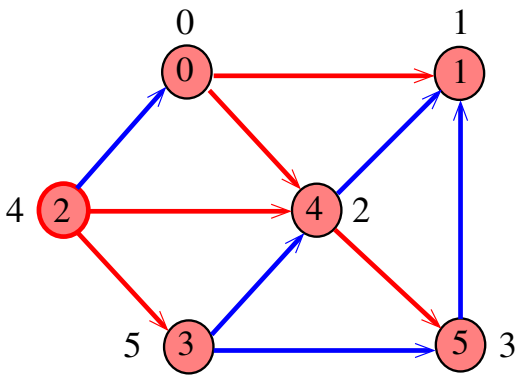
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]		3	0	4	5	1



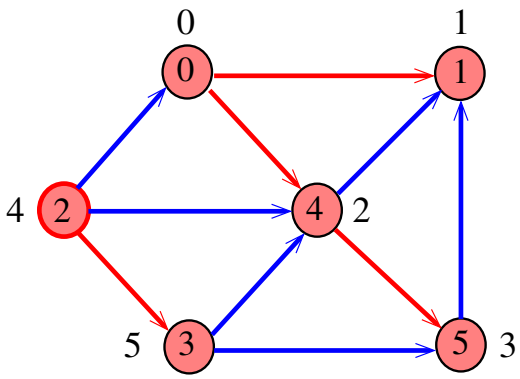
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]		3	0	4	5	1



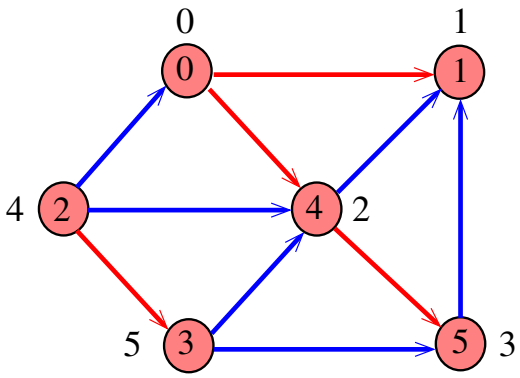
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]		3	0	4	5	1



Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	2	3	0	4	5	1



Consumo de tempo

O consumo de tempo de `Topological` para vetor de listas de adjacência é $O(V + E)$.

O consumo de tempo de `Topological` para matriz de adjacência é $O(V^2)$.

Conclusão

Para todo digrafo `G`, vale uma e apenas umas das seguintes afirmações:

- `G` possui um ciclo
- `G` é um DAG e, portanto, admite uma ordenação topológica