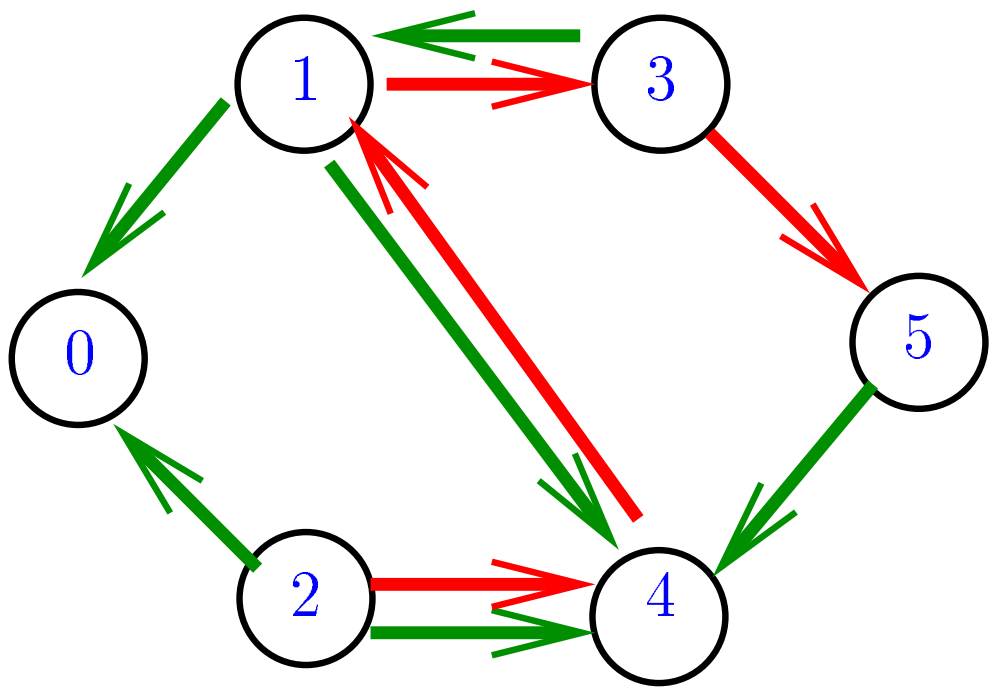
Melhores momentos

AULA 18

Distância

A **distância** de um vértice `s` a um vértice `t` é o menor comprimento de um caminho de `s` a `t`. Se não existe caminho de `s` a `t` a distância é **infinita**

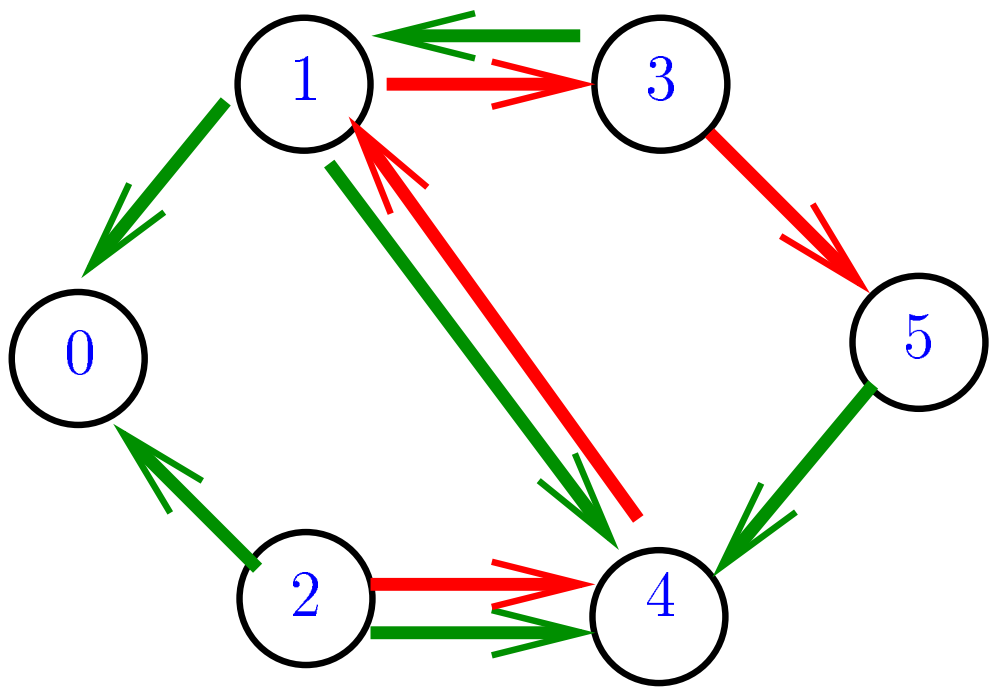
Exemplo: a distância de 2 a 5 é 4



Distância

A **distância** de um vértice `s` a um vértice `t` é o menor comprimento de um caminho de `s` a `t`. Se não existe caminho de `s` a `t` a distância é **infinita**

Exemplo: a distância de 0 a 2 é infinita

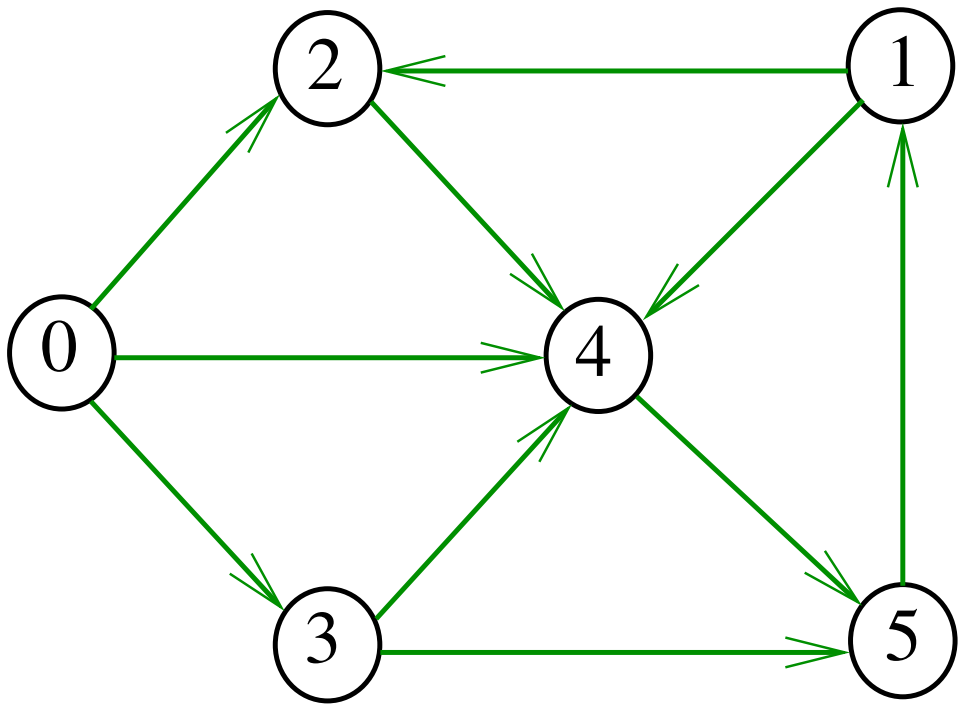


Calculando distâncias

Problema: dados um digrafo `G` e um vértice `s`, determinar a distância de `s` aos demais vértices do digrafo

Exemplo: para `s` = 0

`v`	0	1	2	3	4	5
`distTo[v]`	0	3	1	1	1	2



Busca em largura

A **busca em largura** (=*breadth-first search search* = *BFS*) começa por um vértice, digamos `s`, especificado pelo usuário.

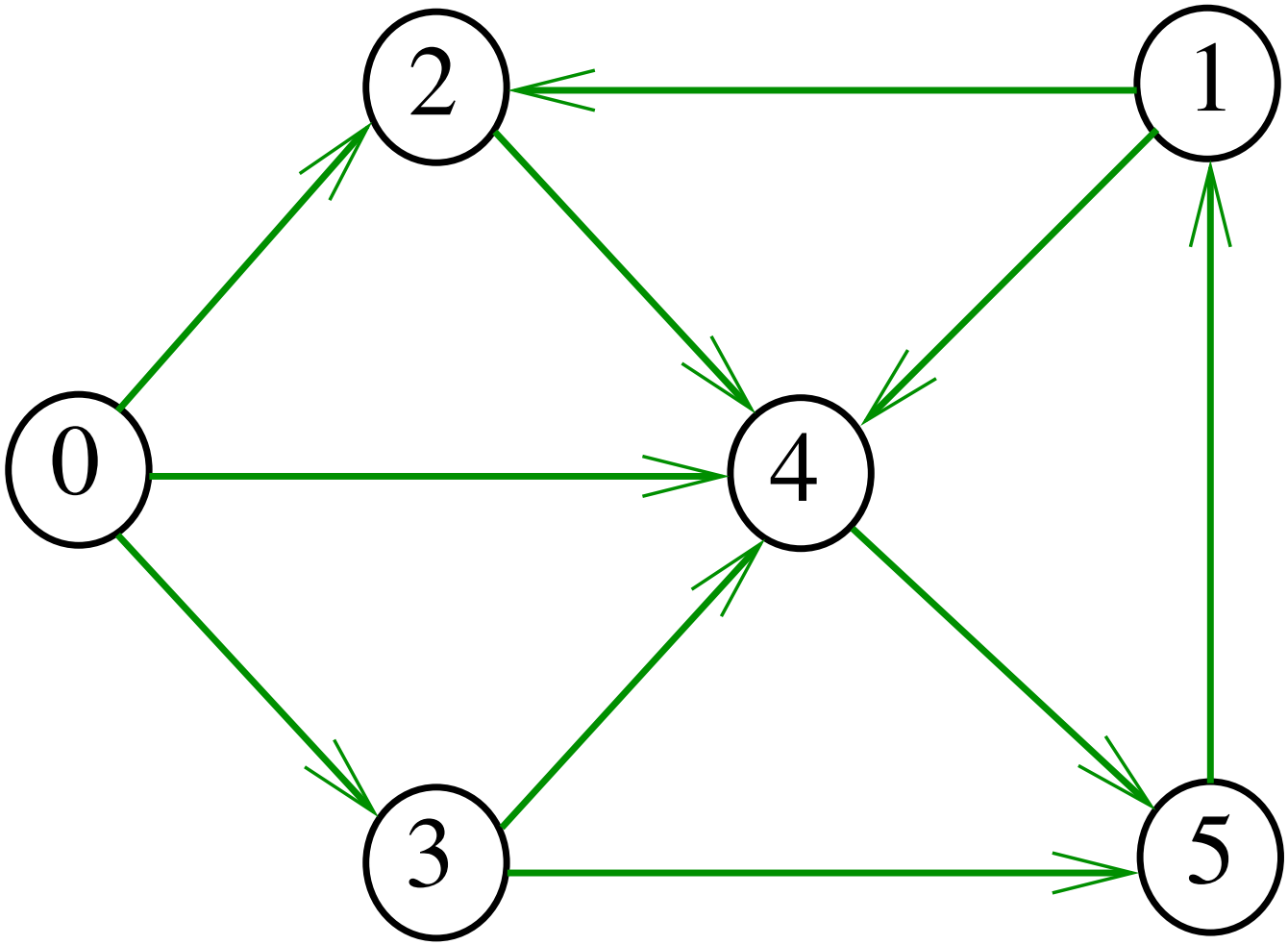
O algoritmo

visita `s`,
depois visita vértices à distância 1 de `s`,
depois visita vértices à distância 2 de `s`,
depois visita vértices à distância 3 de `s`,
e assim por diante

Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]						

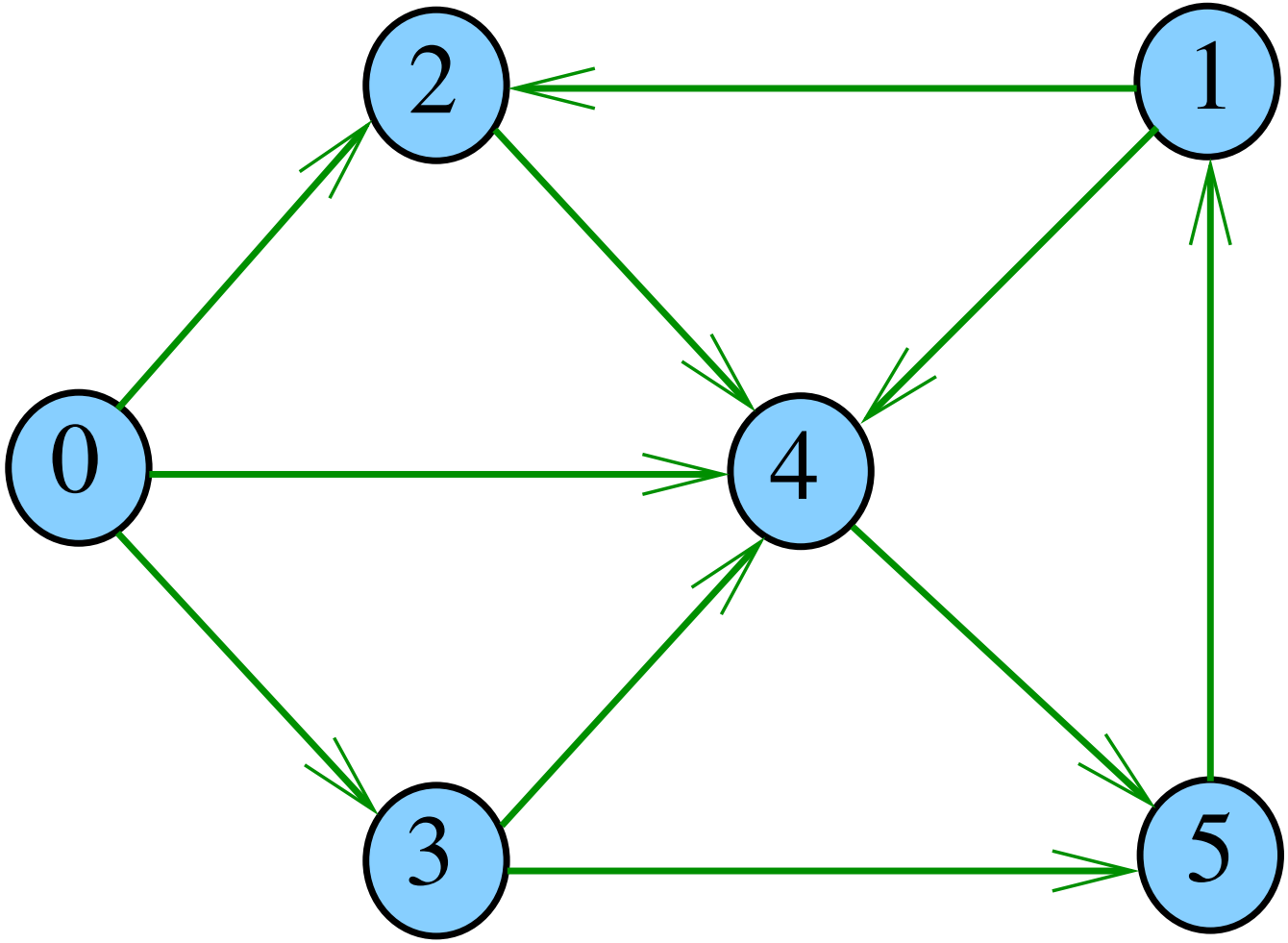
v	0	1	2	3	4	5
distTo[v]						



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]						

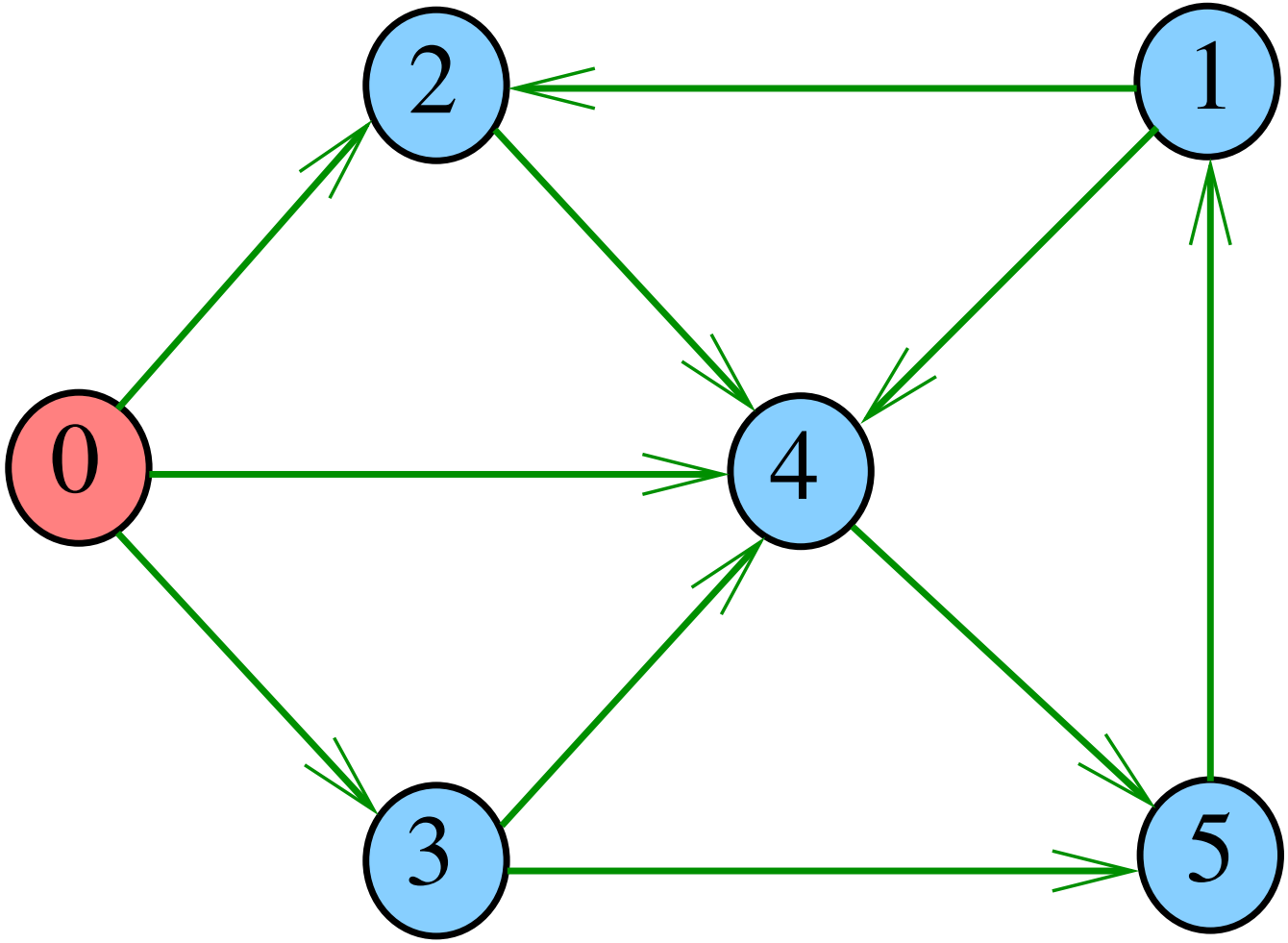
v	0	1	2	3	4	5
distTo[v]	6	6	6	6	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0					

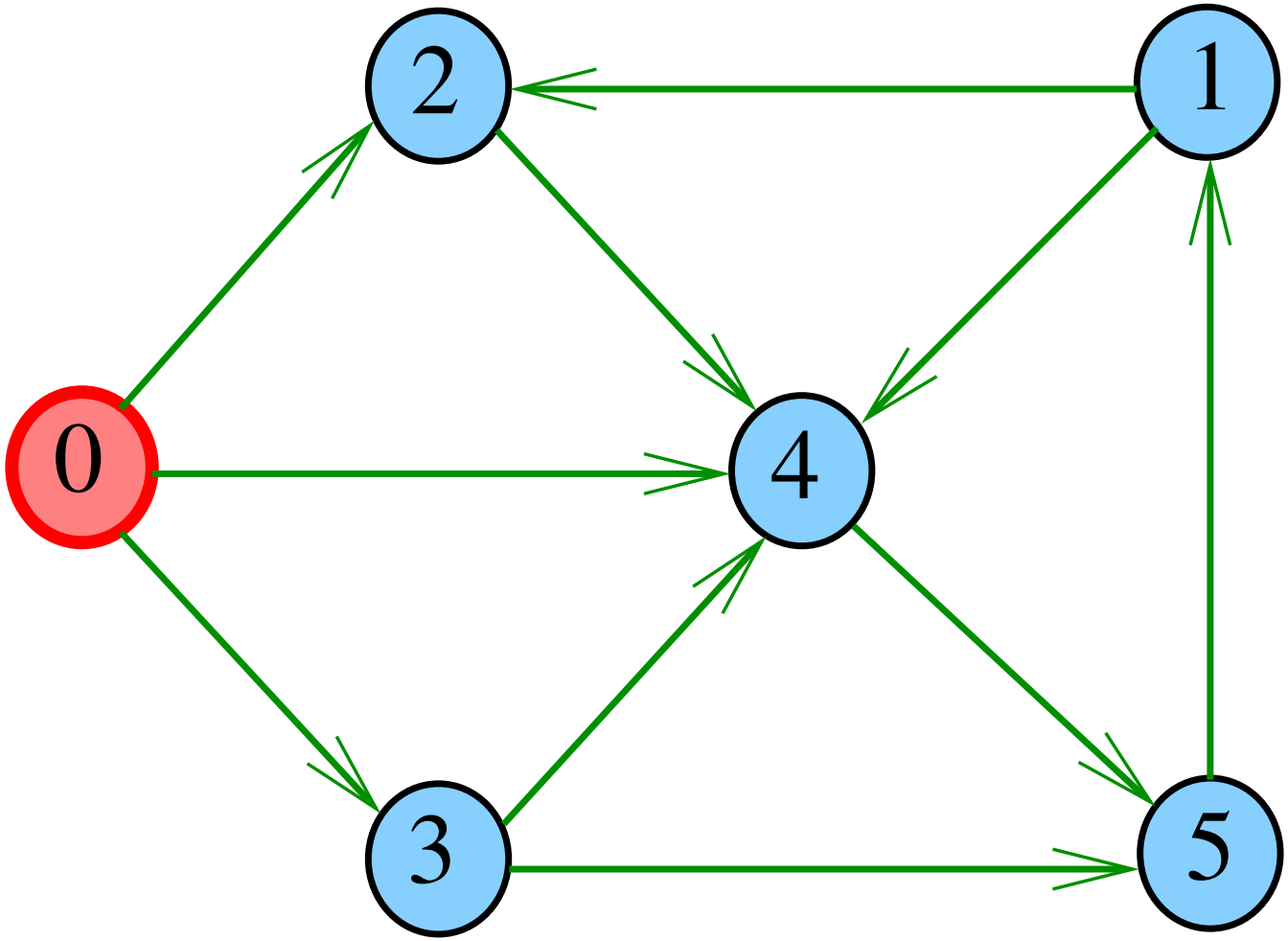
v	0	1	2	3	4	5
distTo[v]	6	6	6	6	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	**0**					

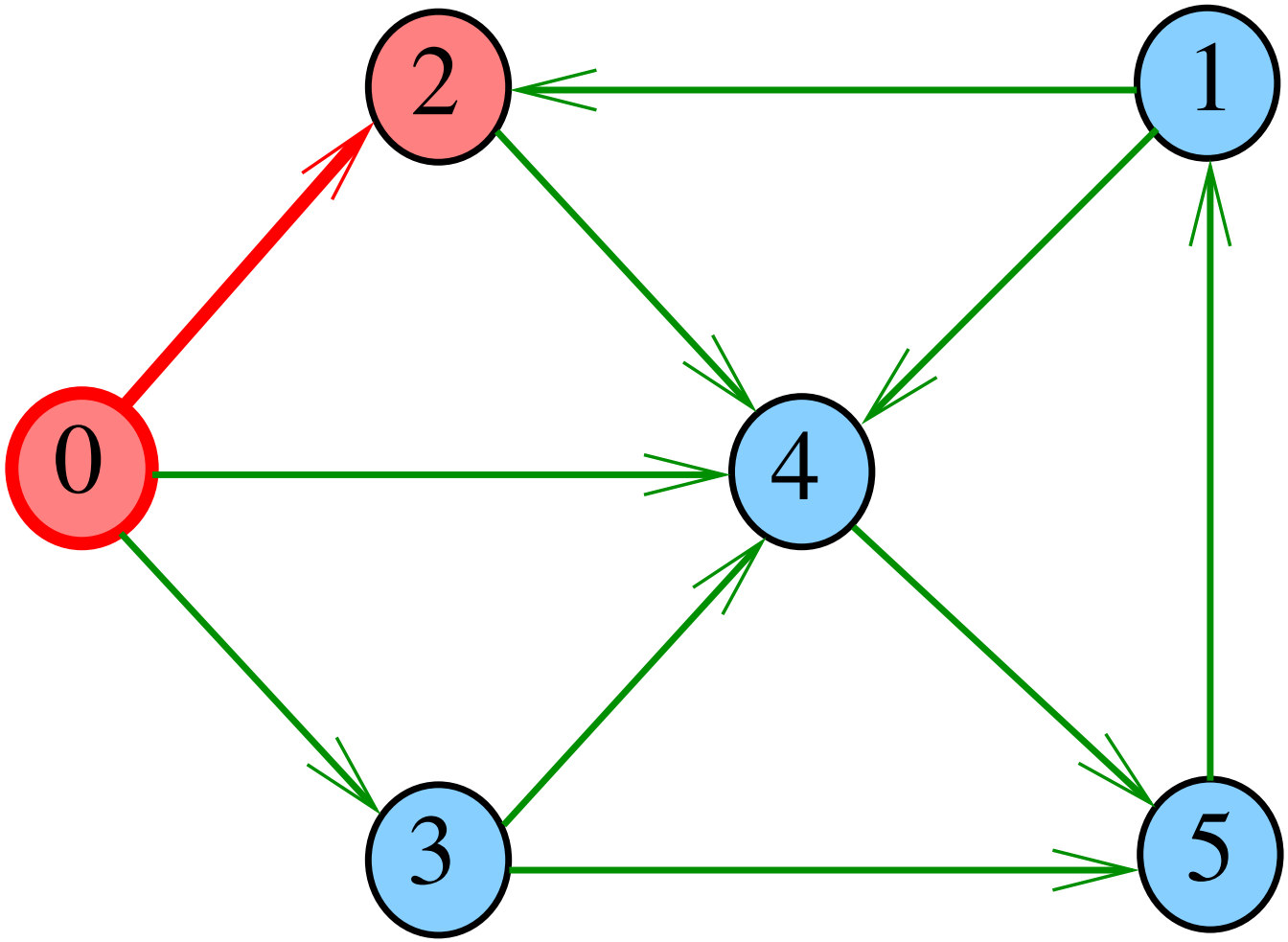
v	0	1	2	3	4	5
distTo[v]	**0**	6	6	6	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	**0**	2				

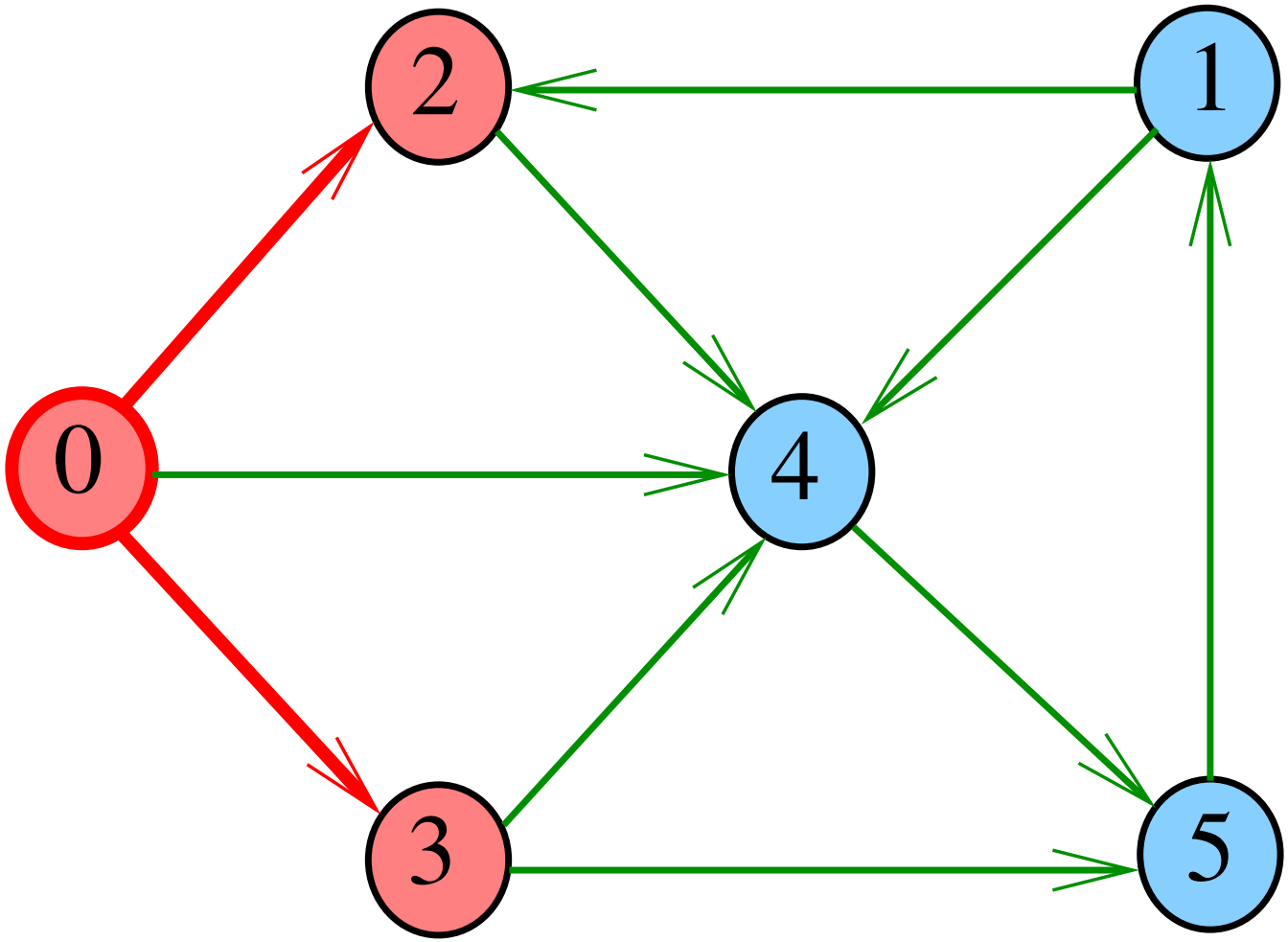
v	0	1	2	3	4	5
distTo[v]	0	6	**1**	6	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	**0**		**2**	**3**		

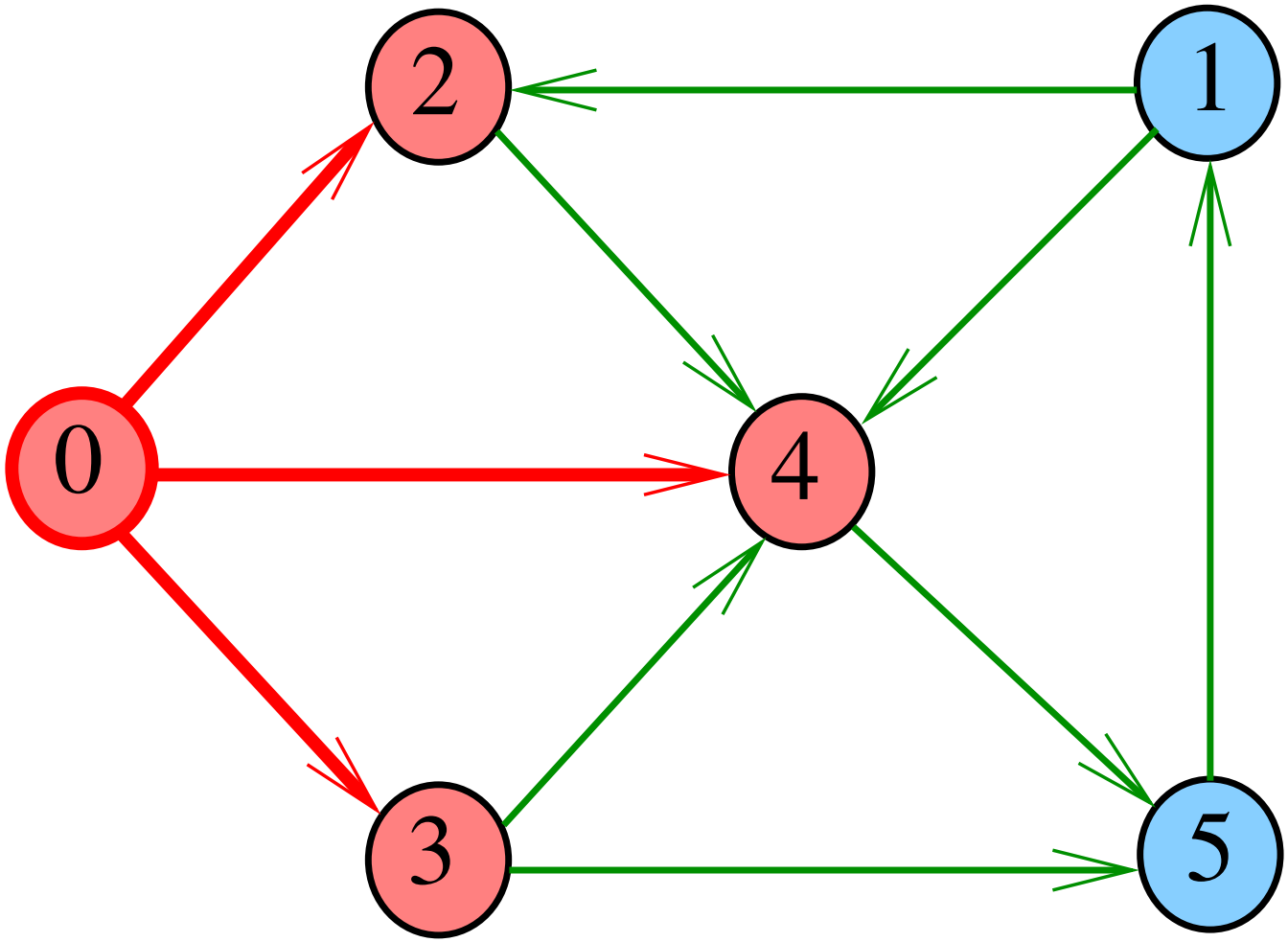
v	0	1	2	3	4	5
distTo[v]	0	6	1	**1**	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	**0**		**2**	**3**	**4**	

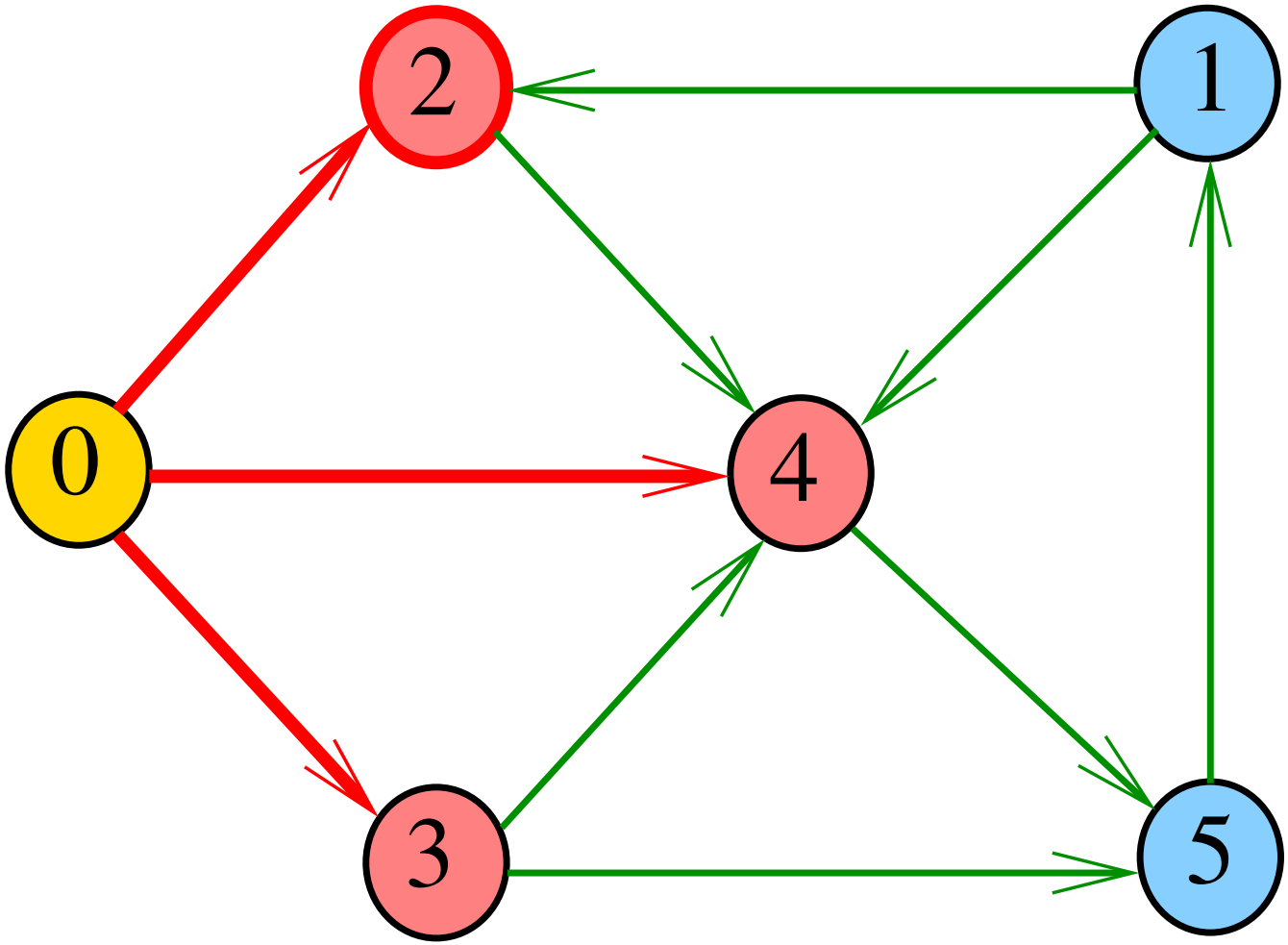
v	0	1	2	3	4	5
distTo[v]	0	6	1	1	**1**	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		

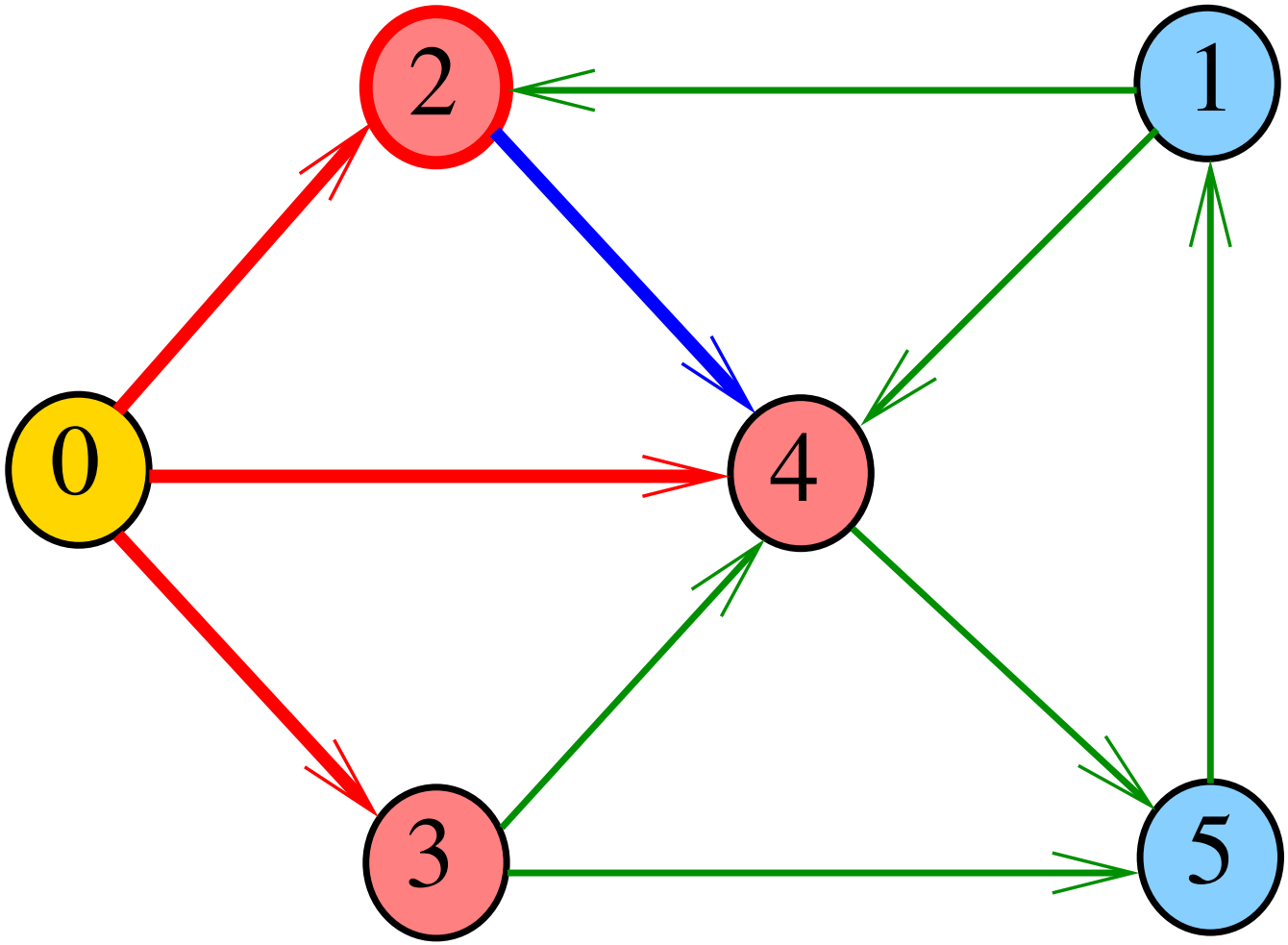
v	0	1	2	3	4	5
distTo[v]	0	6	1	1	1	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		

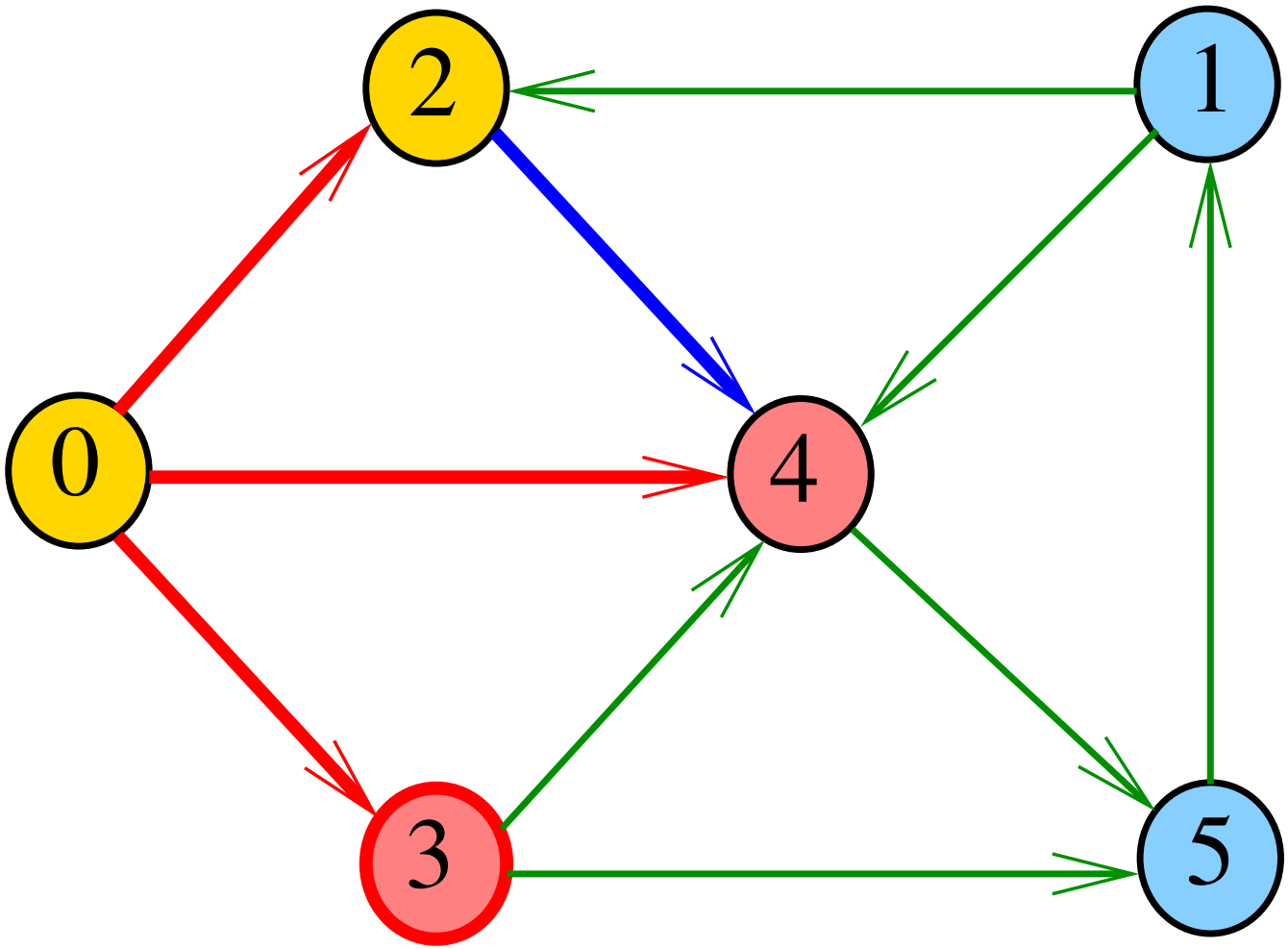
v	0	1	2	3	4	5
distTo[v]	0	6	1	1	1	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		

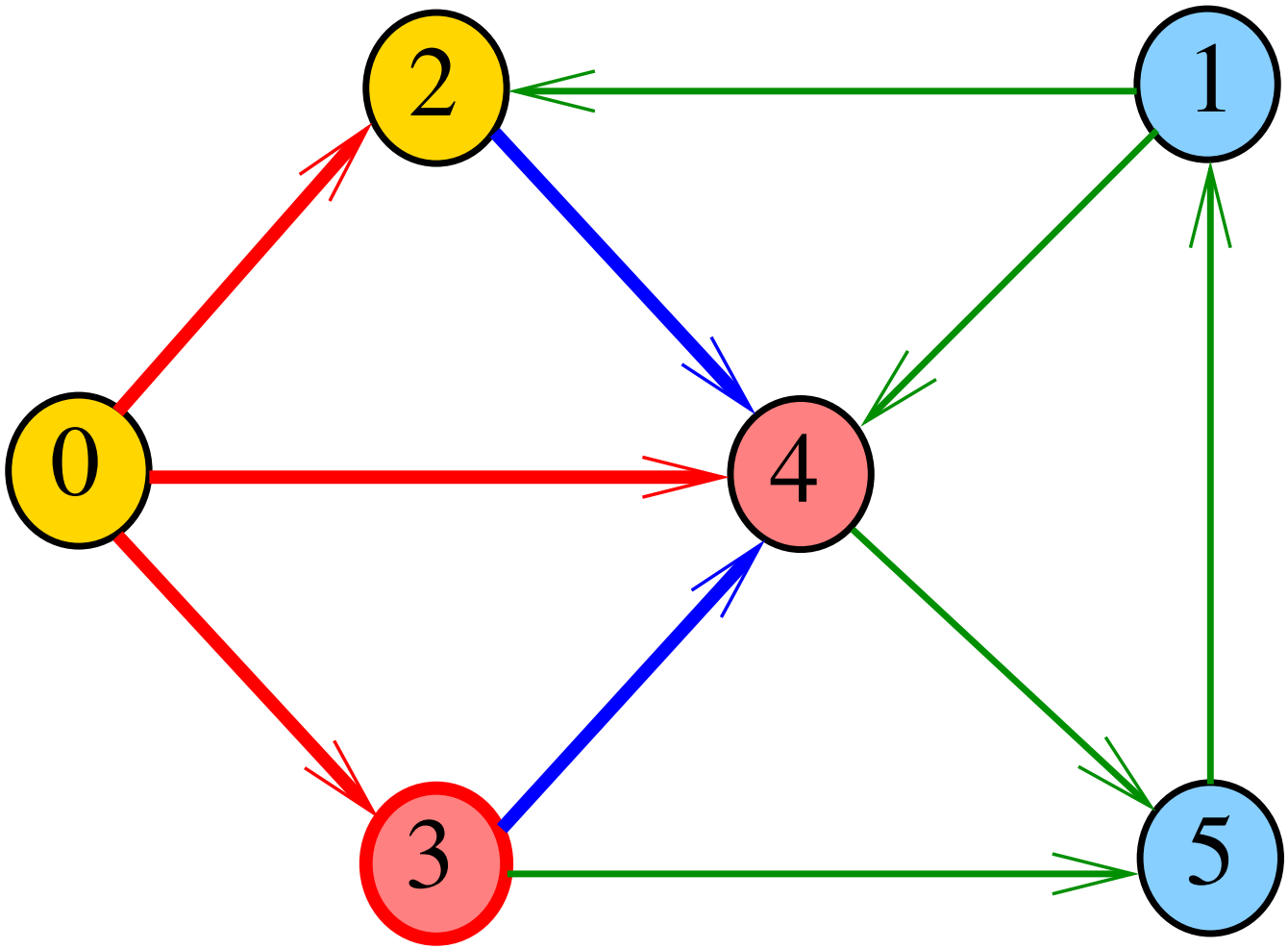
v	0	1	2	3	4	5
distTo[v]	0	6	1	1	1	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		

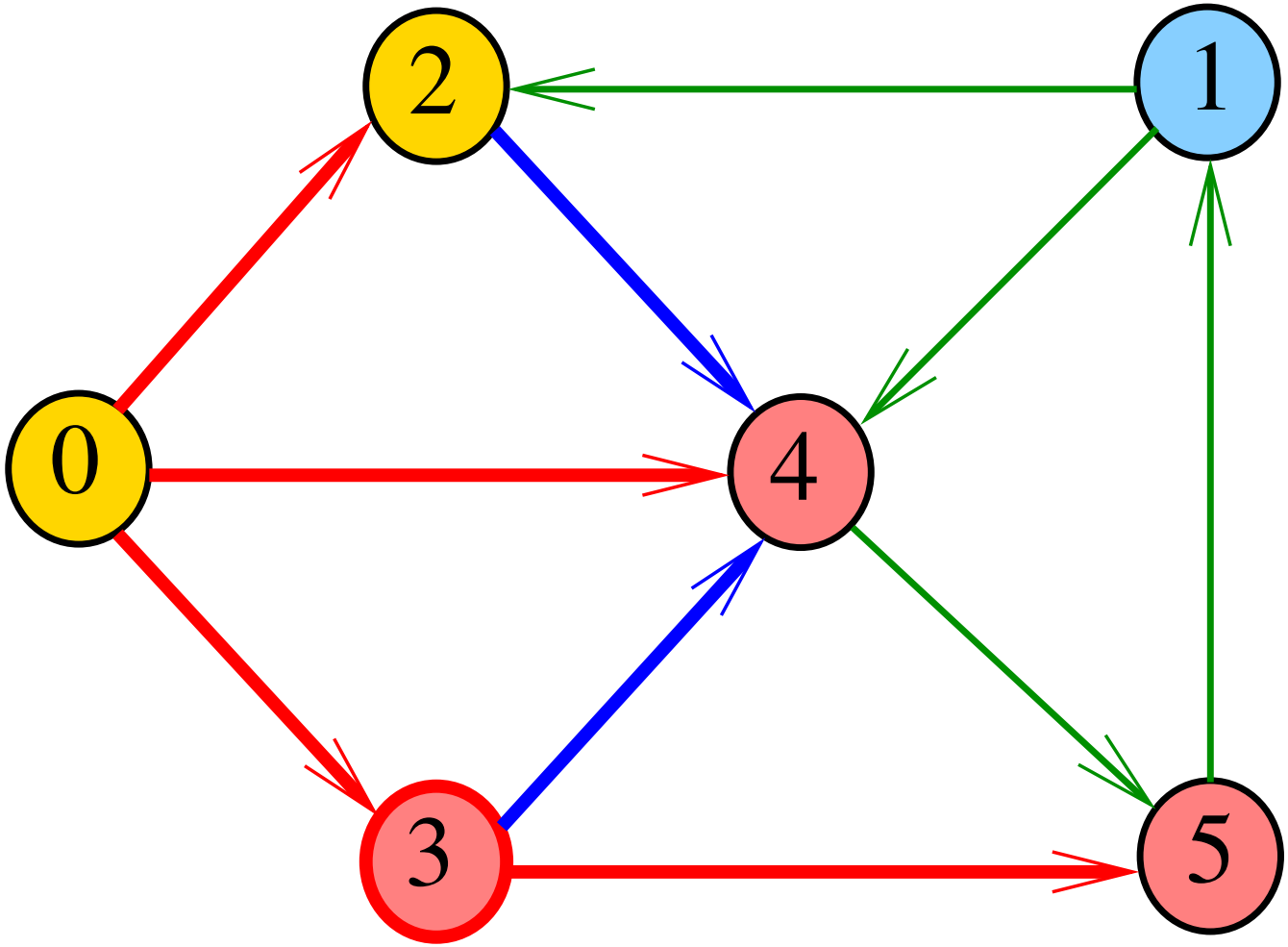
v	0	1	2	3	4	5
distTo[v]	0	6	1	1	1	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	

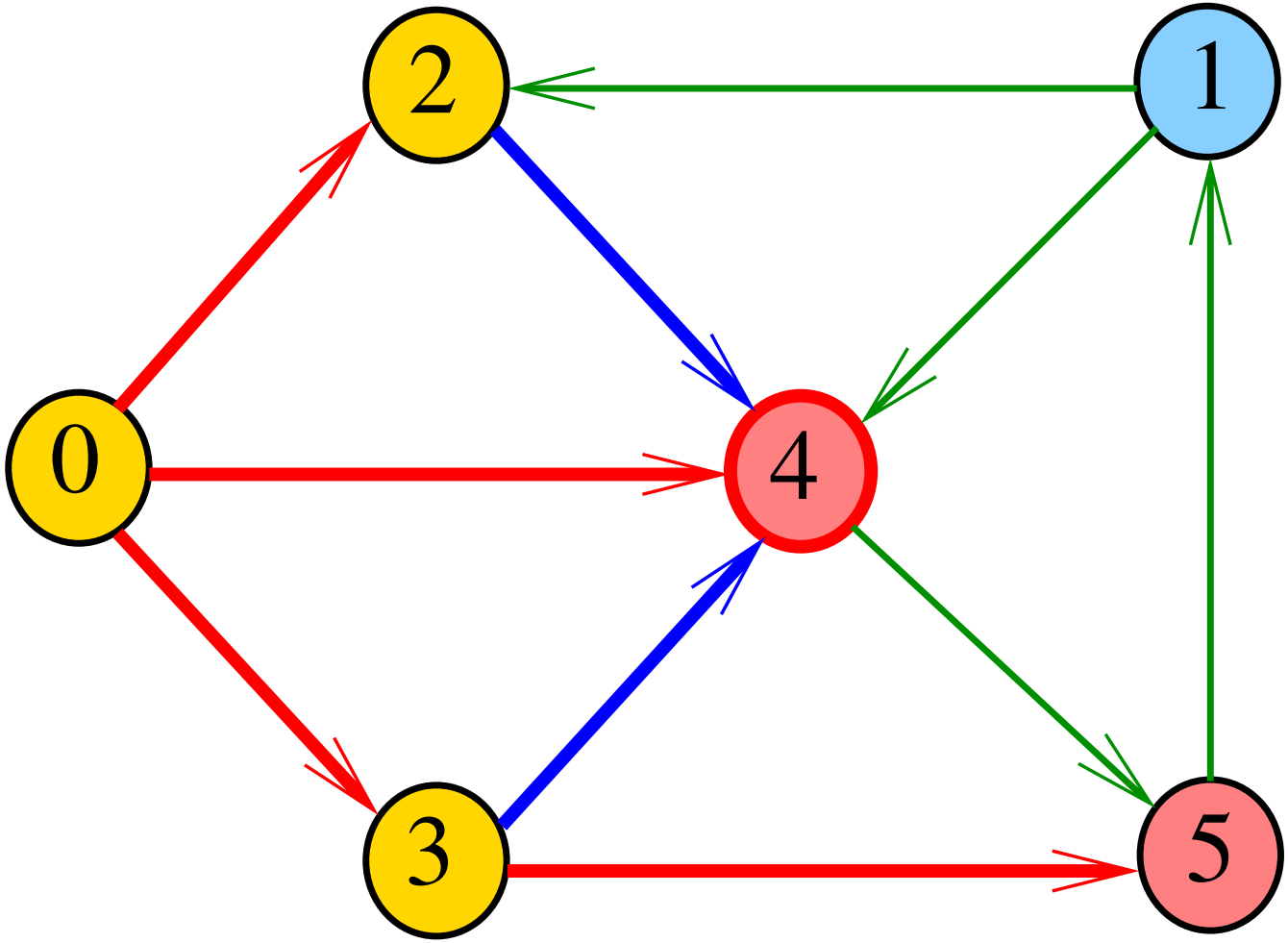
v	0	1	2	3	4	5
distTo[v]	0	6	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	

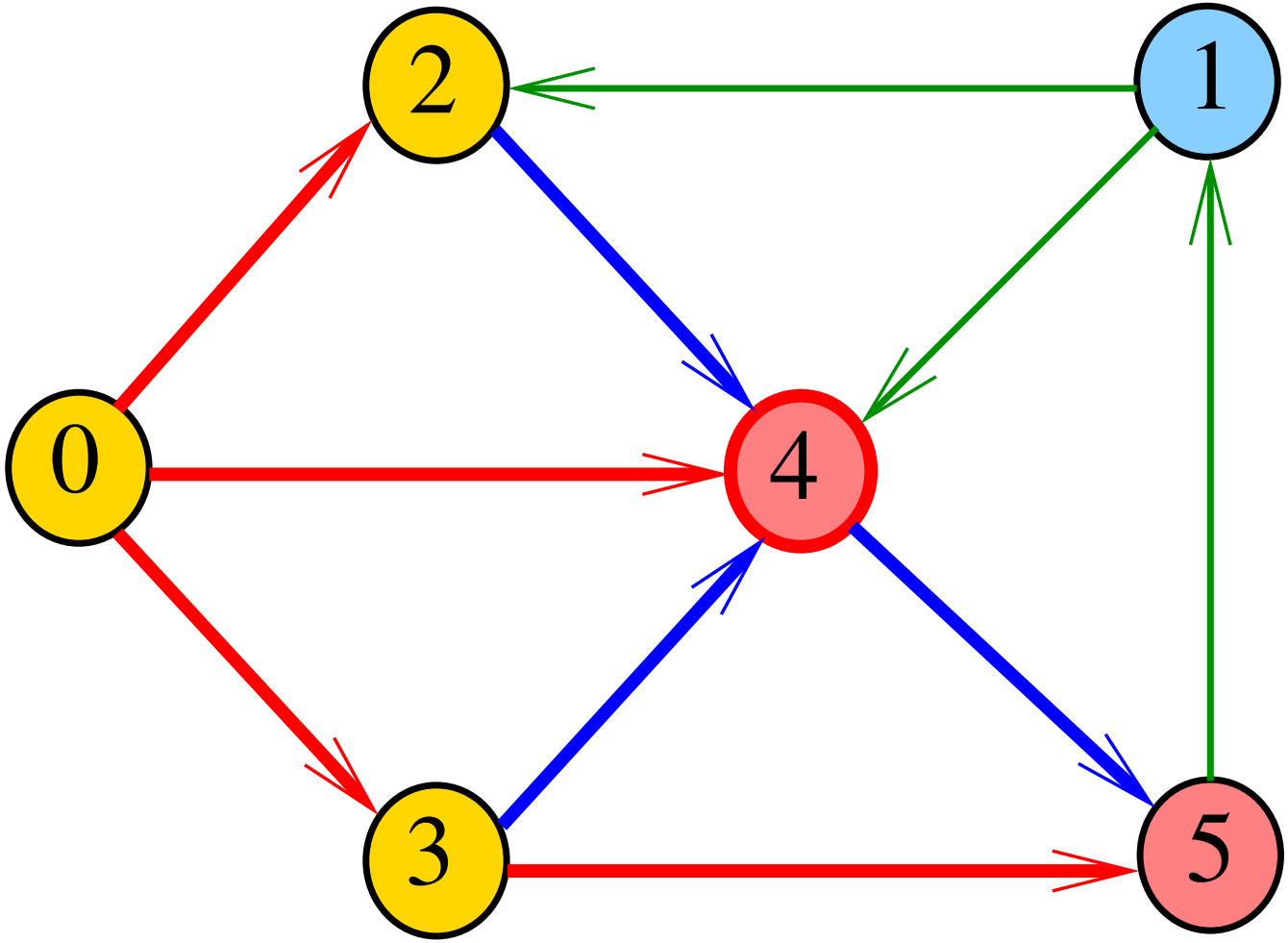
v	0	1	2	3	4	5
distTo[v]	0	6	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	

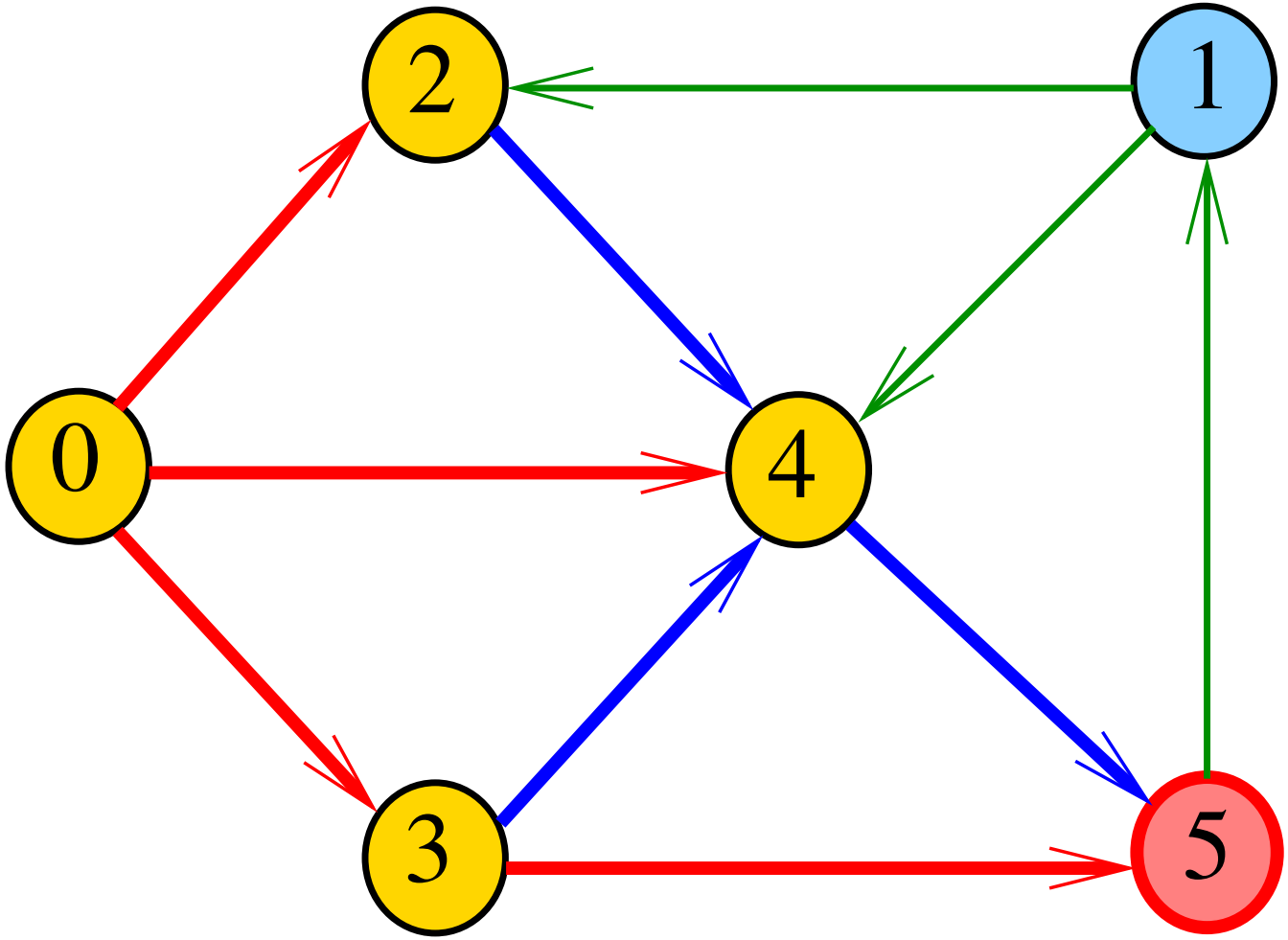
v	0	1	2	3	4	5
distTo[v]	0	6	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	

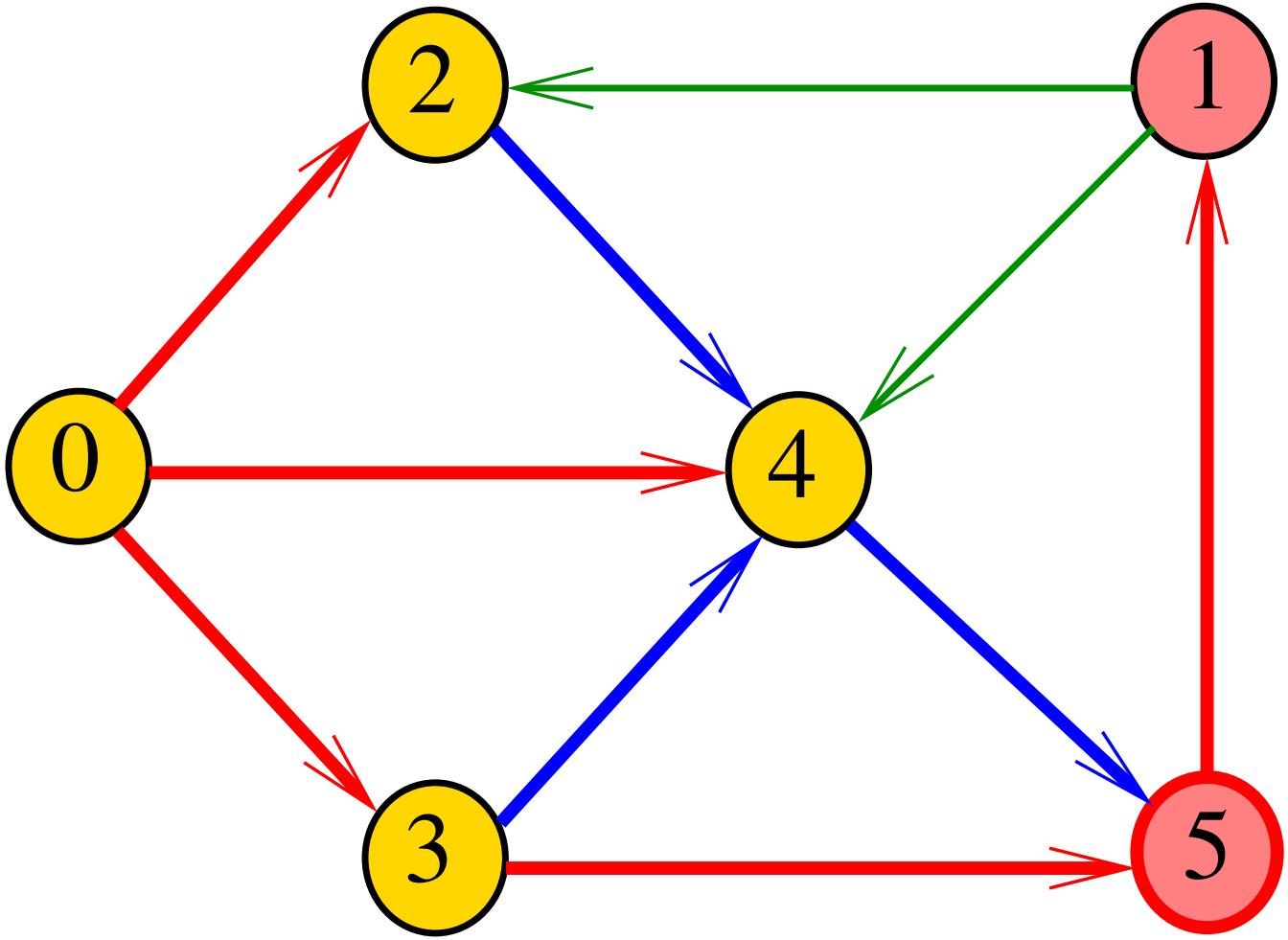
v	0	1	2	3	4	5
distTo[v]	0	6	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1

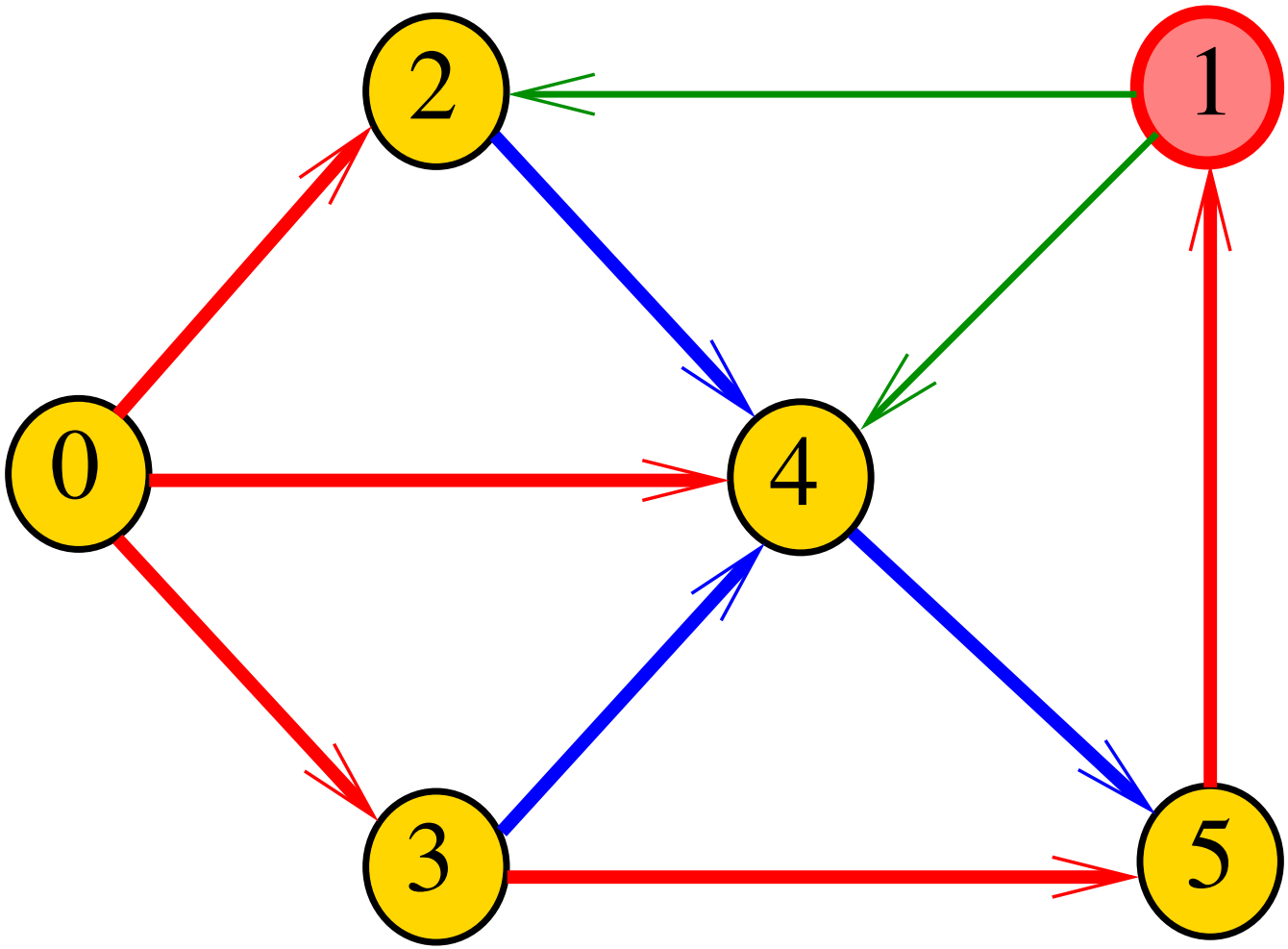
v	0	1	2	3	4	5
distTo[v]	0	3	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1

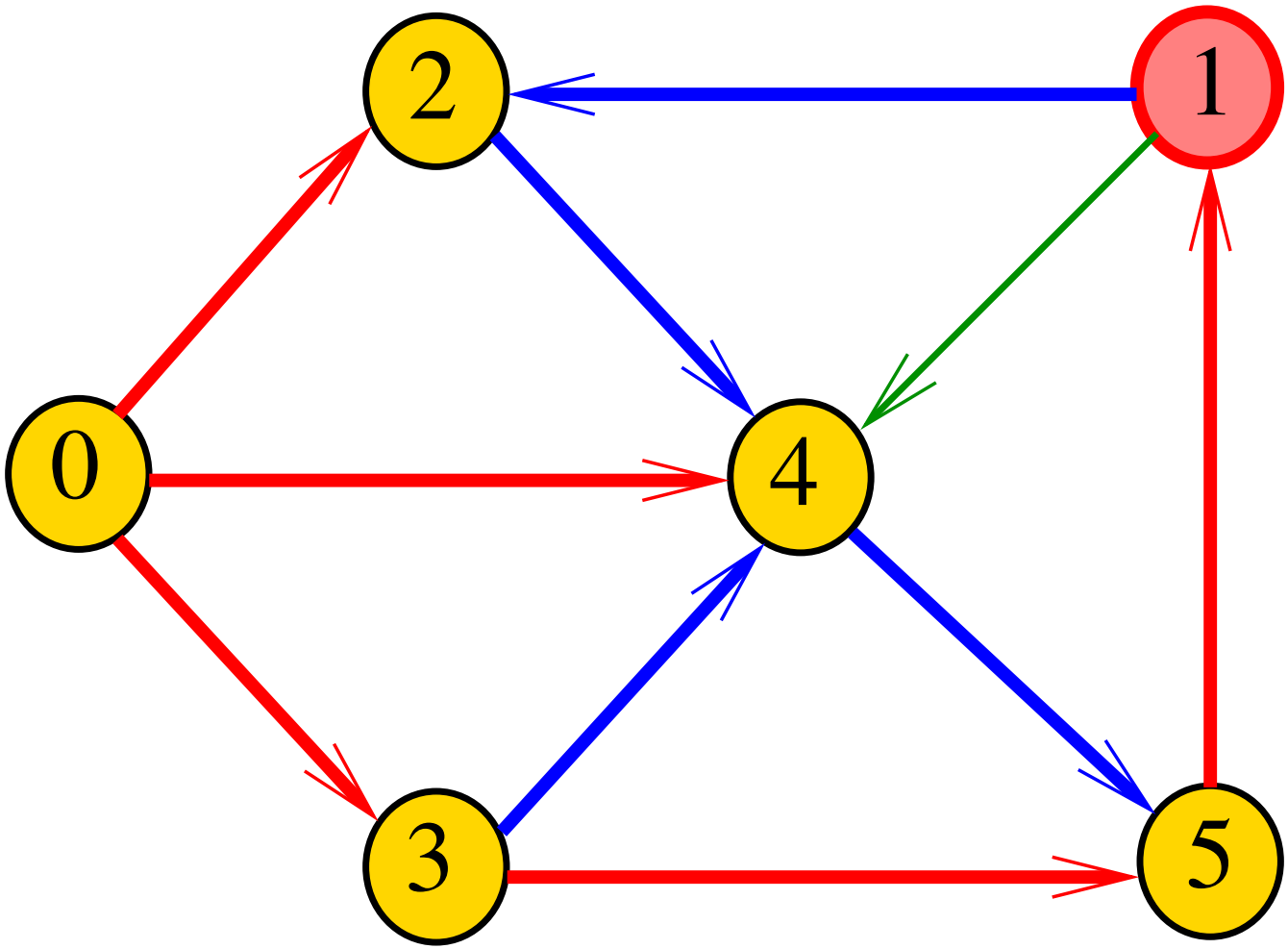
v	0	1	2	3	4	5
distTo[v]	0	3	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1

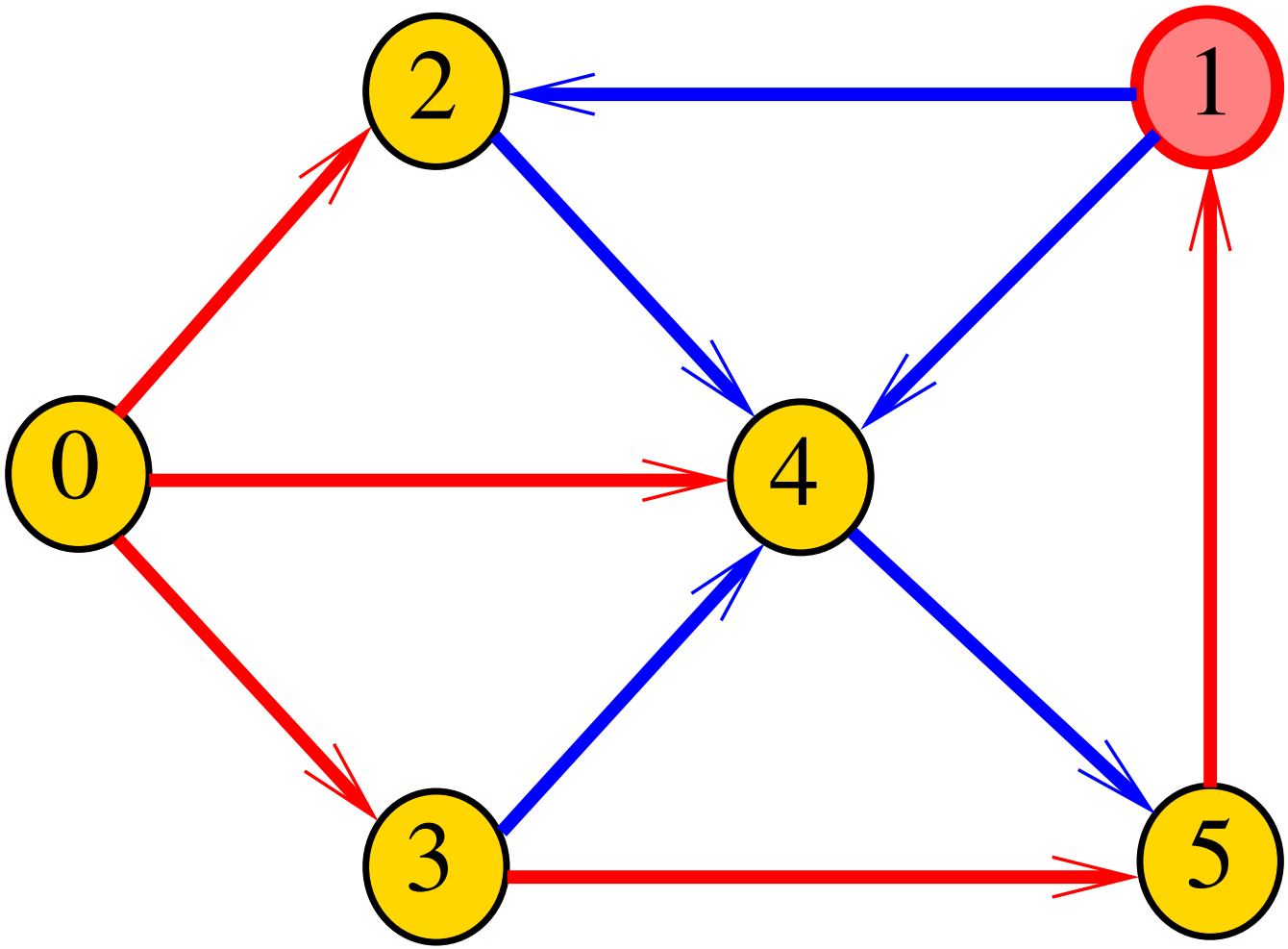
v	0	1	2	3	4	5
distTo[v]	0	3	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1

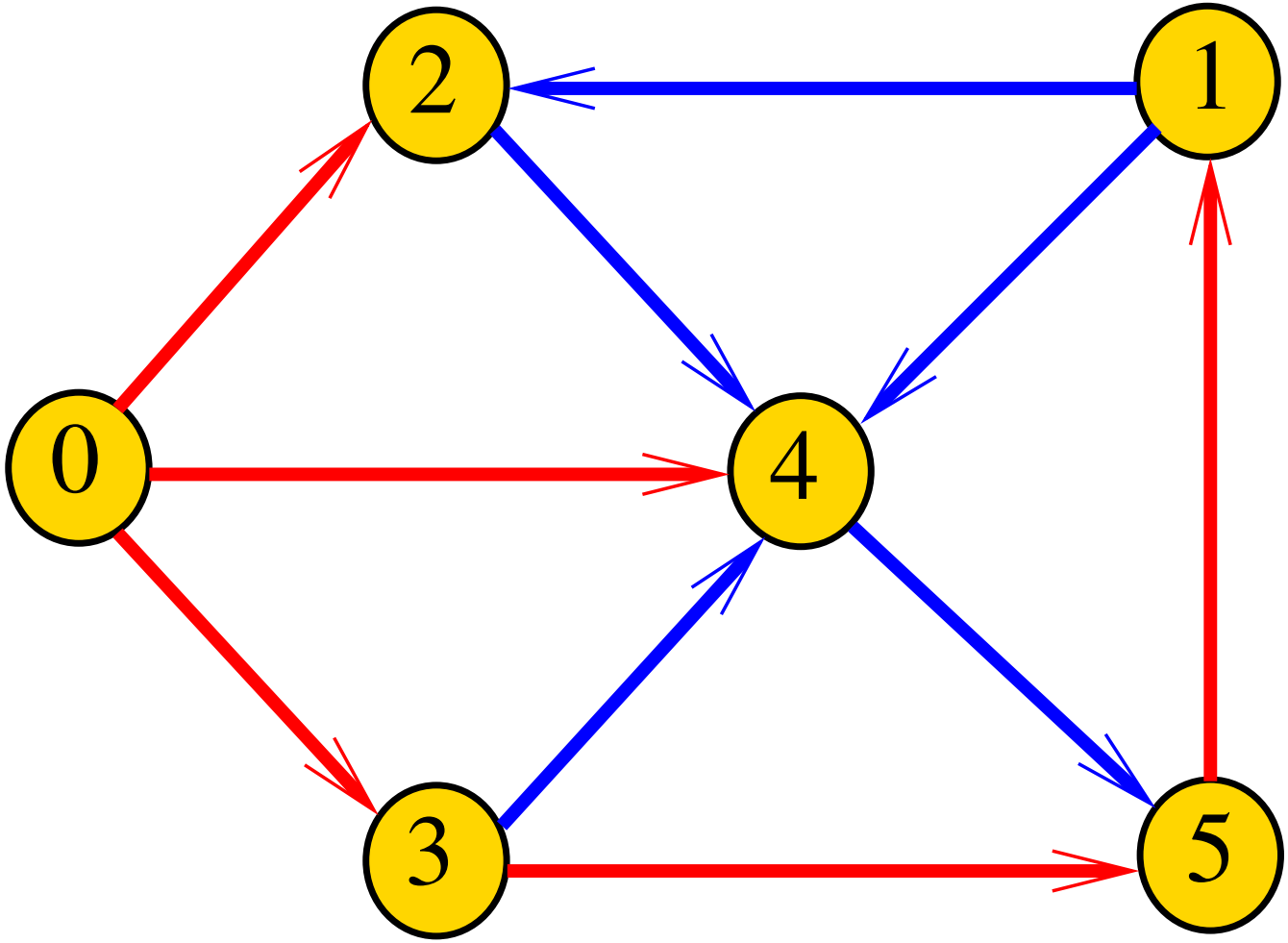
v	0	1	2	3	4	5
distTo[v]	0	3	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1

v	0	1	2	3	4	5
distTo[v]	0	3	1	1	1	2



Digrafos com custos nos arcos

Muitas aplicações associam um número a cada arco de um digrafo

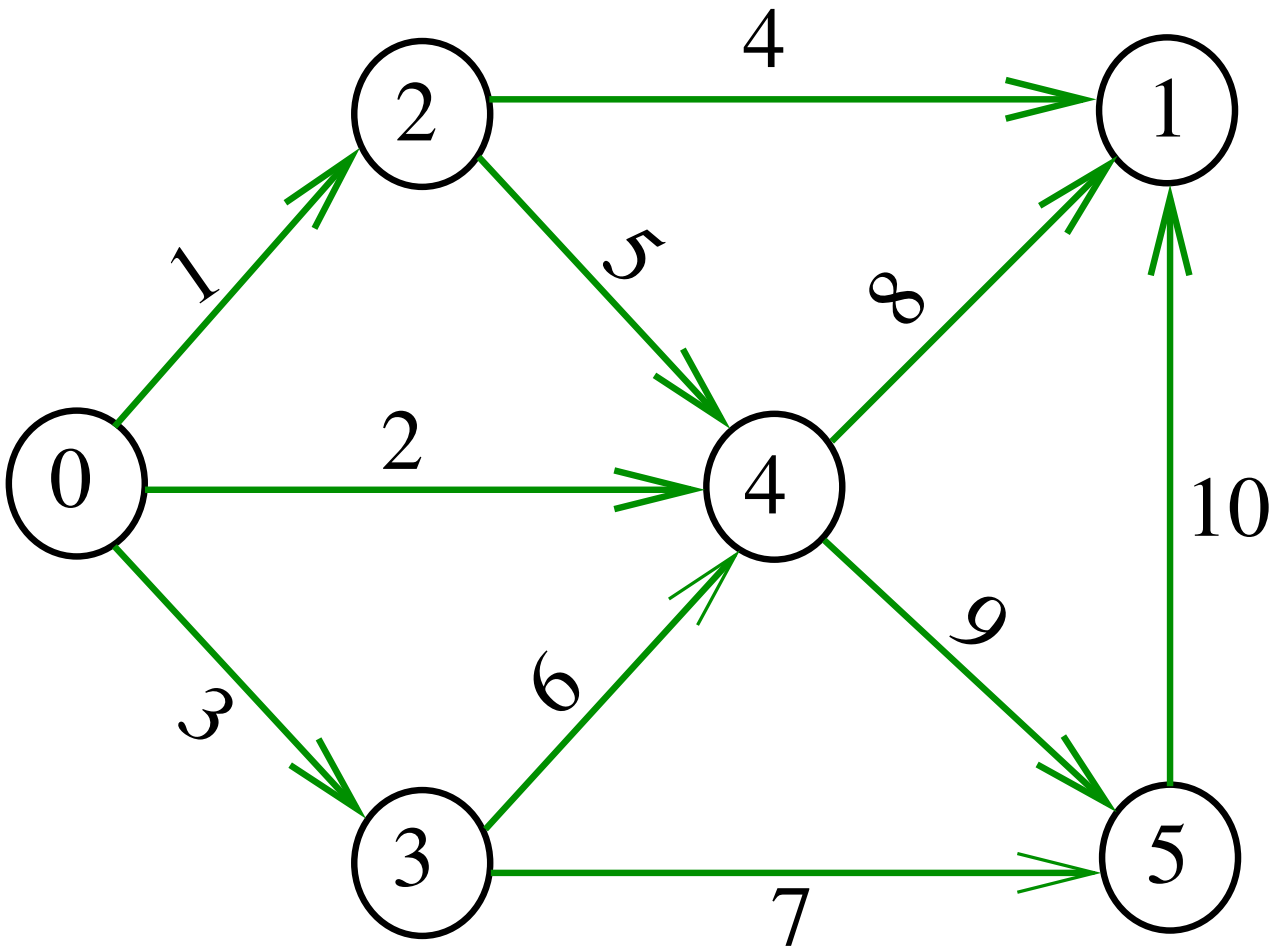
Diremos que esse número é o **custo** ou **peso** do arco

Vamos supor que esses números são do tipo **double** na classe `DirectedEdge`.

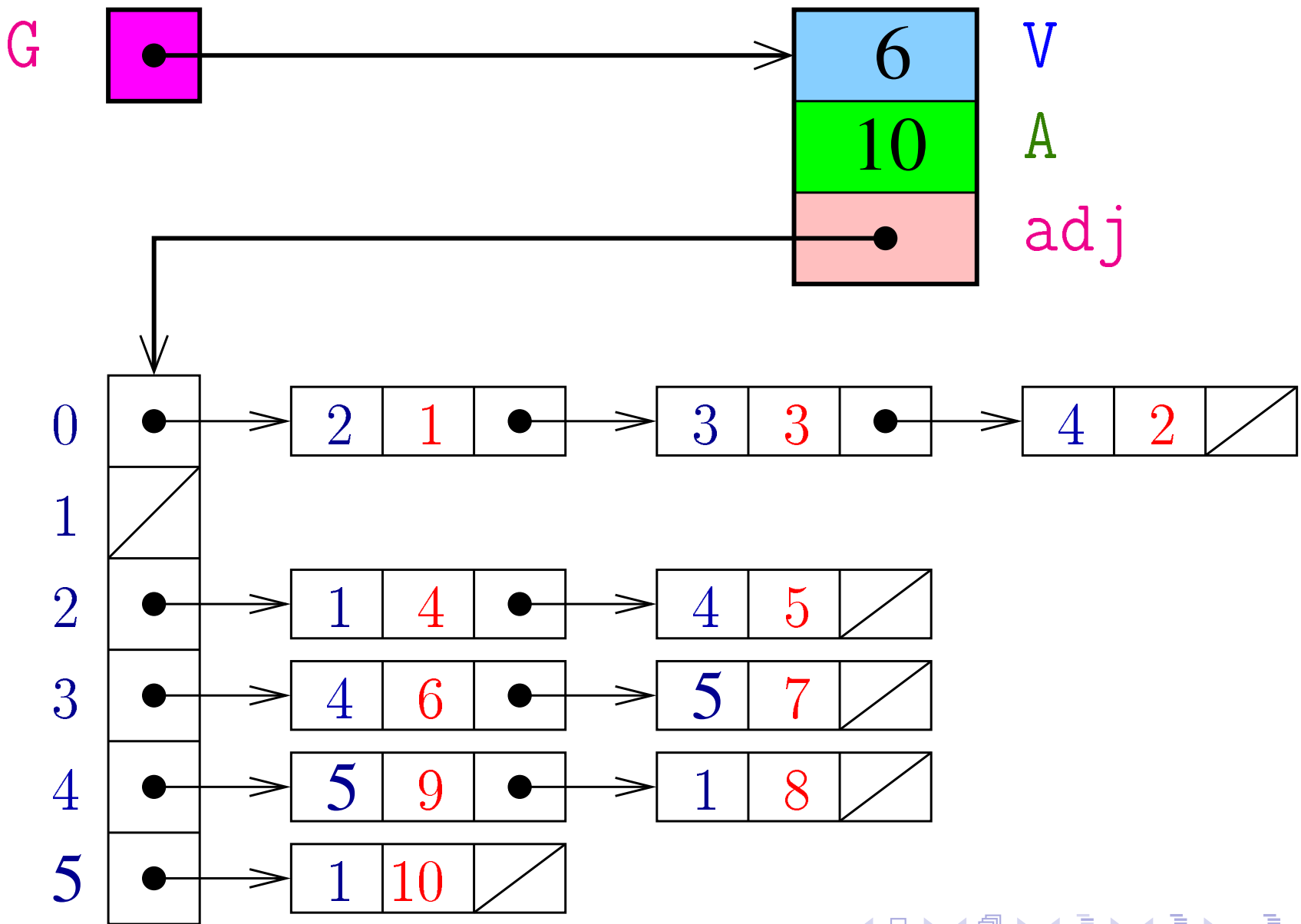
```
DirectedEdge(int v, int w, double weight)
    private final int v;
    private final int w;
    private final double weight;
    double weight()...
    int from()...
    int to()...
```

Digrafo

EdgeWeightedDigraph G



Estruturas de dados



Classe EdgeWeightedDigraph

A estrutura **digraph** representa um digrafo

V contém o número de vértices

E contém o número de arcos do digrafo

adj é uma referência para vetor de listas de adjacência

```
public EdgeWeightDigraph (int V) {
    this.V = V;
    this.E = 0;
    adj=(Bag<DirectedEdge>[])new Bag[V];
    for (int v = 0; v < V; v++)
        adj[v] = new Bag<DirectedEdge>();
```

AULA 19

Caminhos de custo mínimo

S 21.0 e 21.1

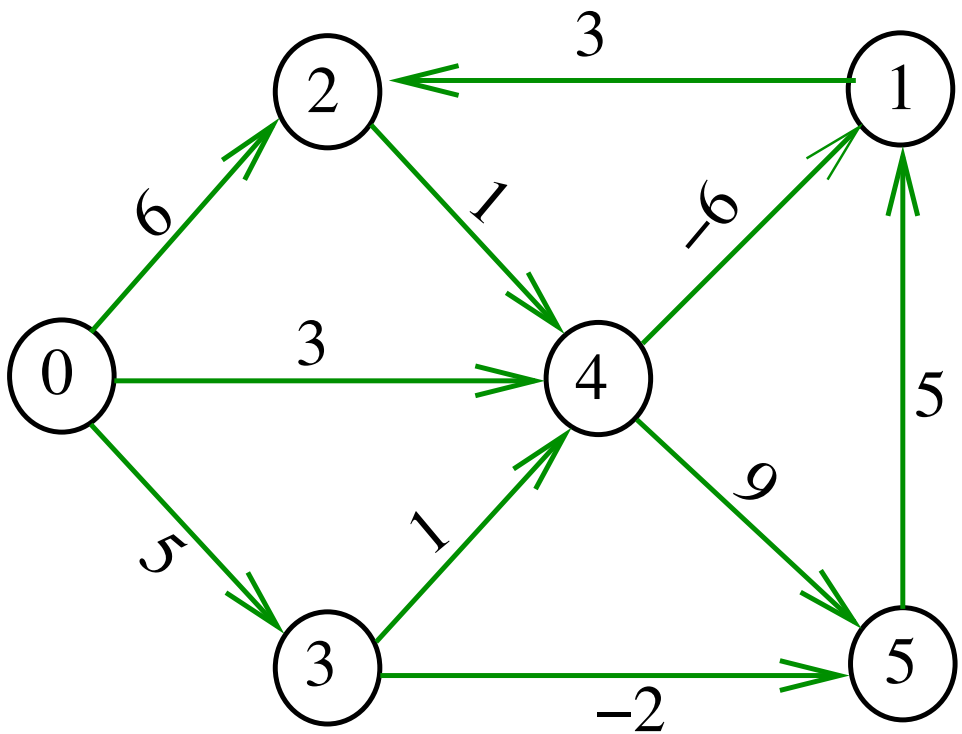
Custo de um caminho

Custo de um caminho é soma dos custos de seus arcos

Custo do caminho 0-2-4-5 é 16.

Custo do caminho 0-2-4-1-2-4-5 é 14.

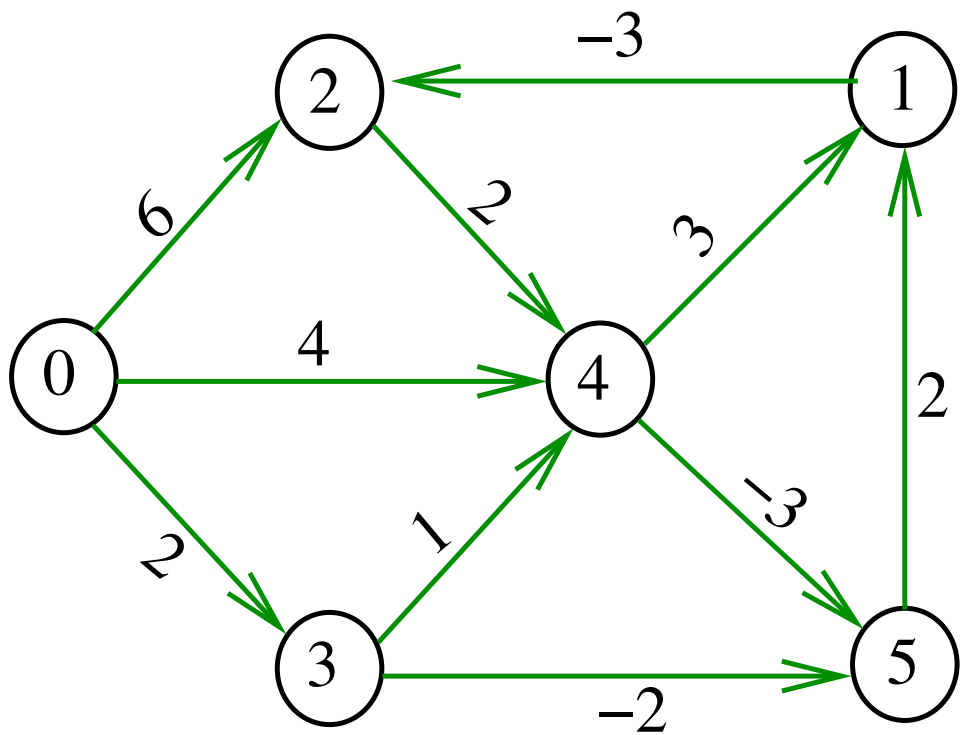
Custo do caminho 0-2-4-1-2-4-1-2-4-5 é 12.



Caminho mínimo

Um caminho P tem **custo mínimo** se o custo de P é menor ou igual ao custo de todo caminho com a mesma origem e término

O caminho 0-3-4-5-1-2 é mínimo, tem custo -1



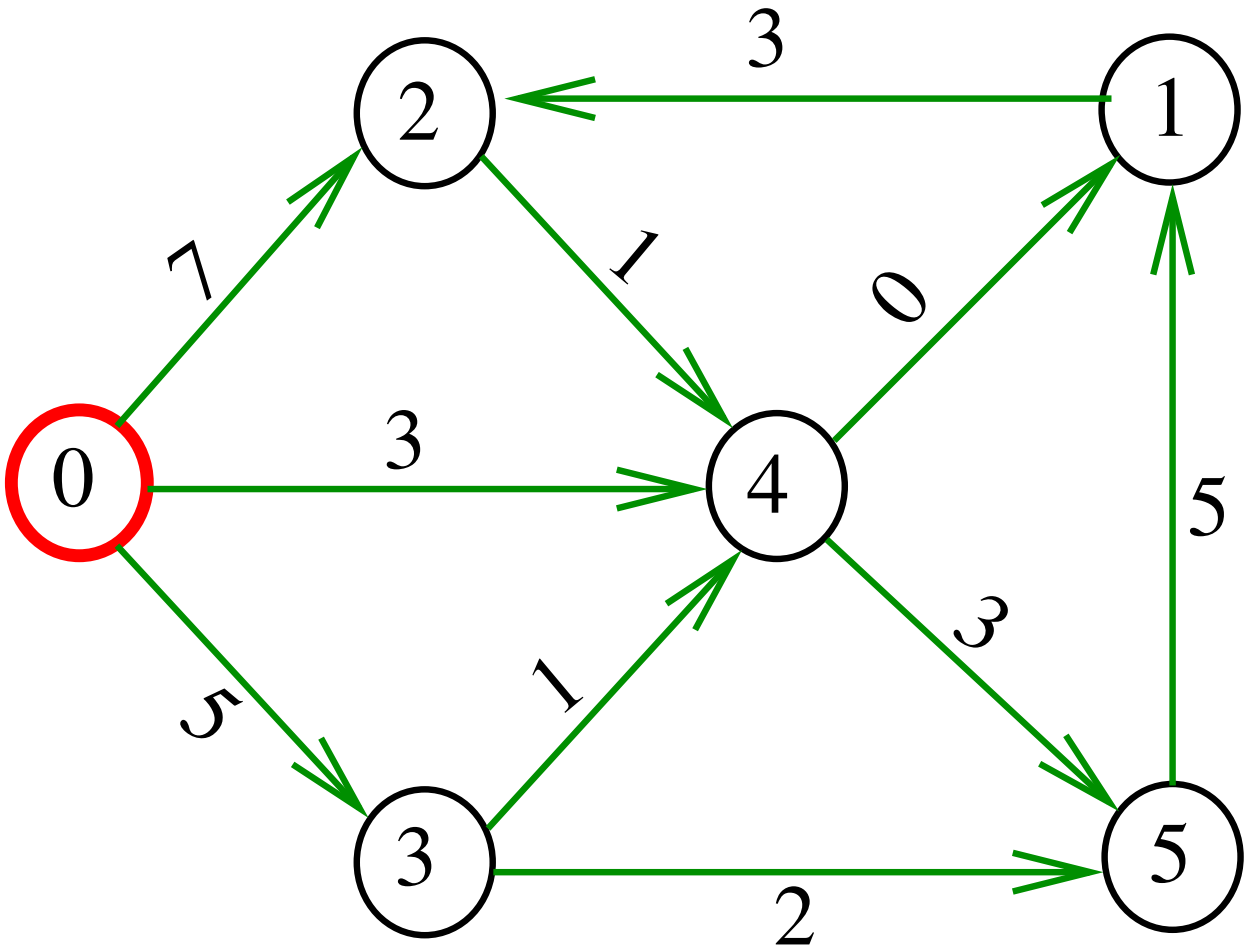
Problema

Problema dos Caminhos Mínimos com Origem Fixa (*Single-source Shortest Paths Problem*):

> *Dado um vértice s de um digrafo com custos* ***não-negativos*** *nos arcos, encontrar, para cada vértice t que pode ser alcançado a partir de s, um caminho mínimo simples de s a t.*

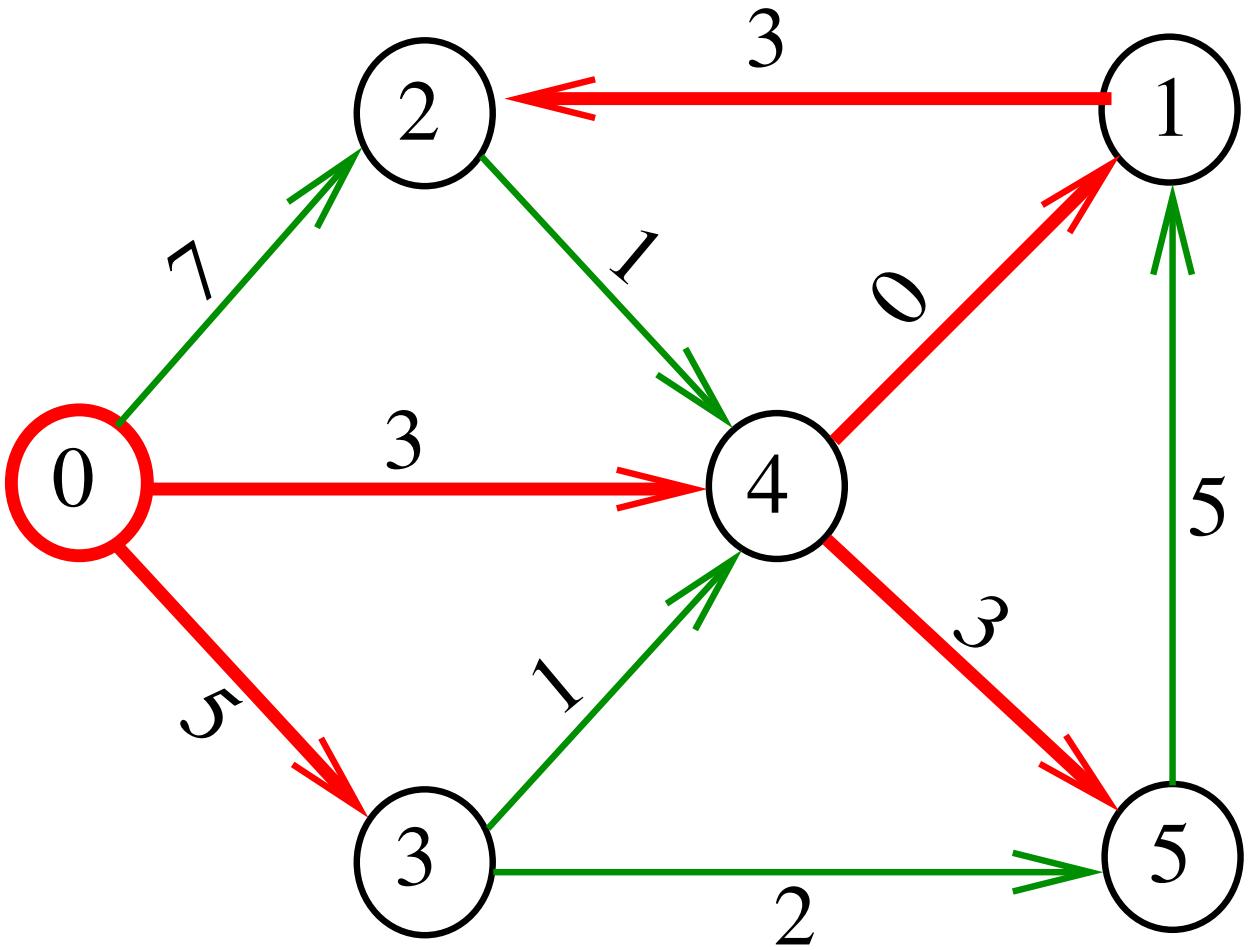
Exemplo

Entra:



Exemplo

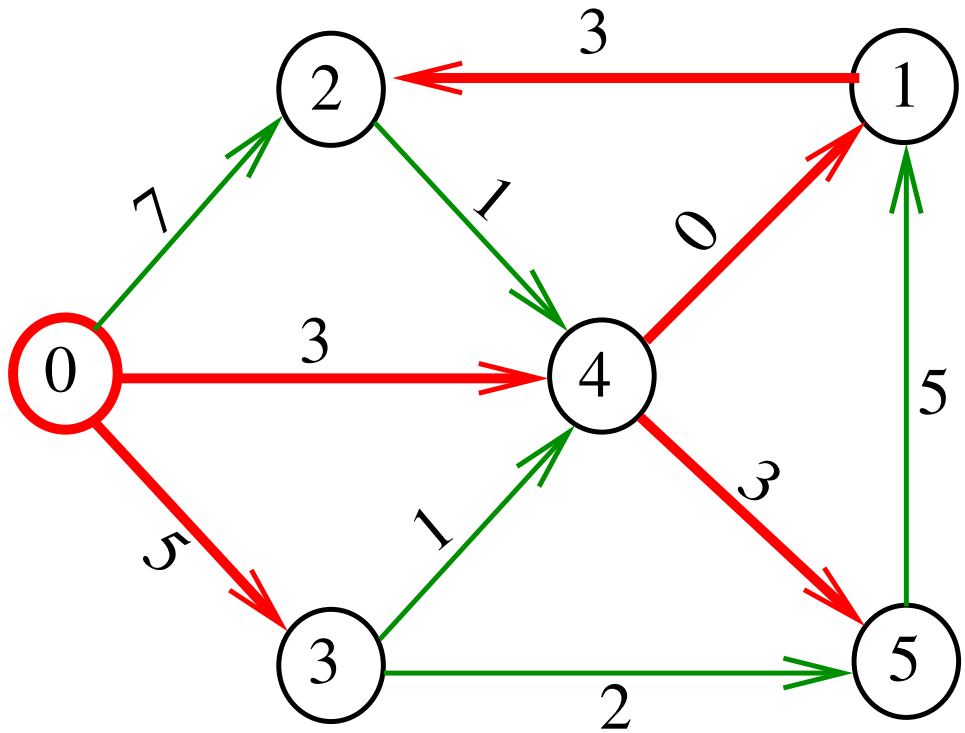
Sai:



Arborescência de caminhos mínimos

Uma arborescência com raiz s é de **caminhos mínimos** (= *shortest-paths tree* = *SPT*) se para todo vértice t que pode ser alcançado a partir de s,

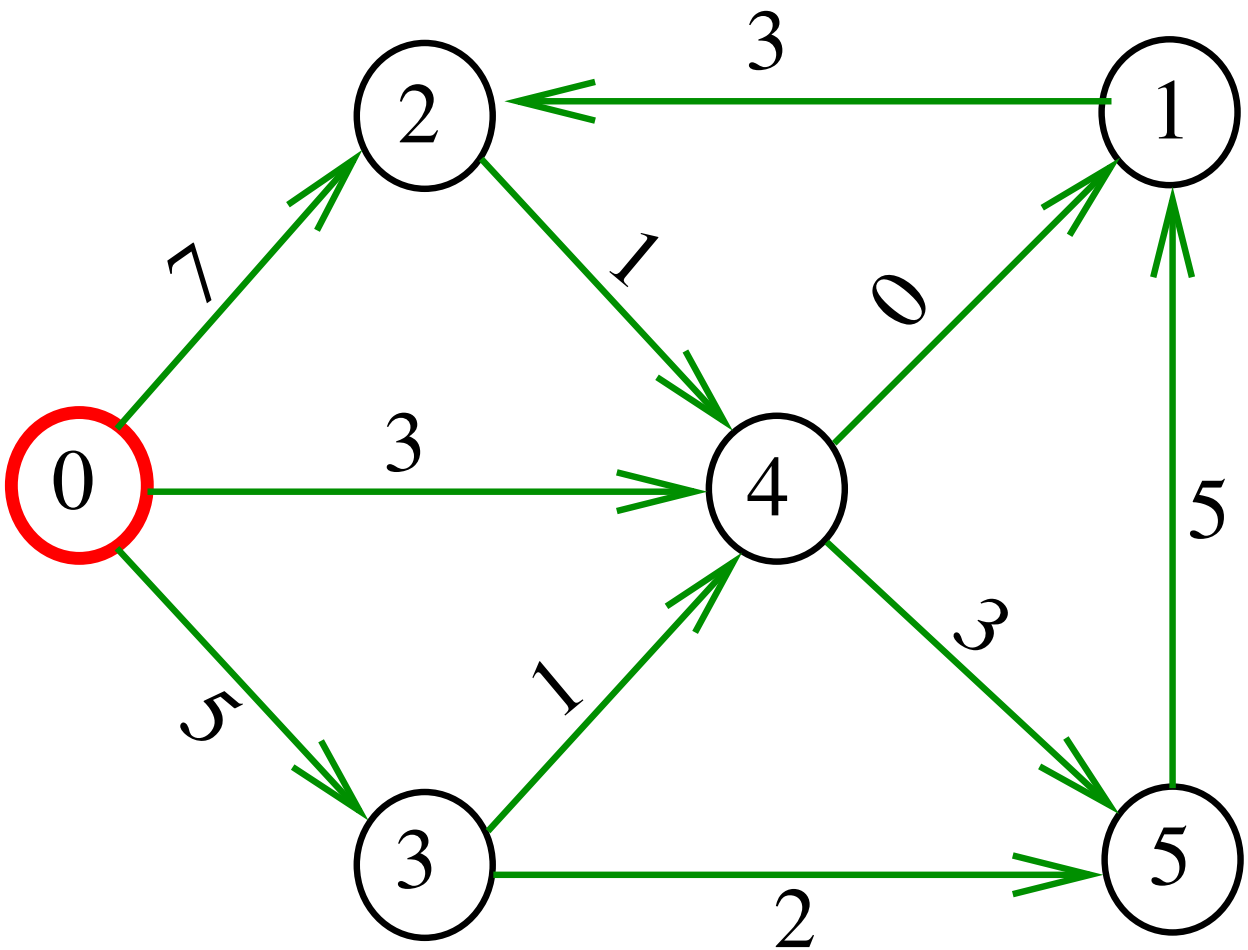
> *o único caminho de s a t na arborescência é um caminho mínimo*



Problema da SPT

Problema: Dado um vértice s de um digrafo com custos **não-negativos** nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s

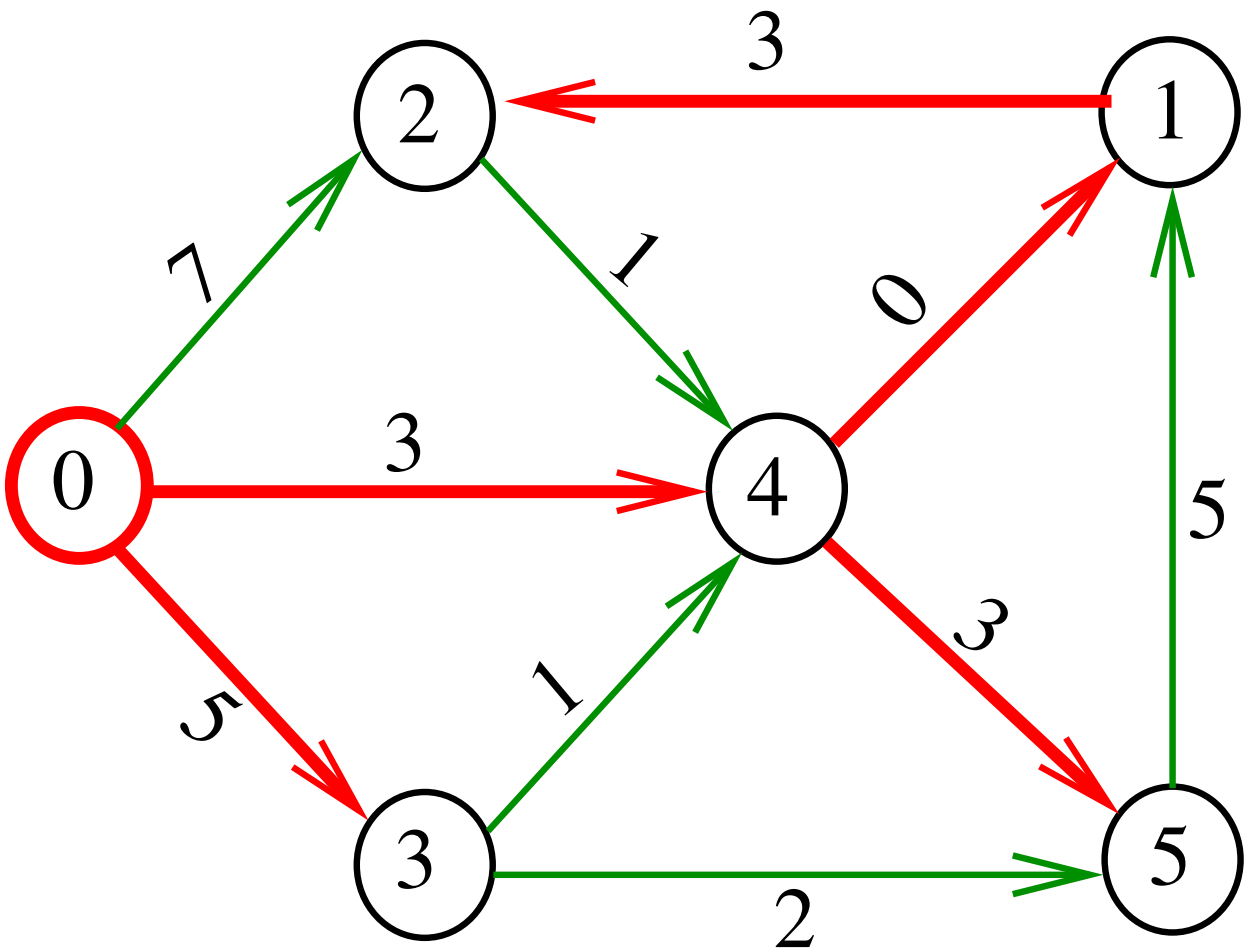
Entra:



Problema da SPT

Problema: Dado um vértice s de um digrafo com custos **não-negativos** nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s

Sai:



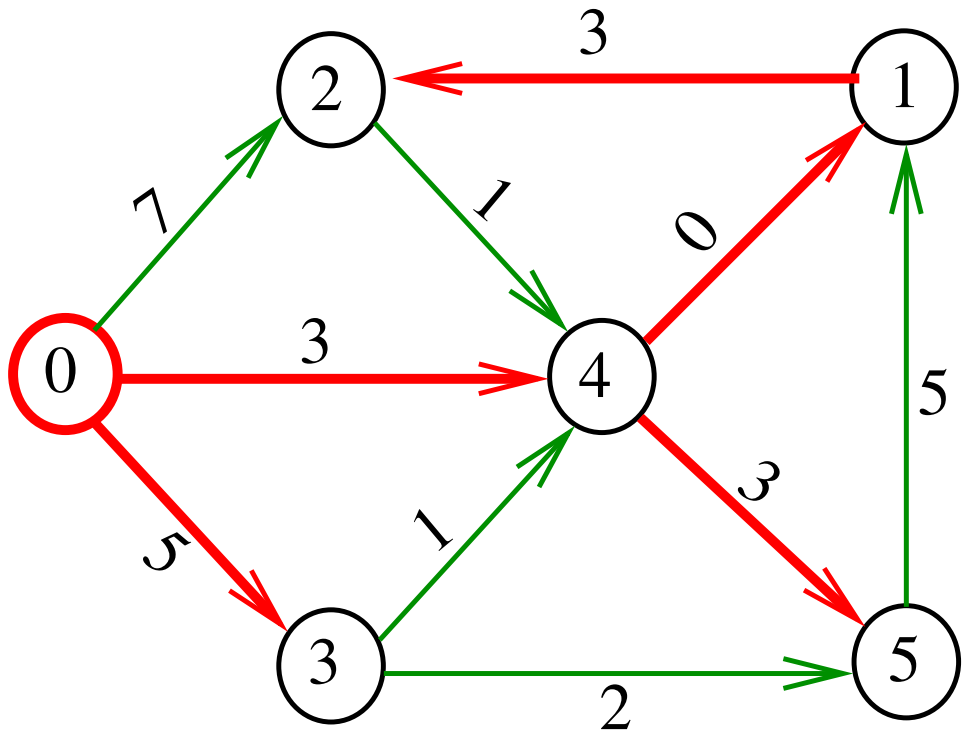
Algoritmo de Dijkstra

S 21.1 e 21.2

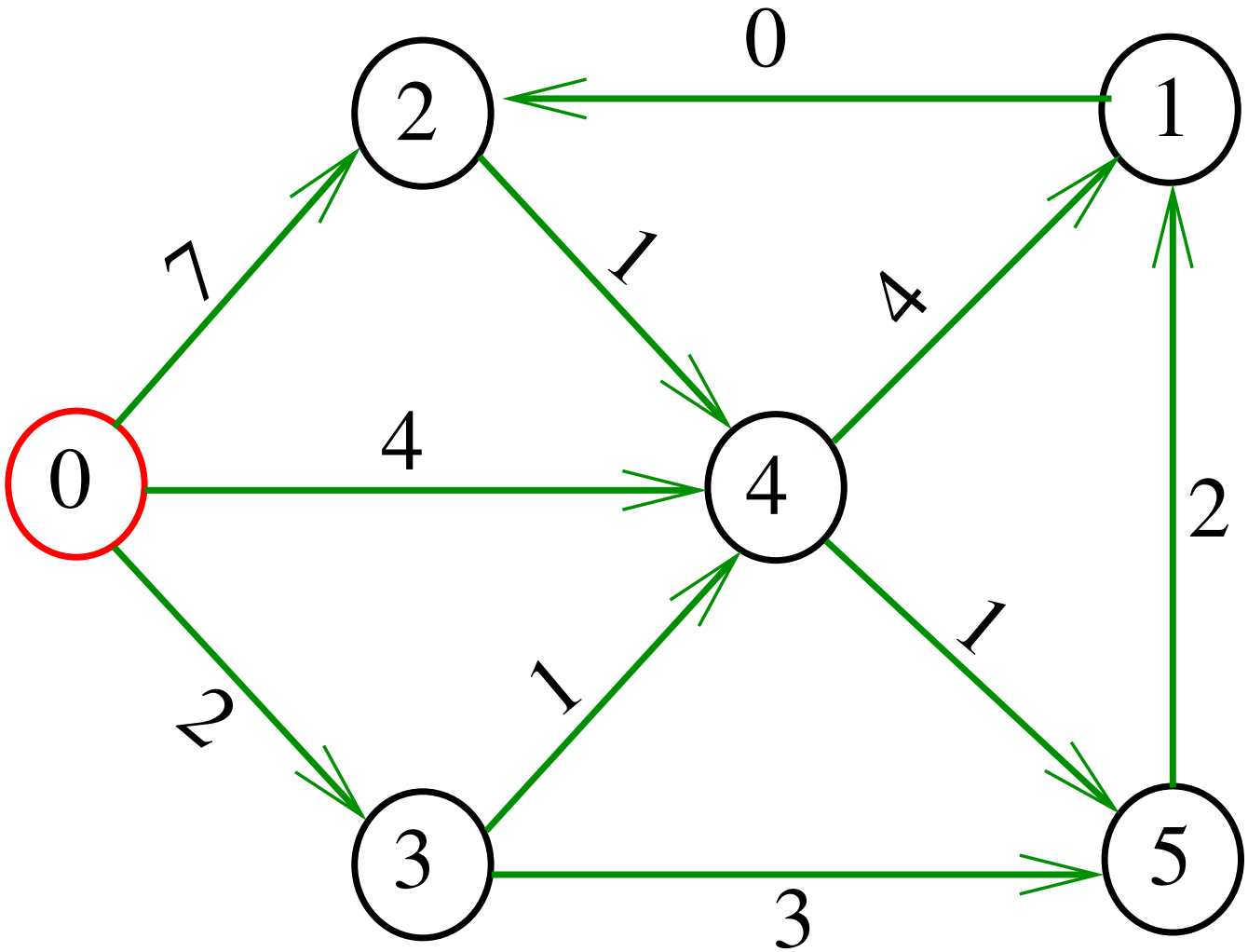
Problema

O algoritmo de Dijkstra resolve o problema da SPT:

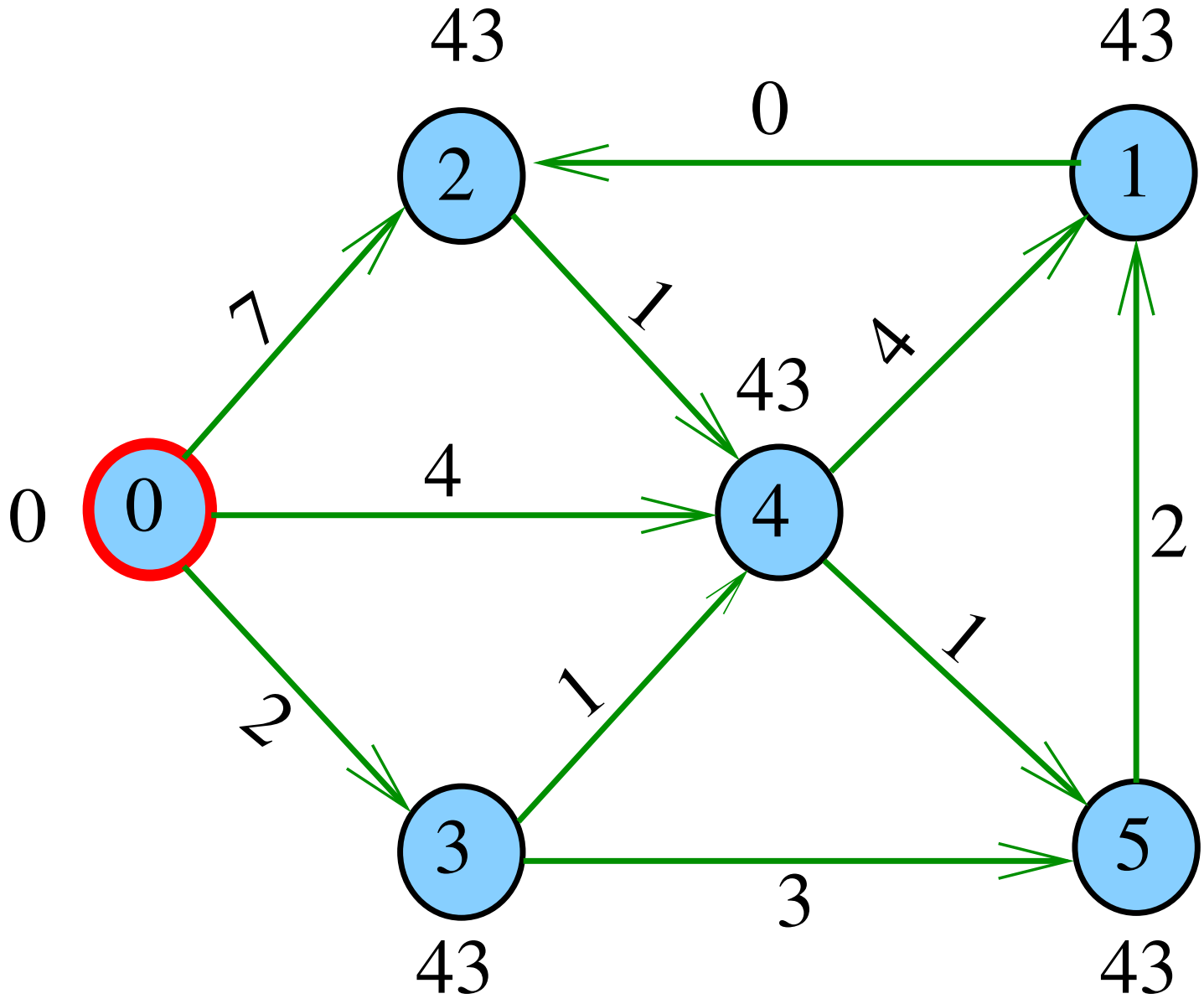
Dado um vértice s de um digrafo com custos não-negativos nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s



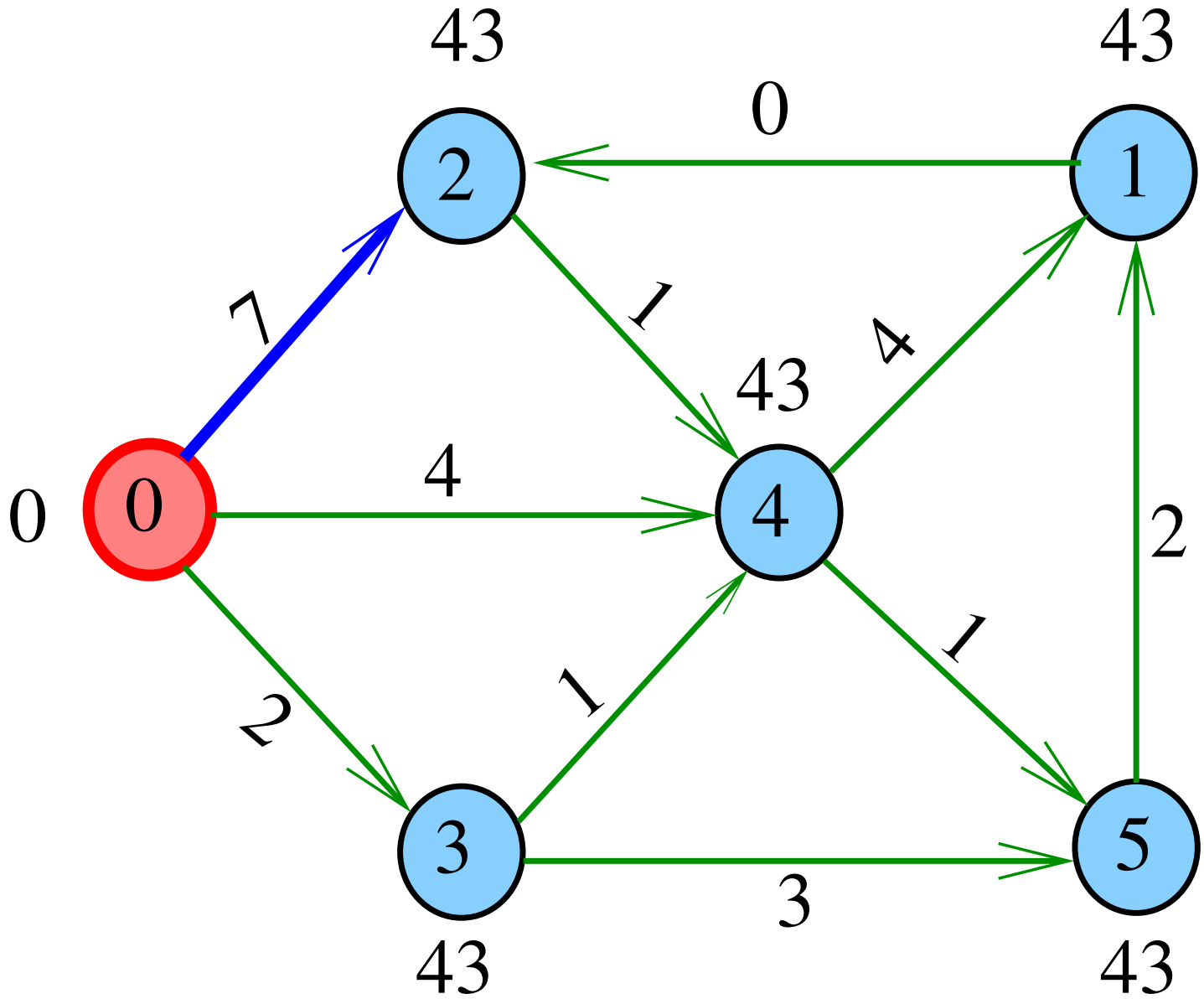
Simulação



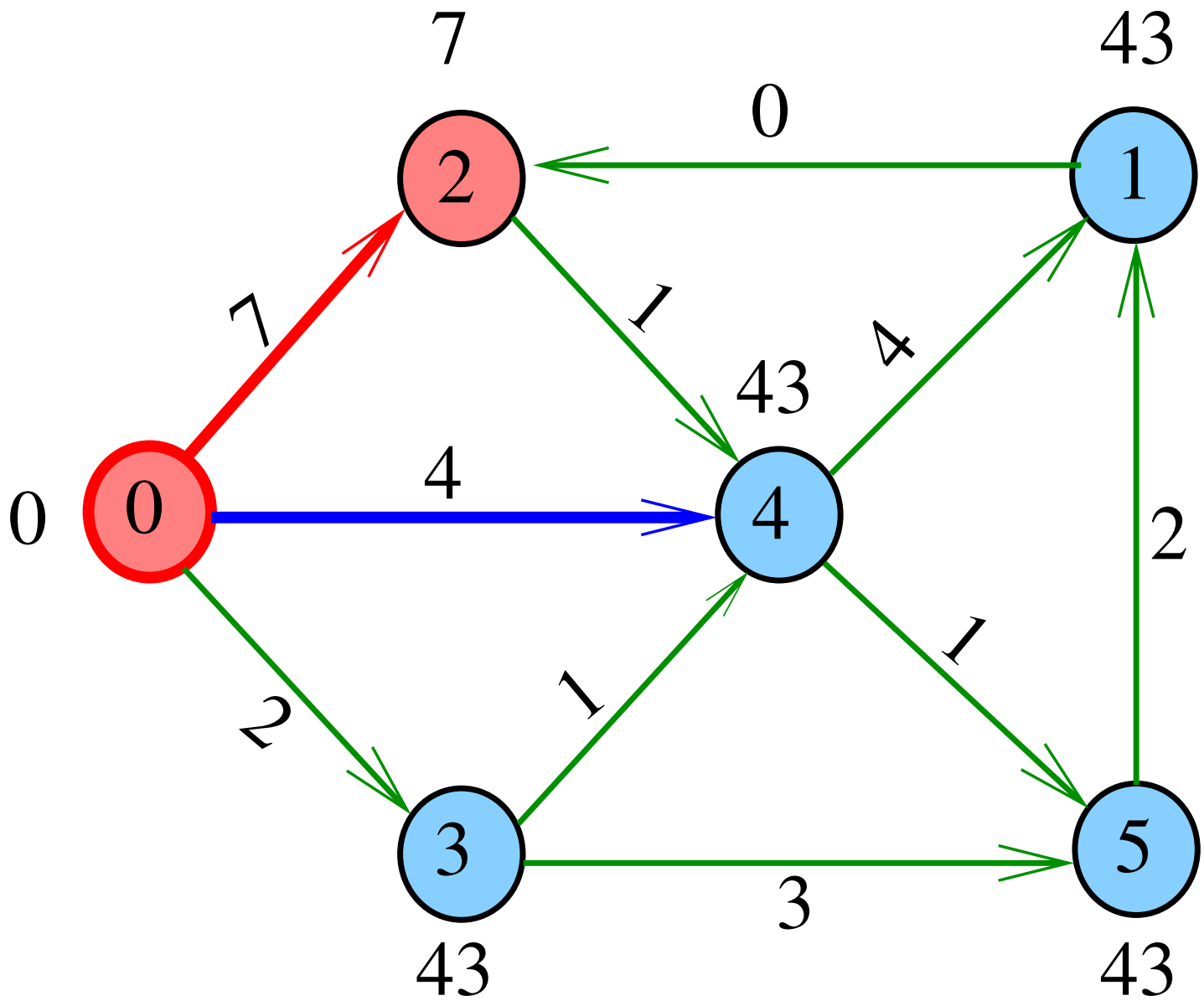
Simulação



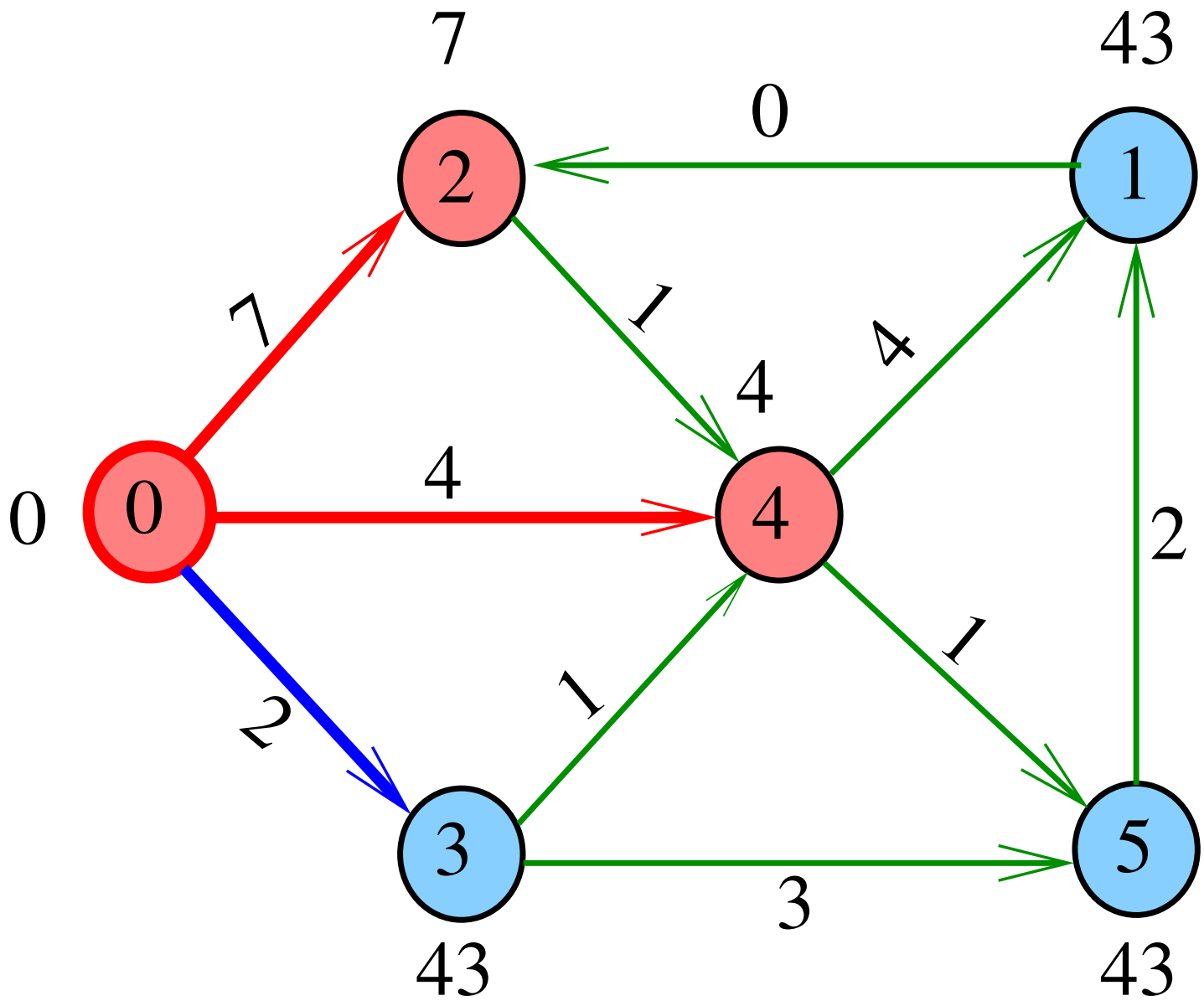
Simulação



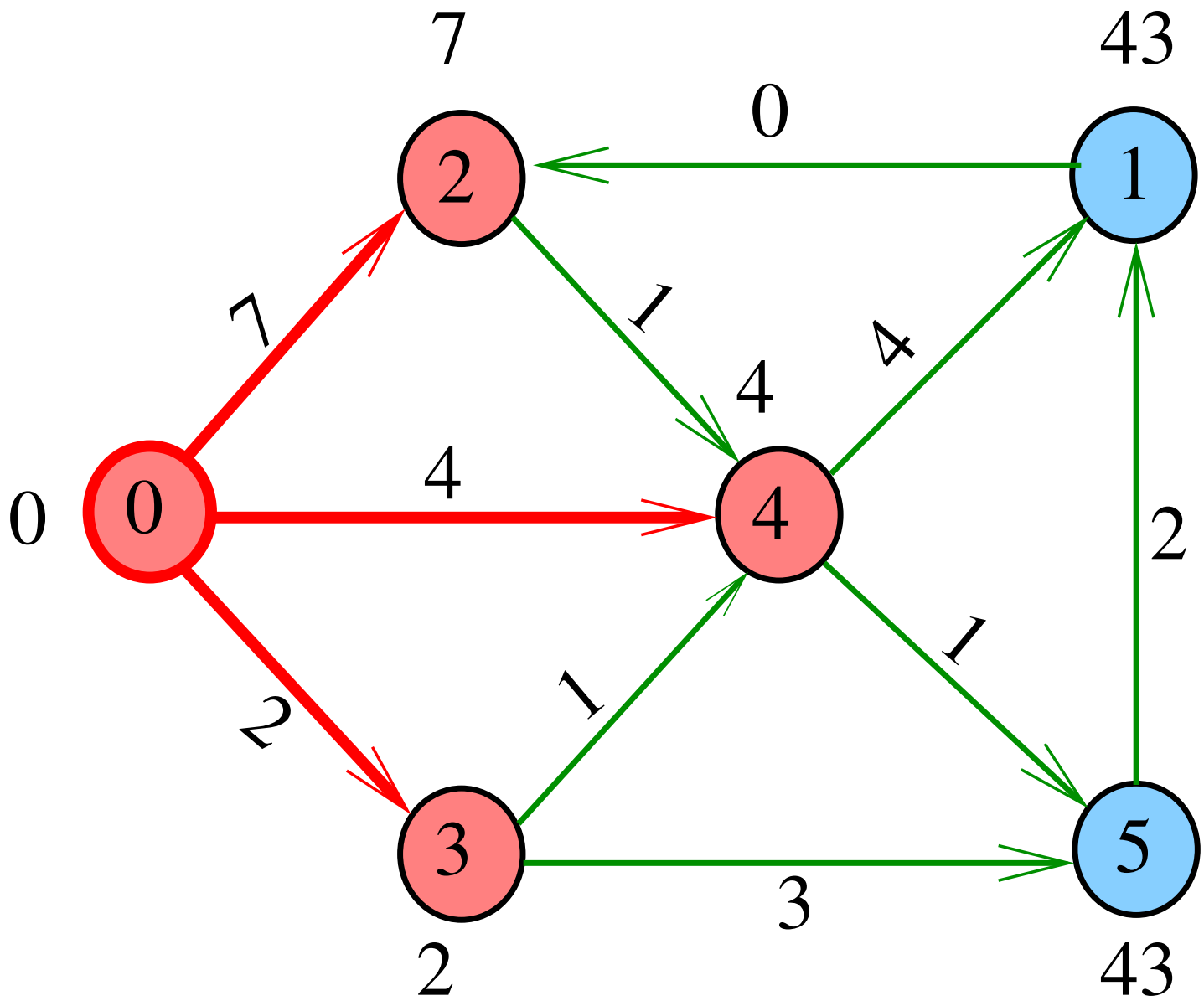
Simulação



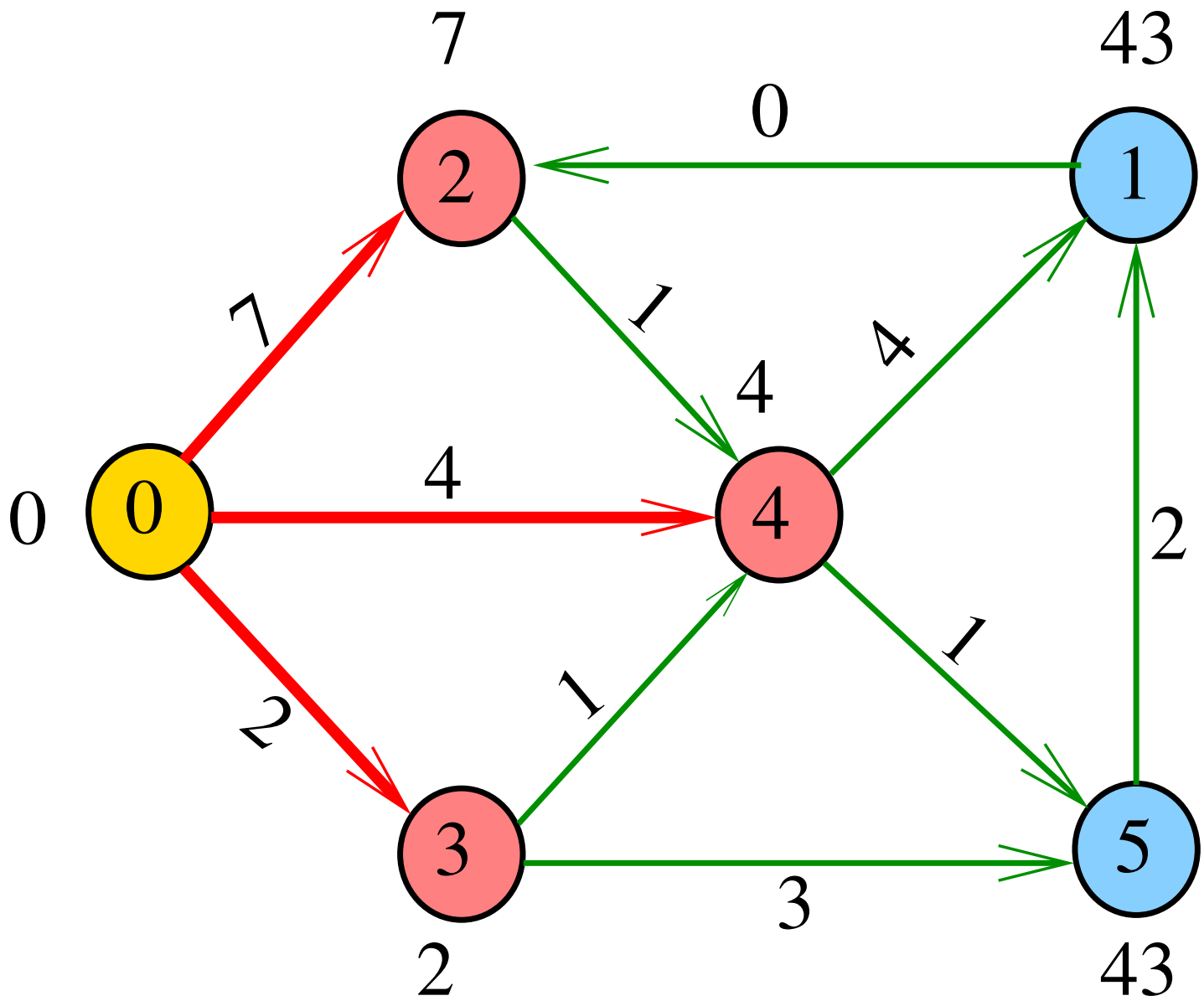
Simulação



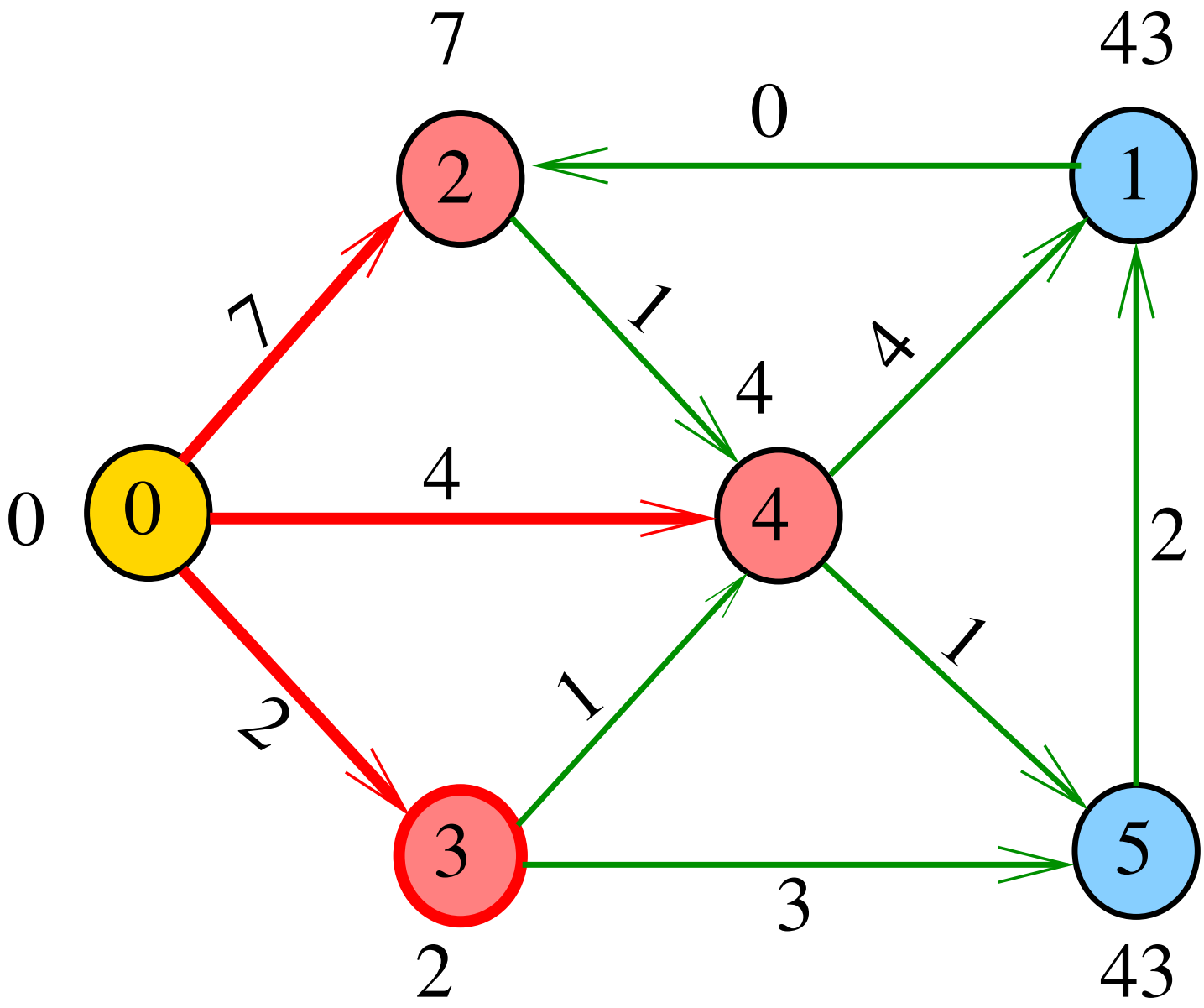
Simulação



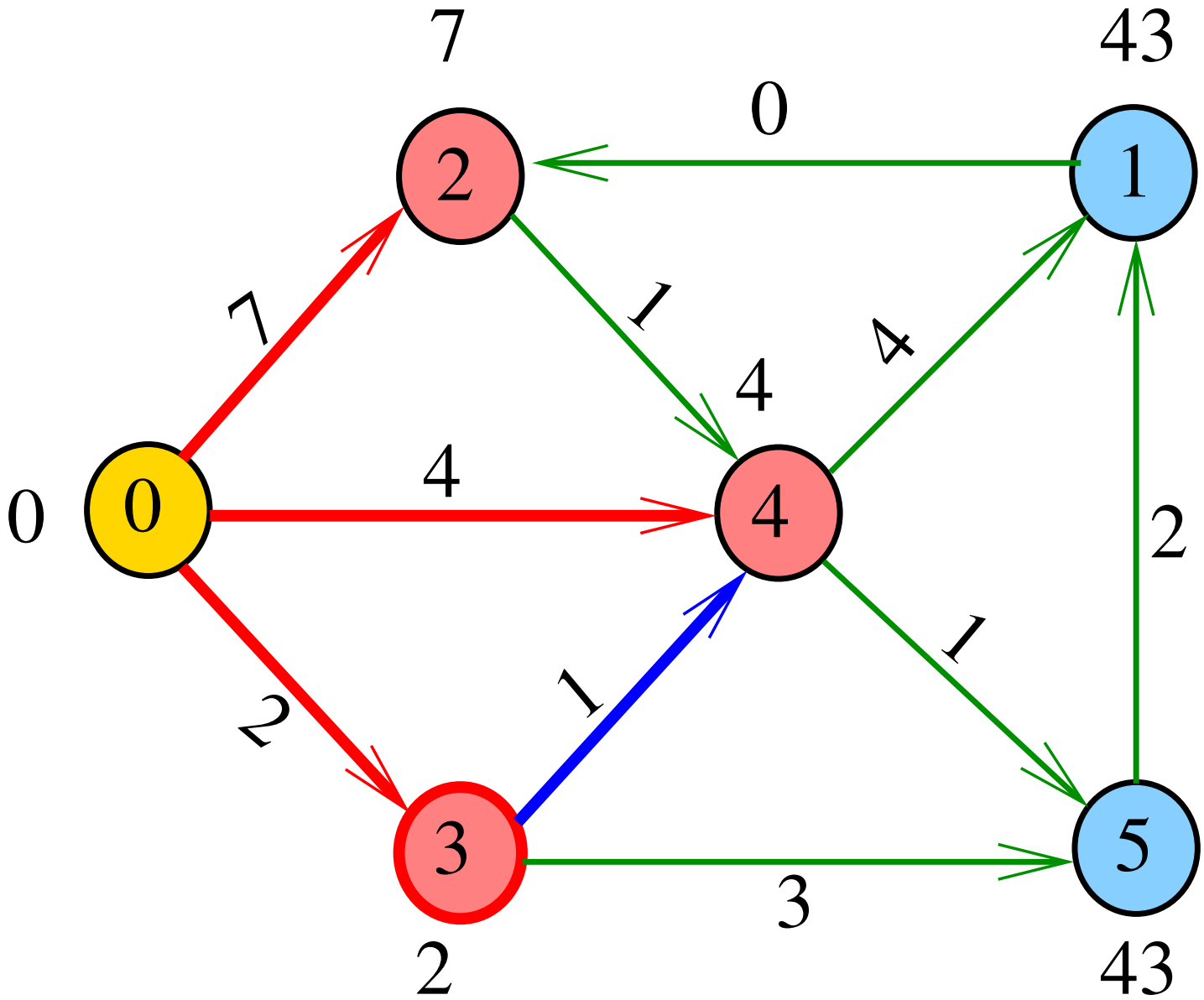
Simulação



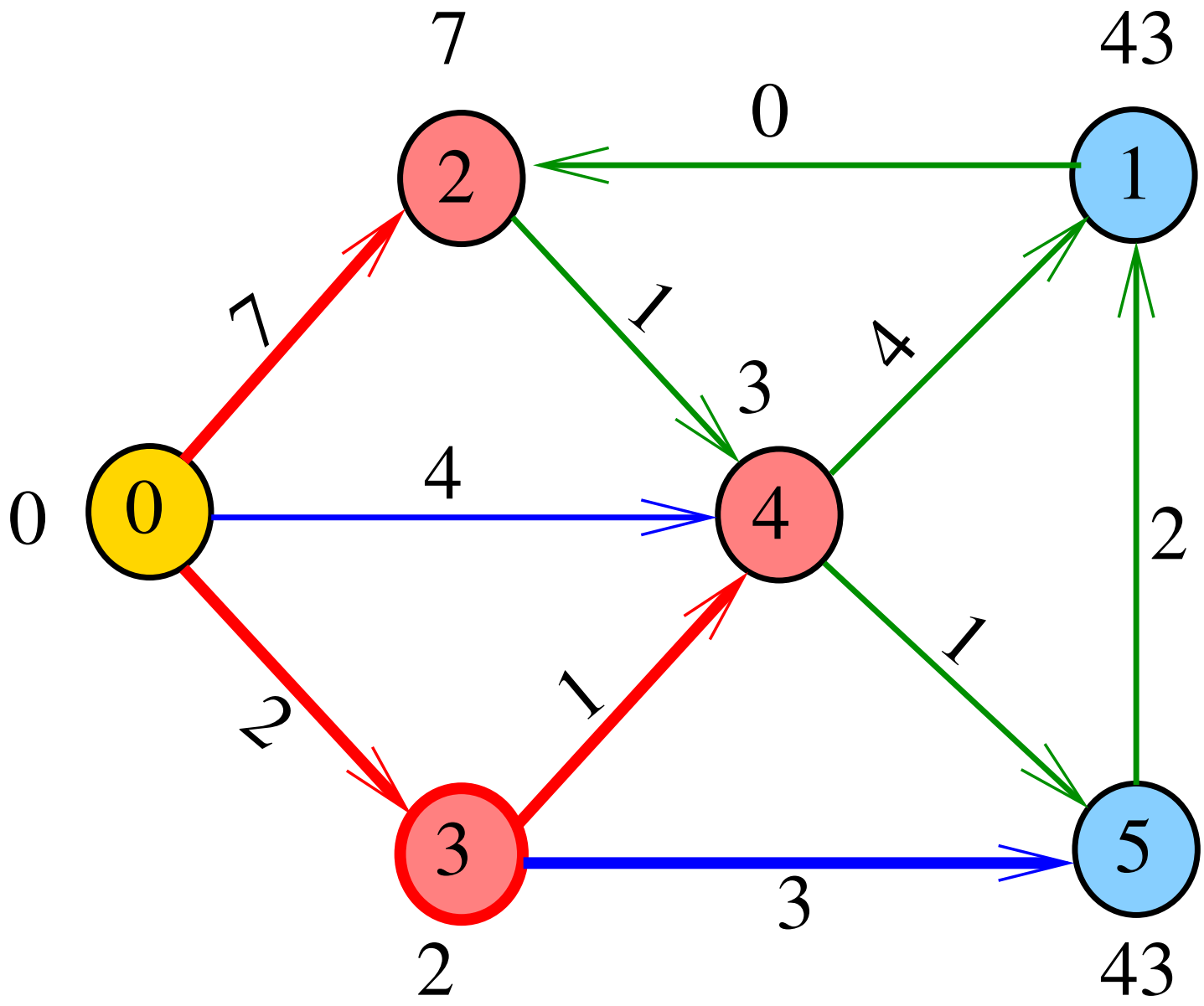
Simulação



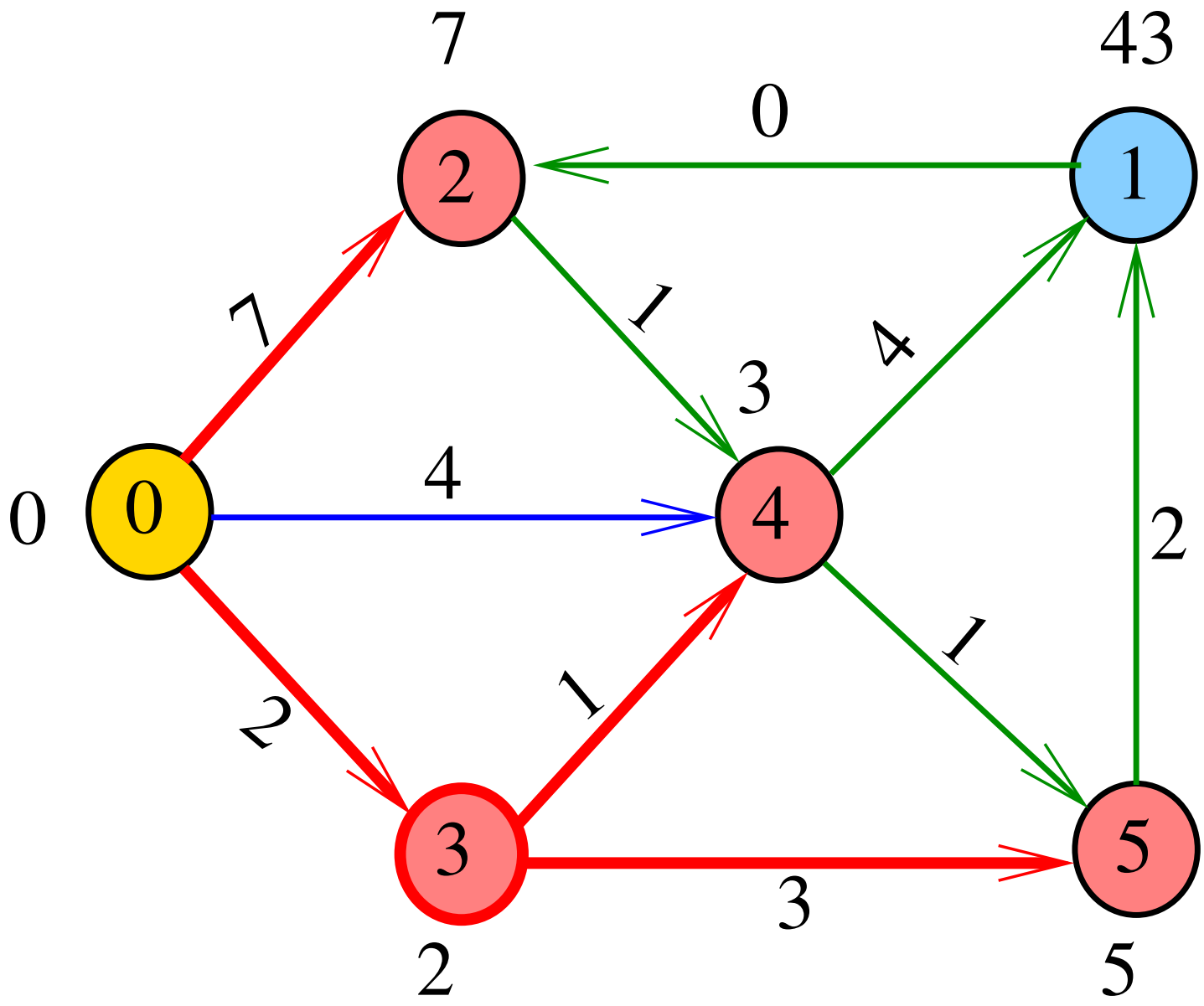
Simulação



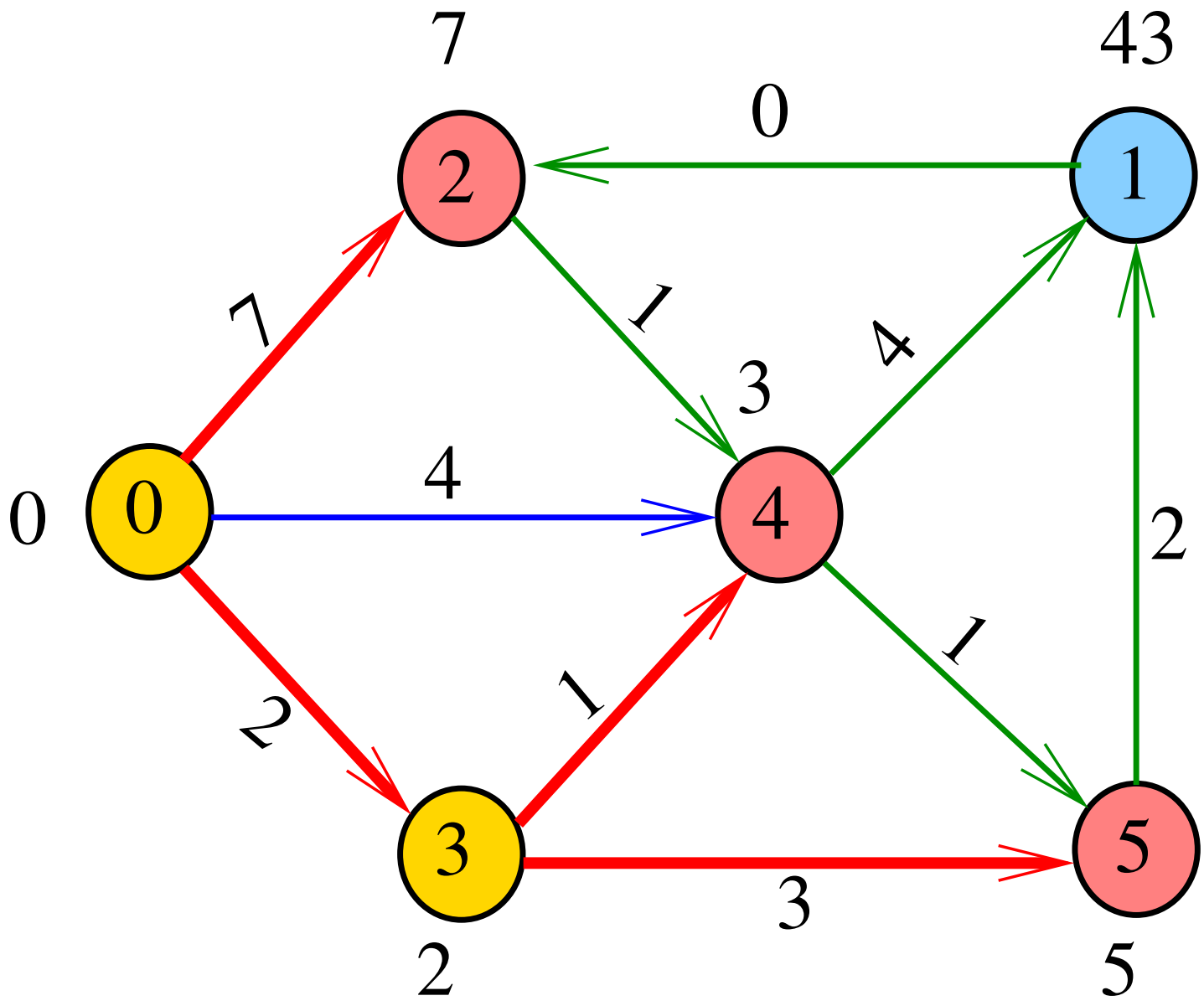
Simulação



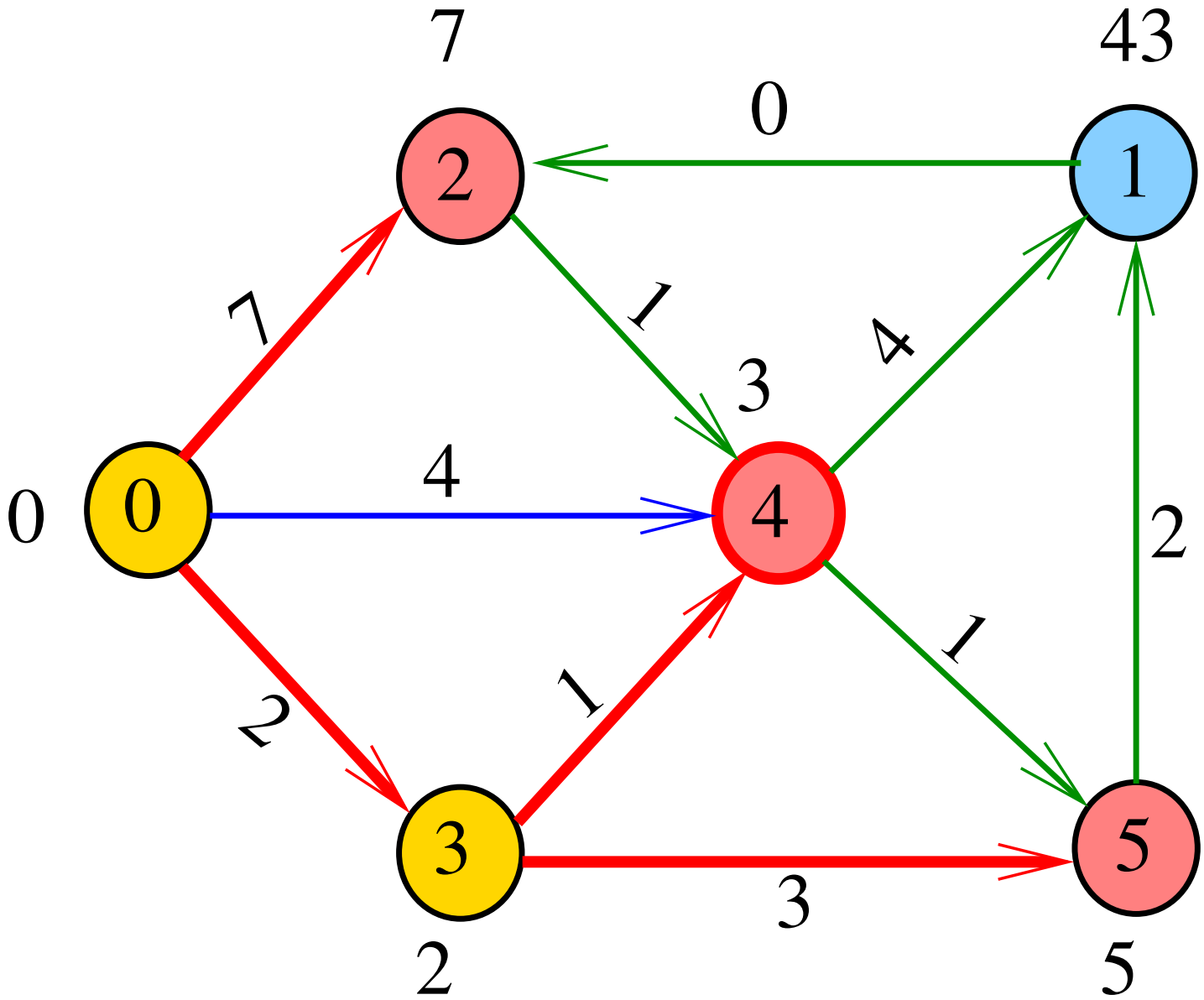
Simulação



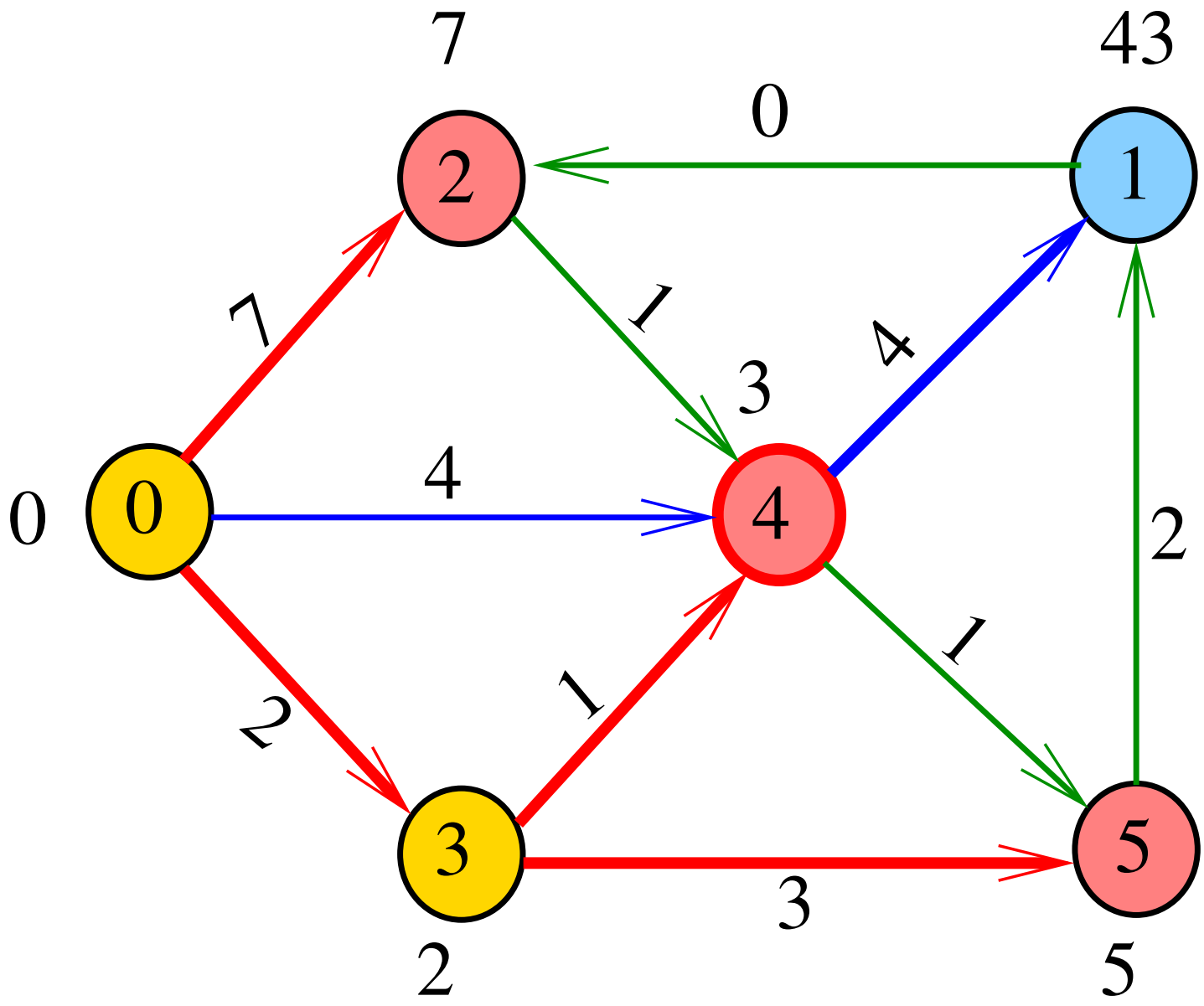
Simulação



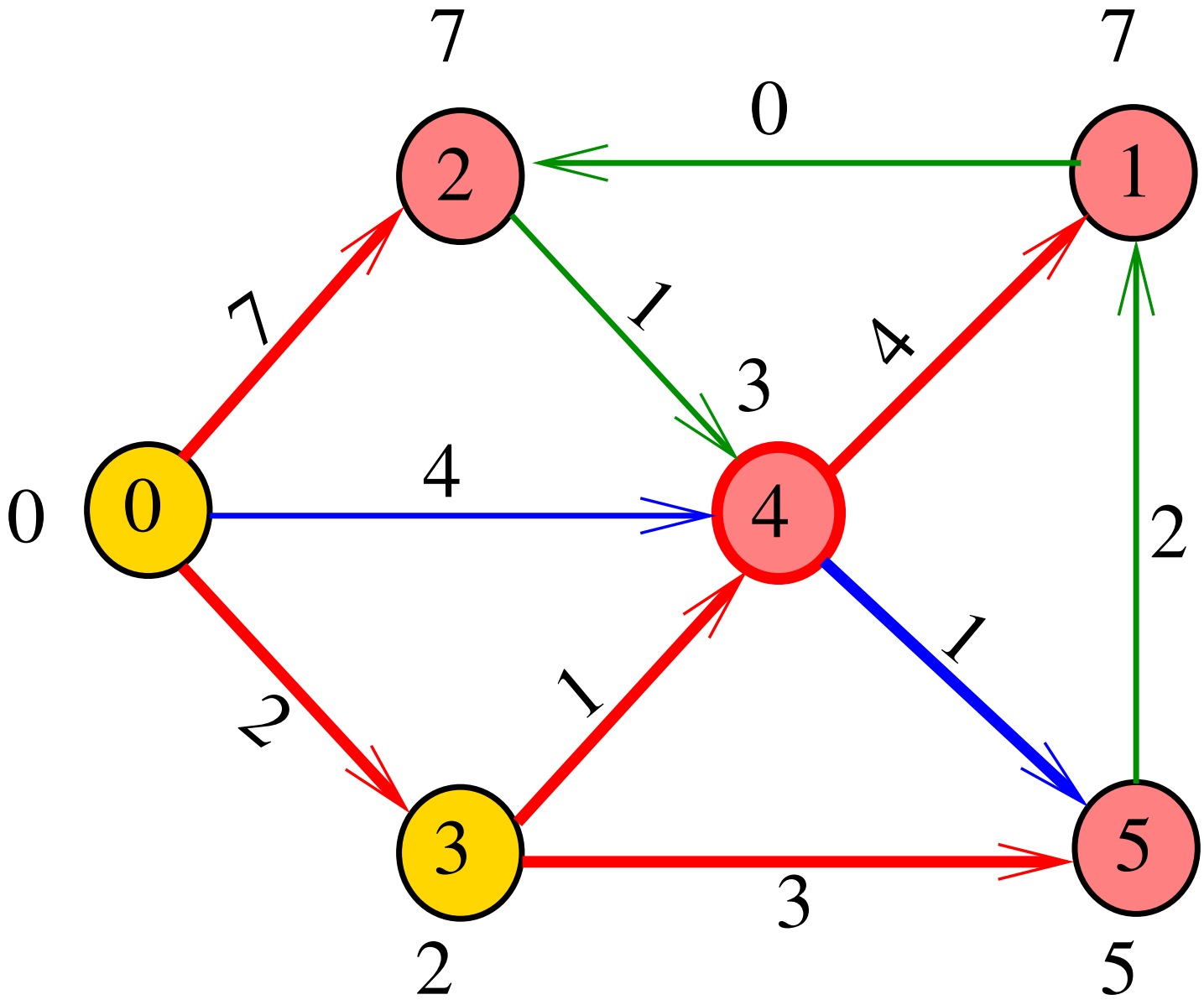
Simulação



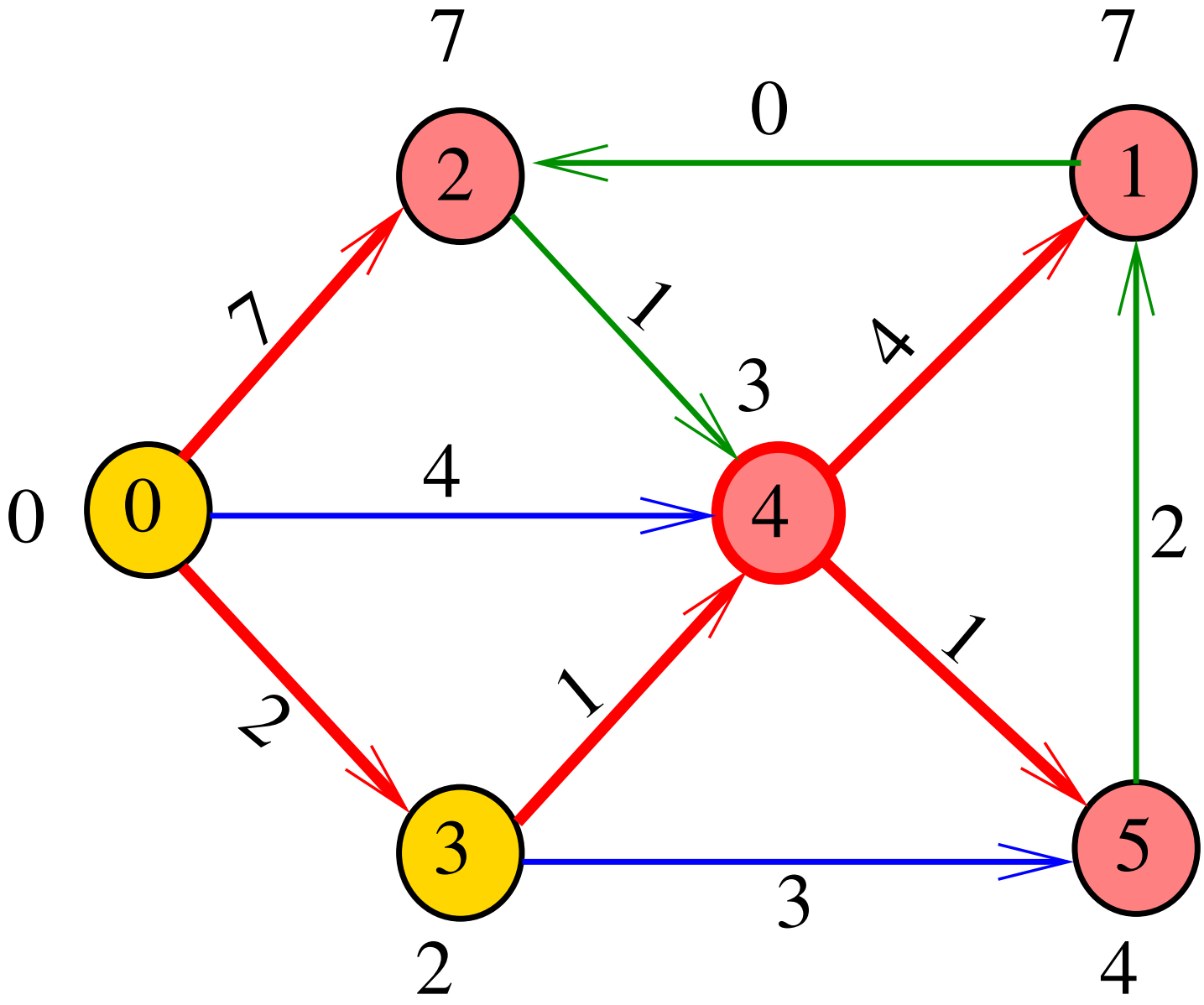
Simulação



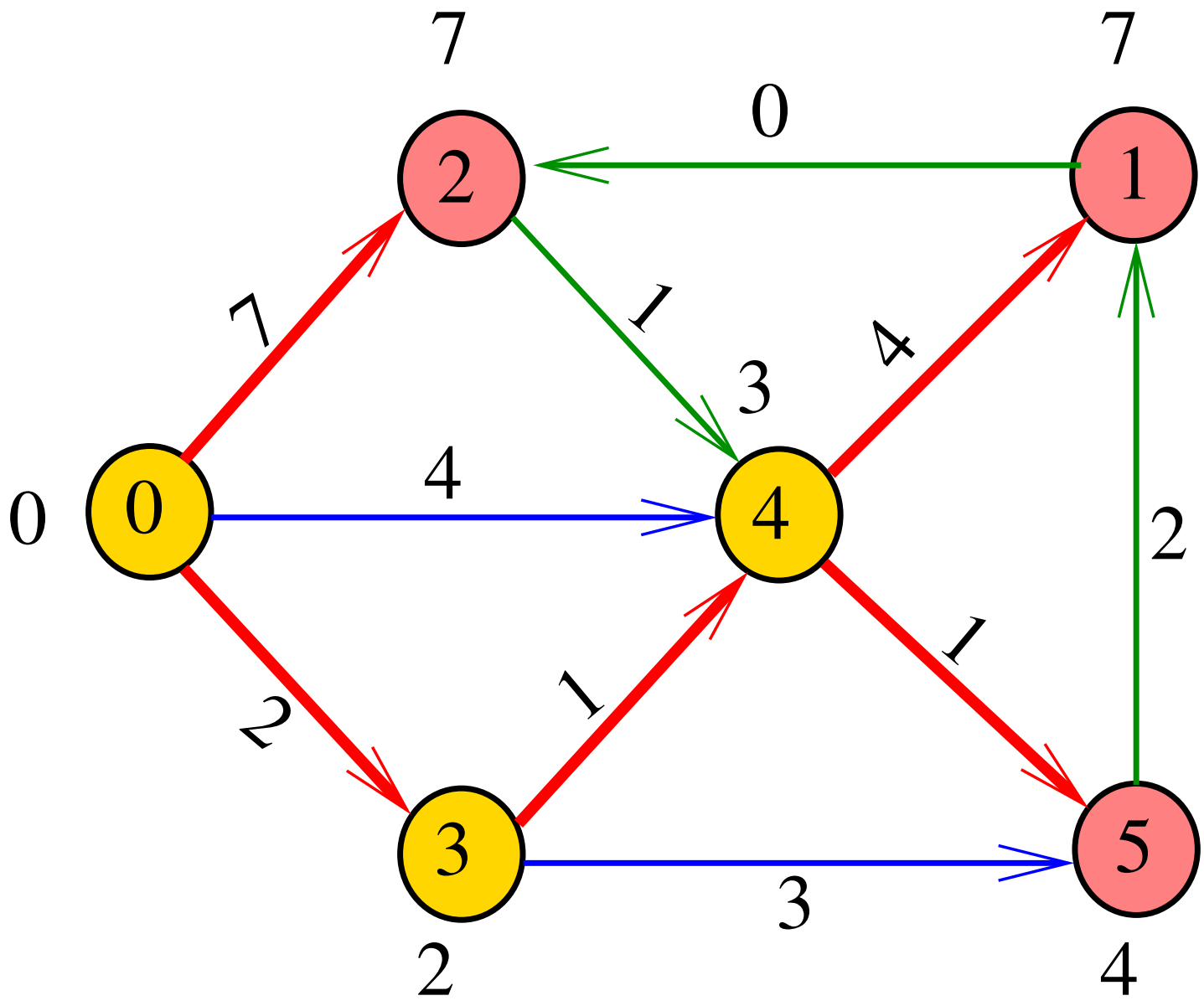
Simulação



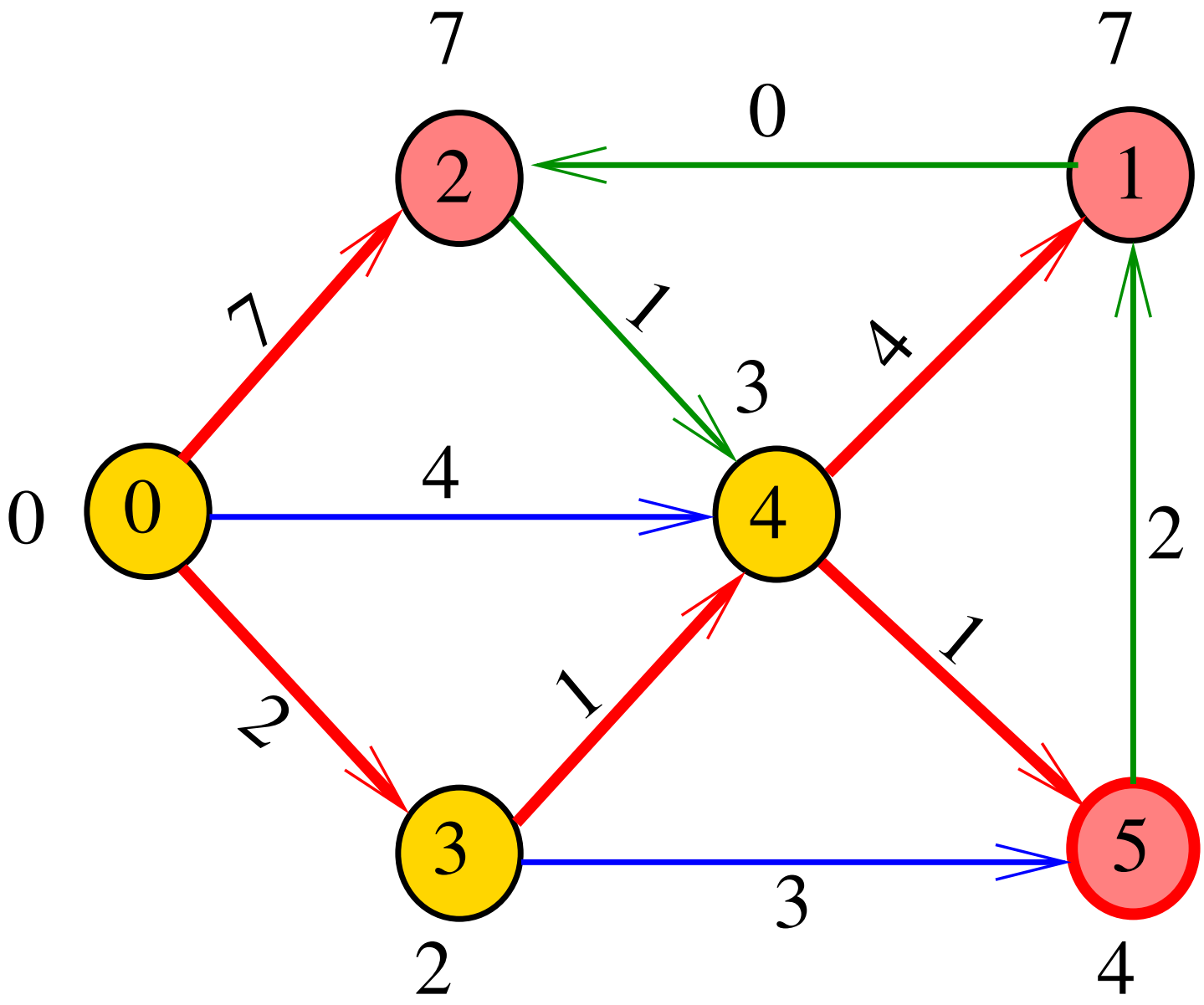
Simulação



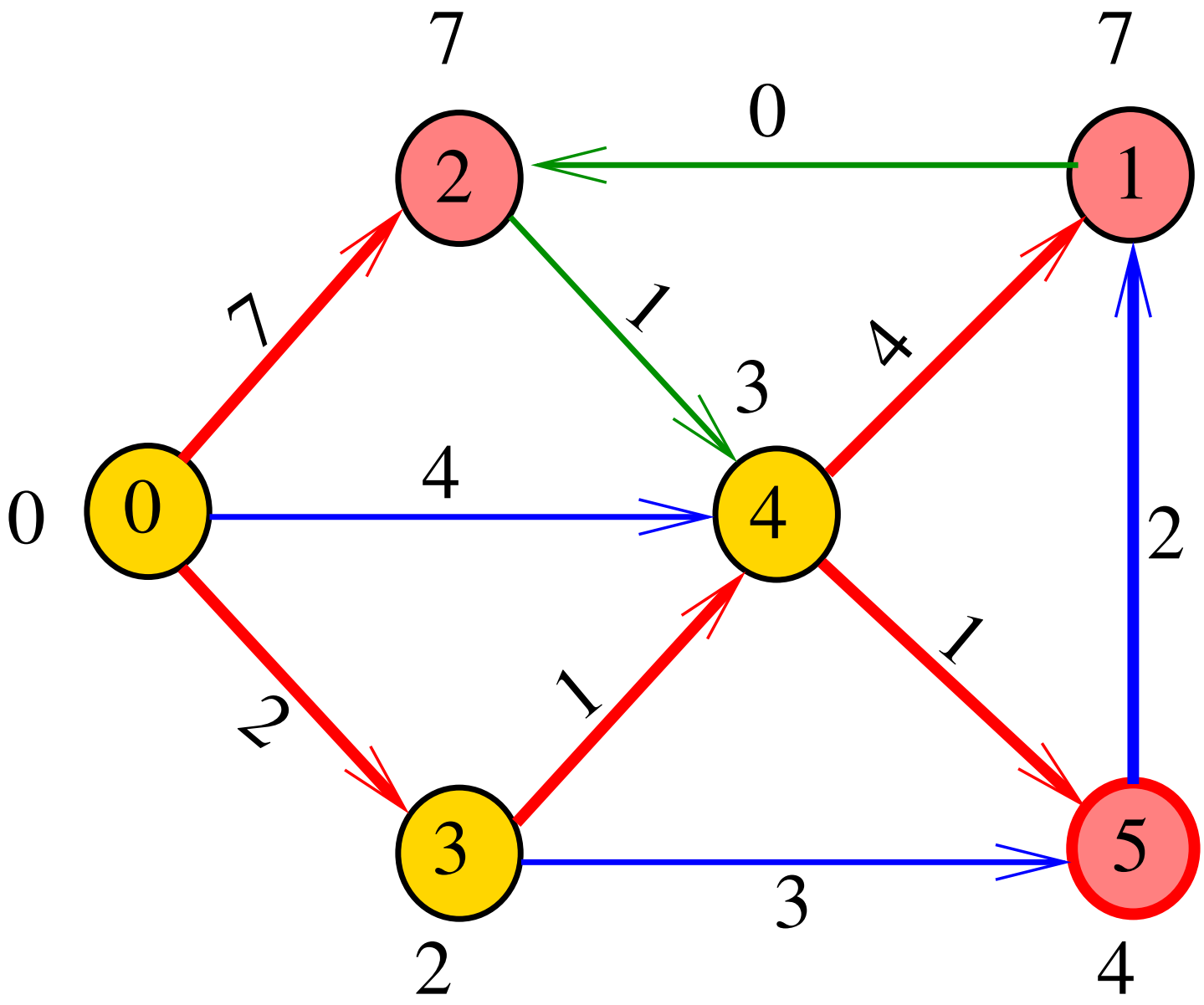
Simulação



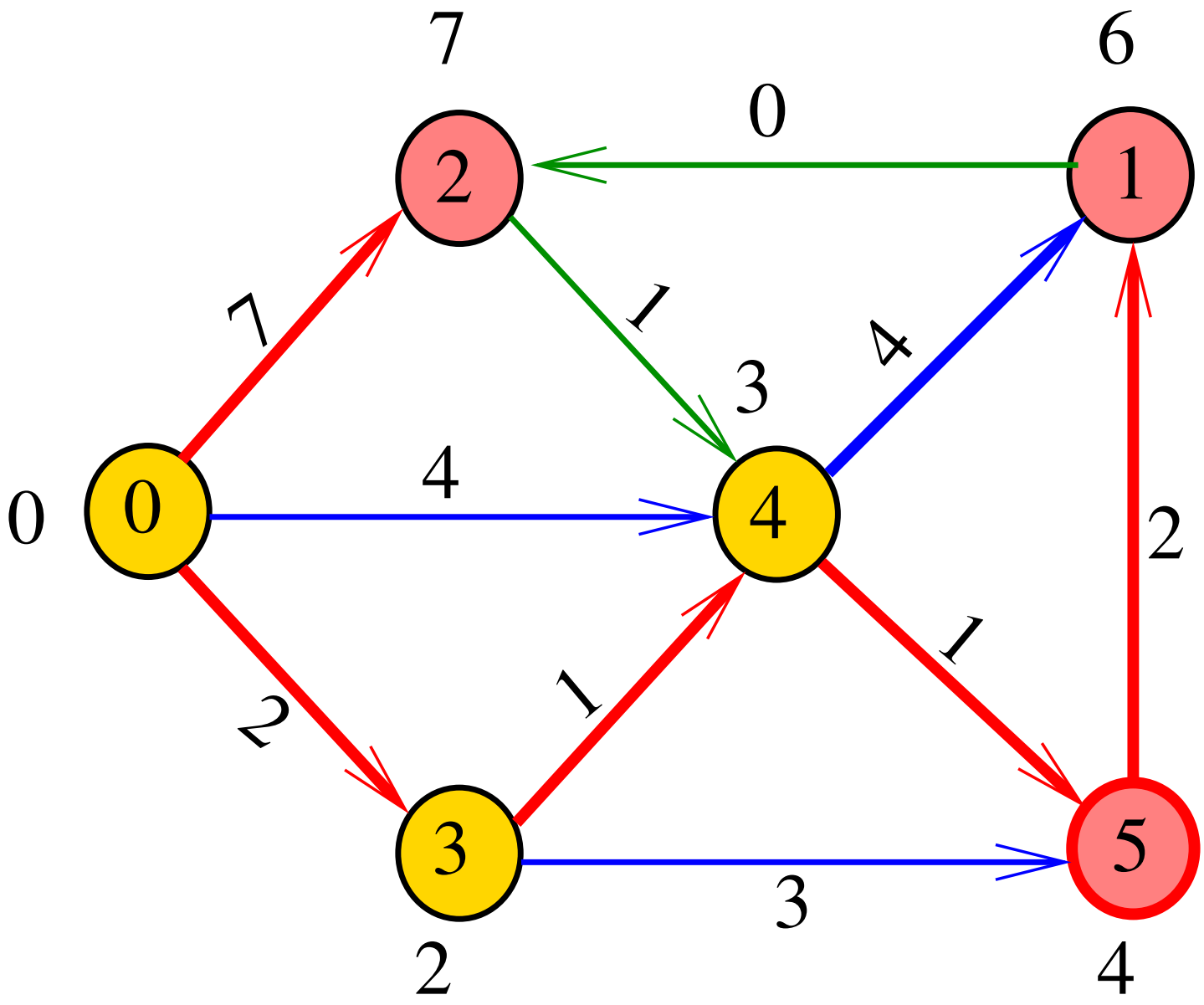
Simulação



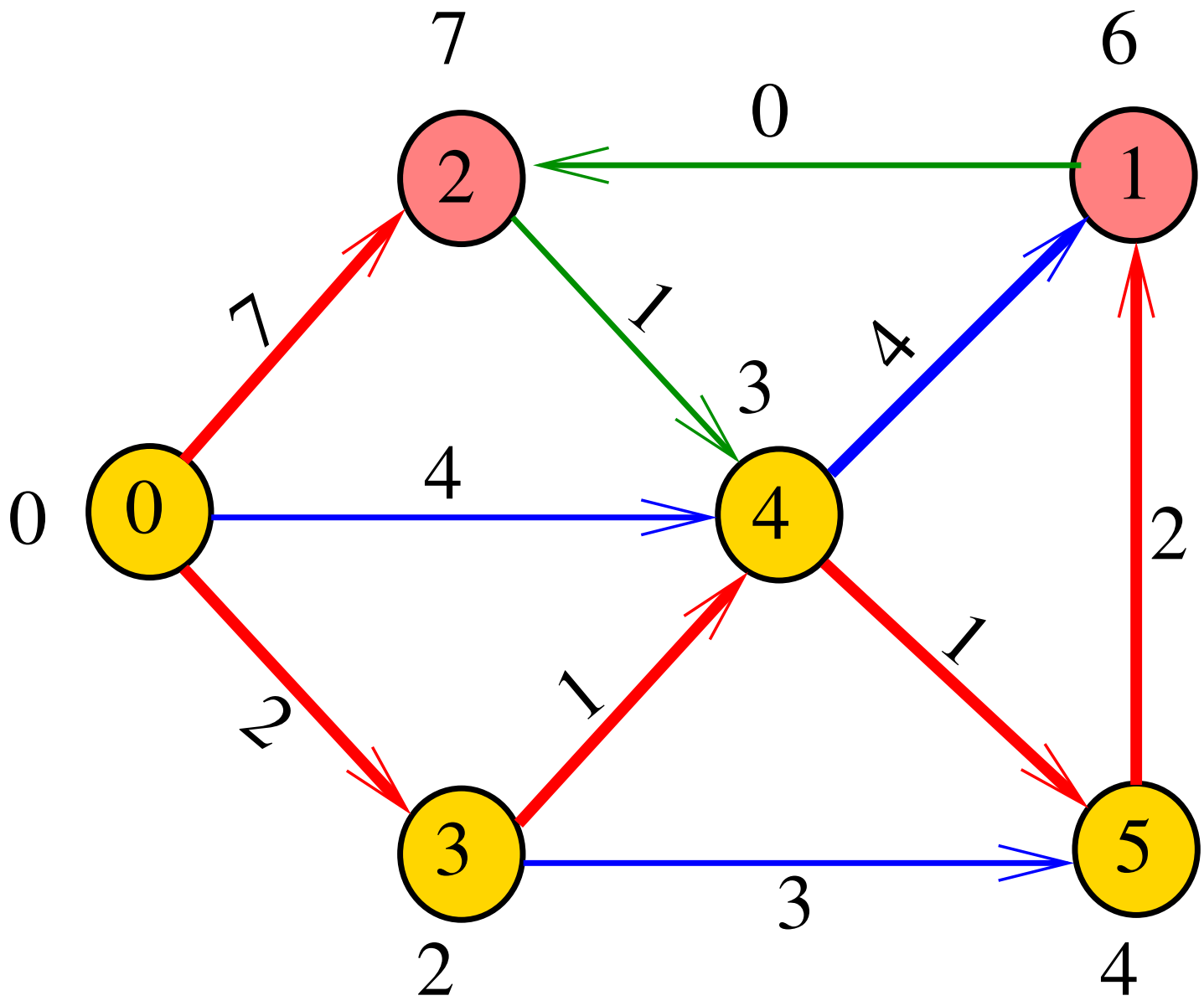
Simulação



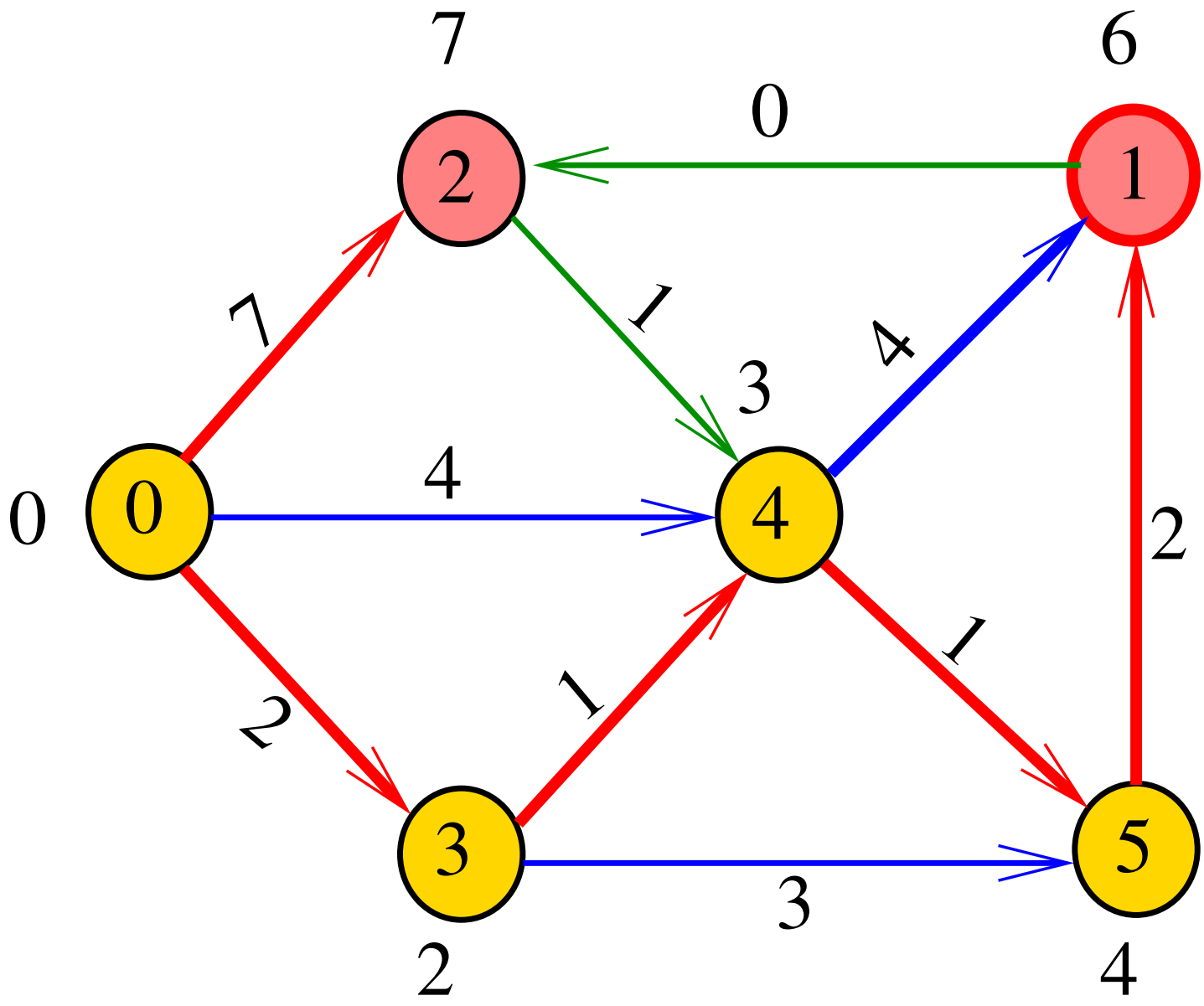
Simulação



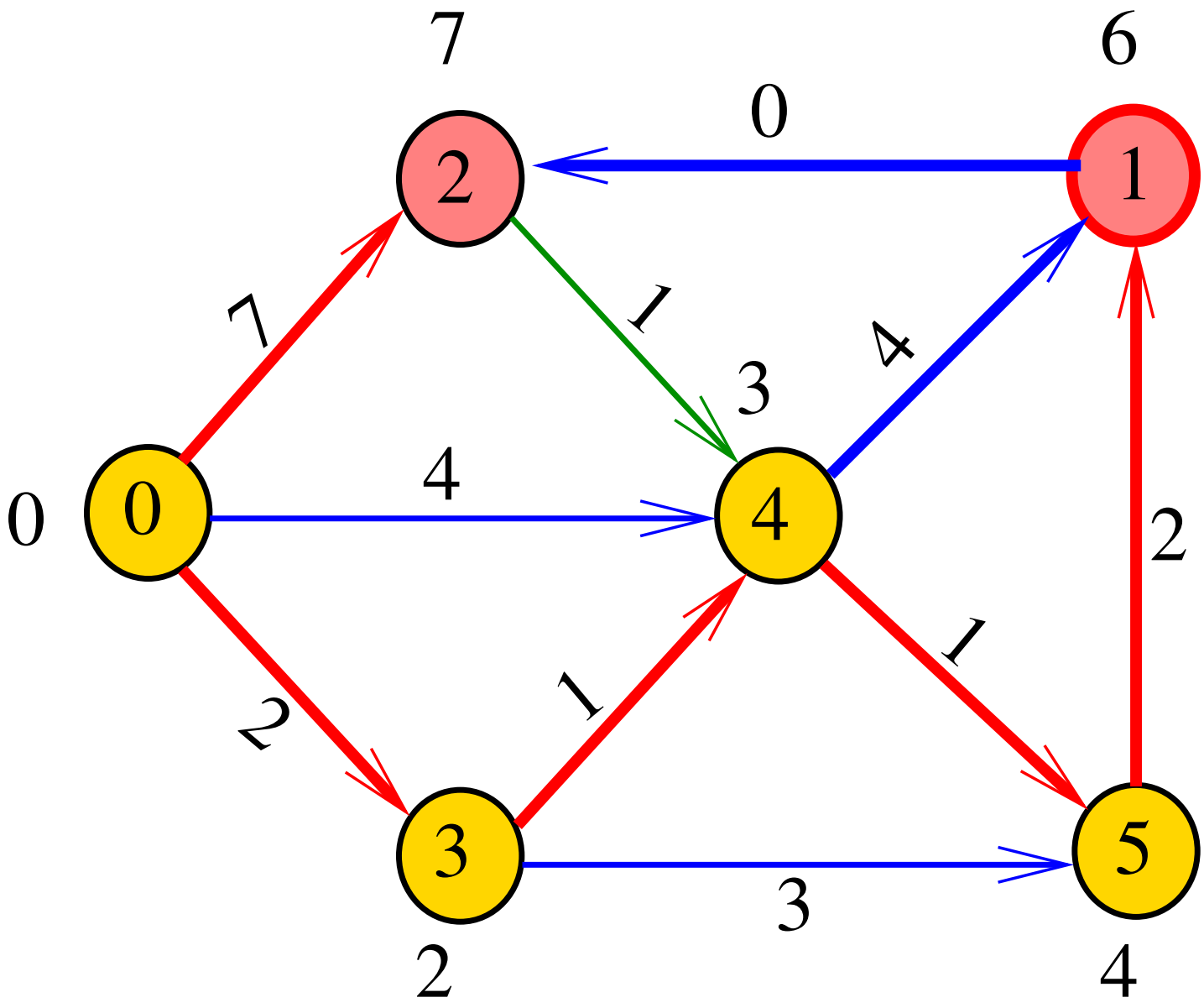
Simulação



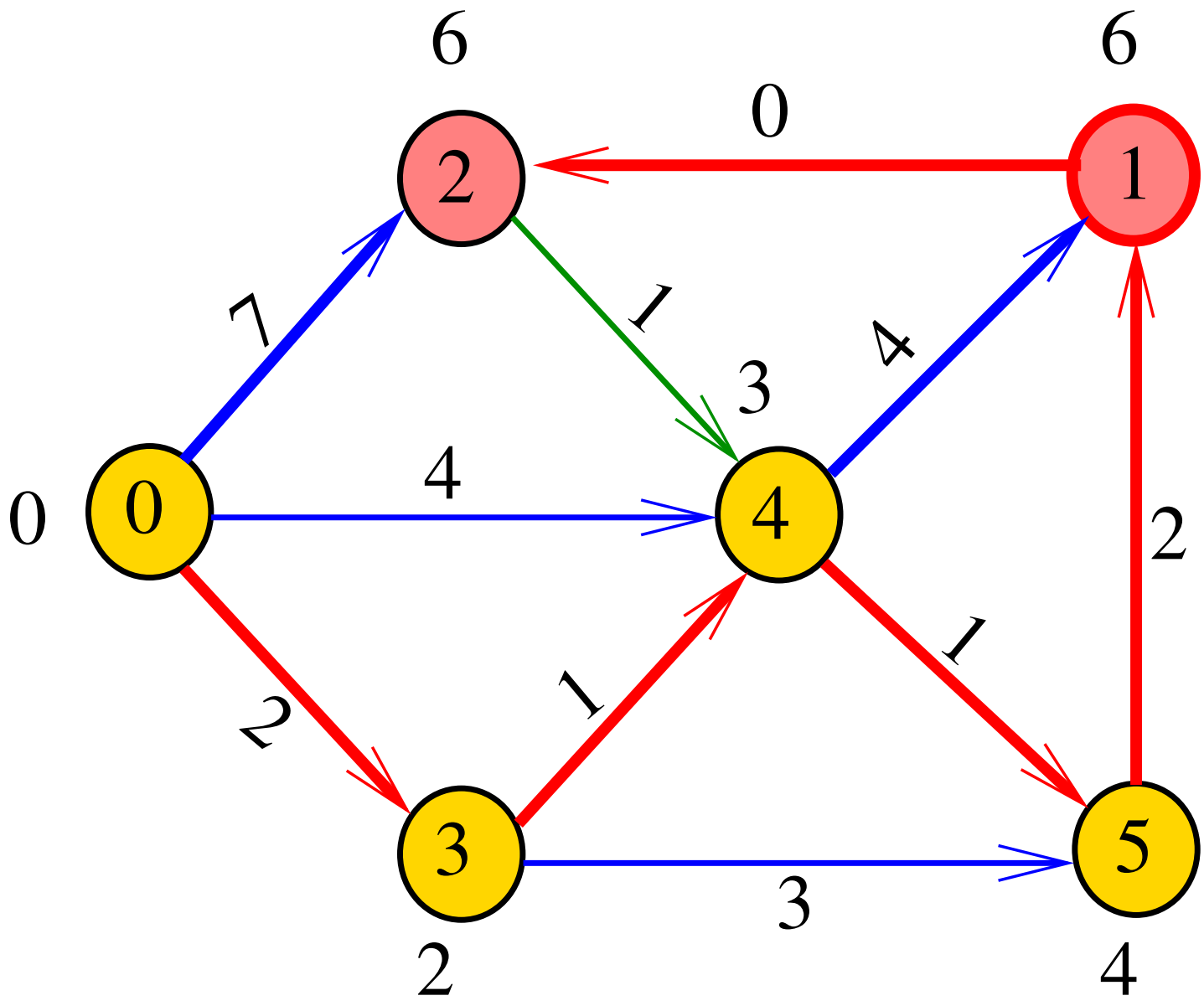
Simulação



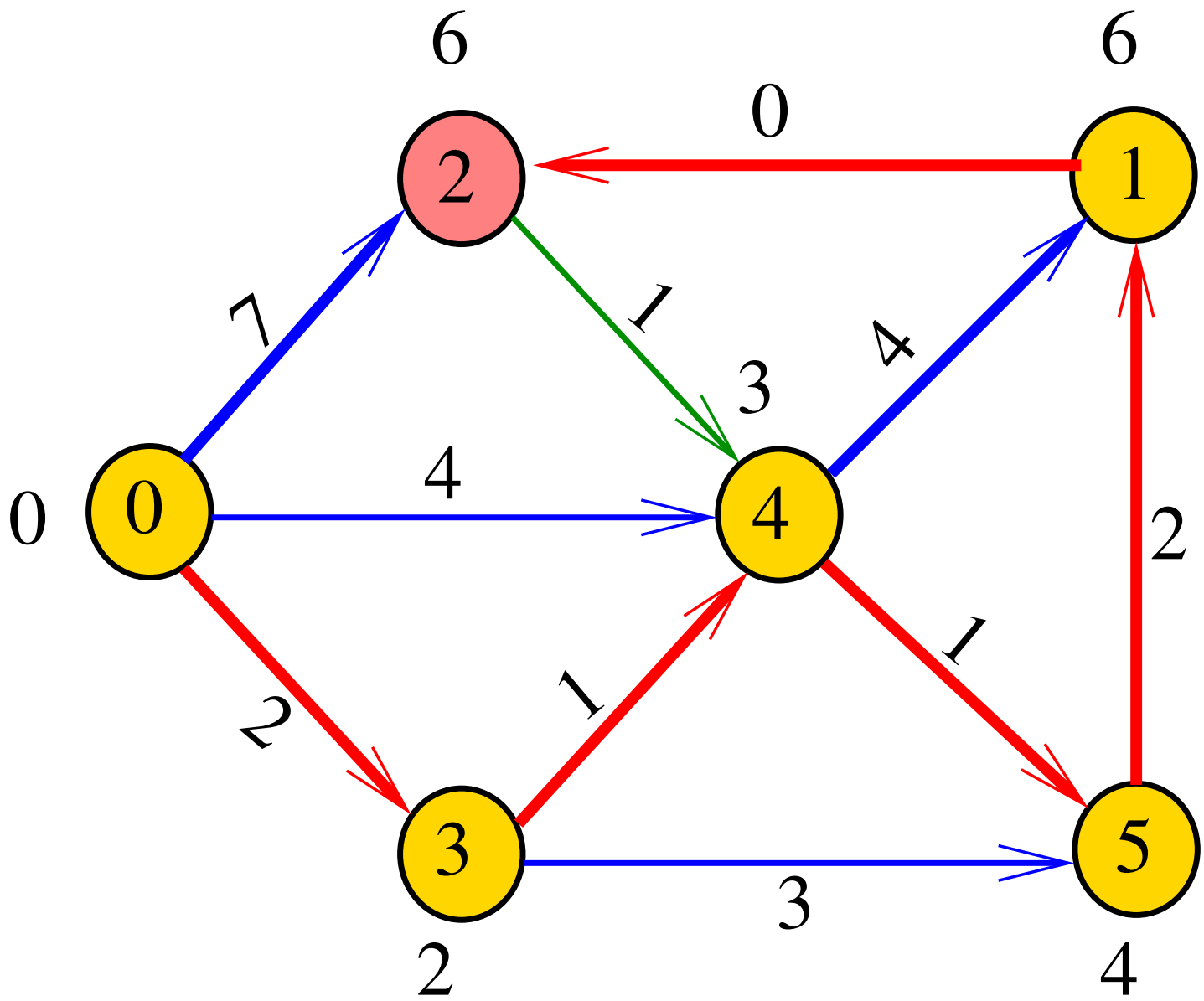
Simulação



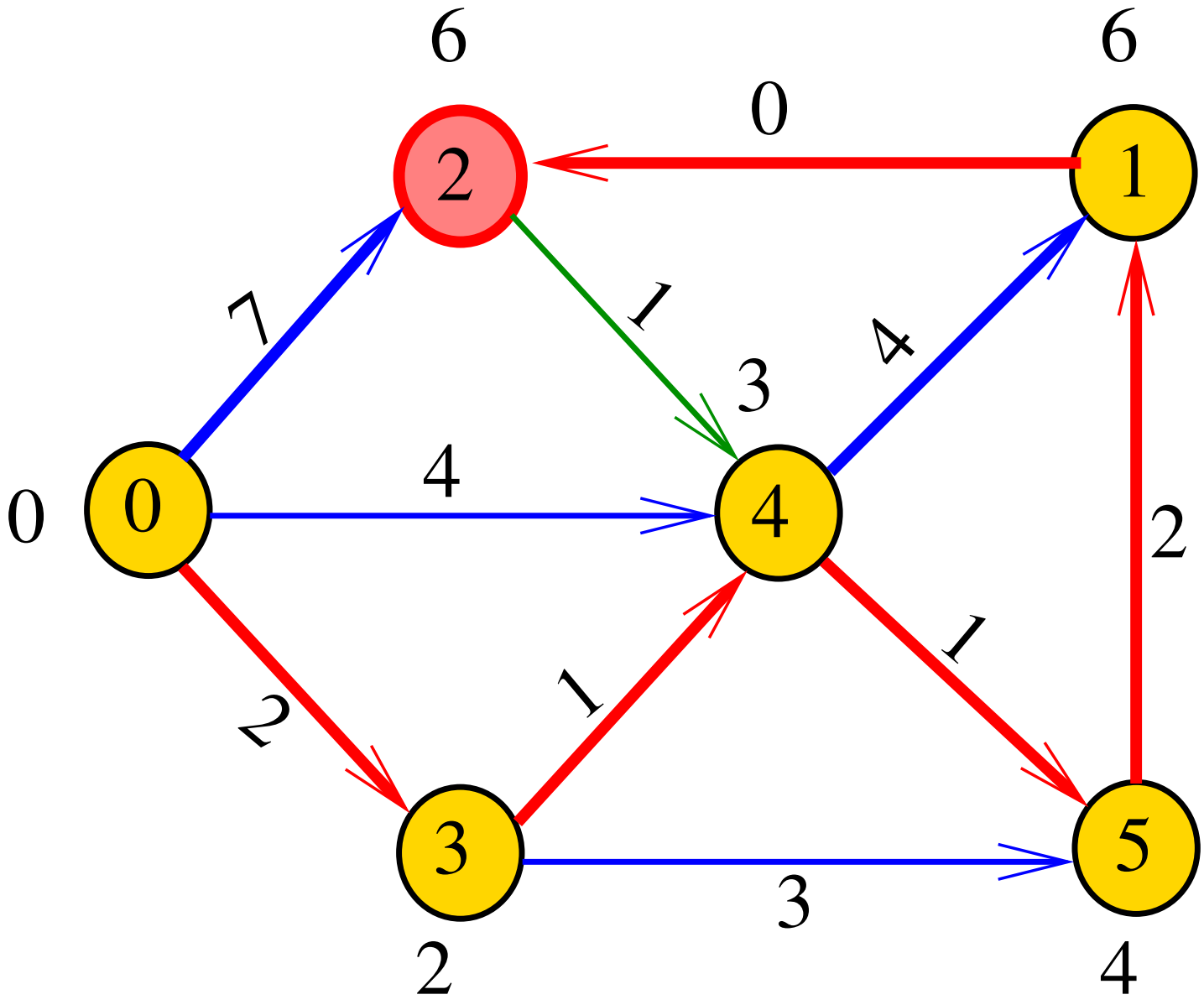
Simulação



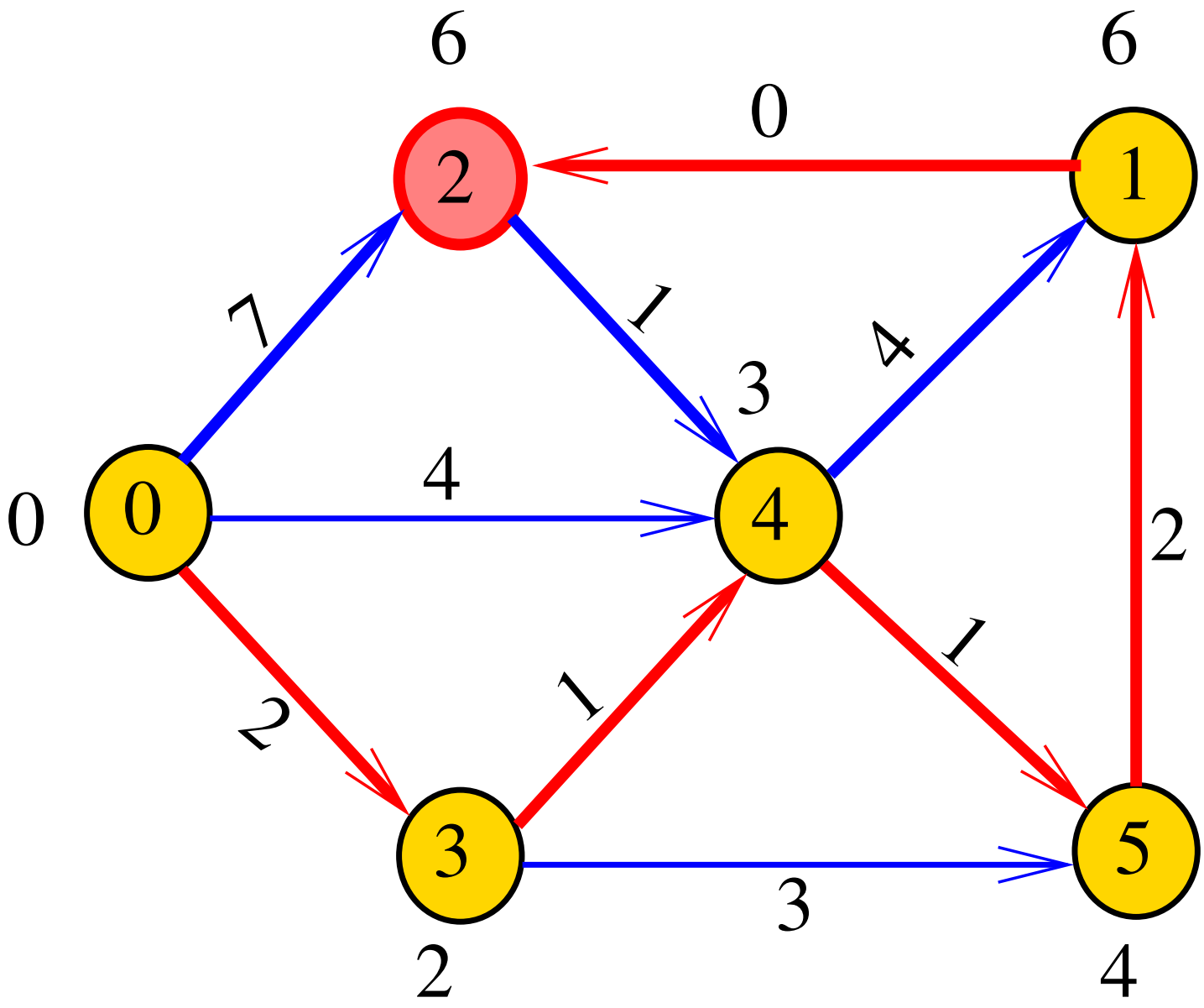
Simulação



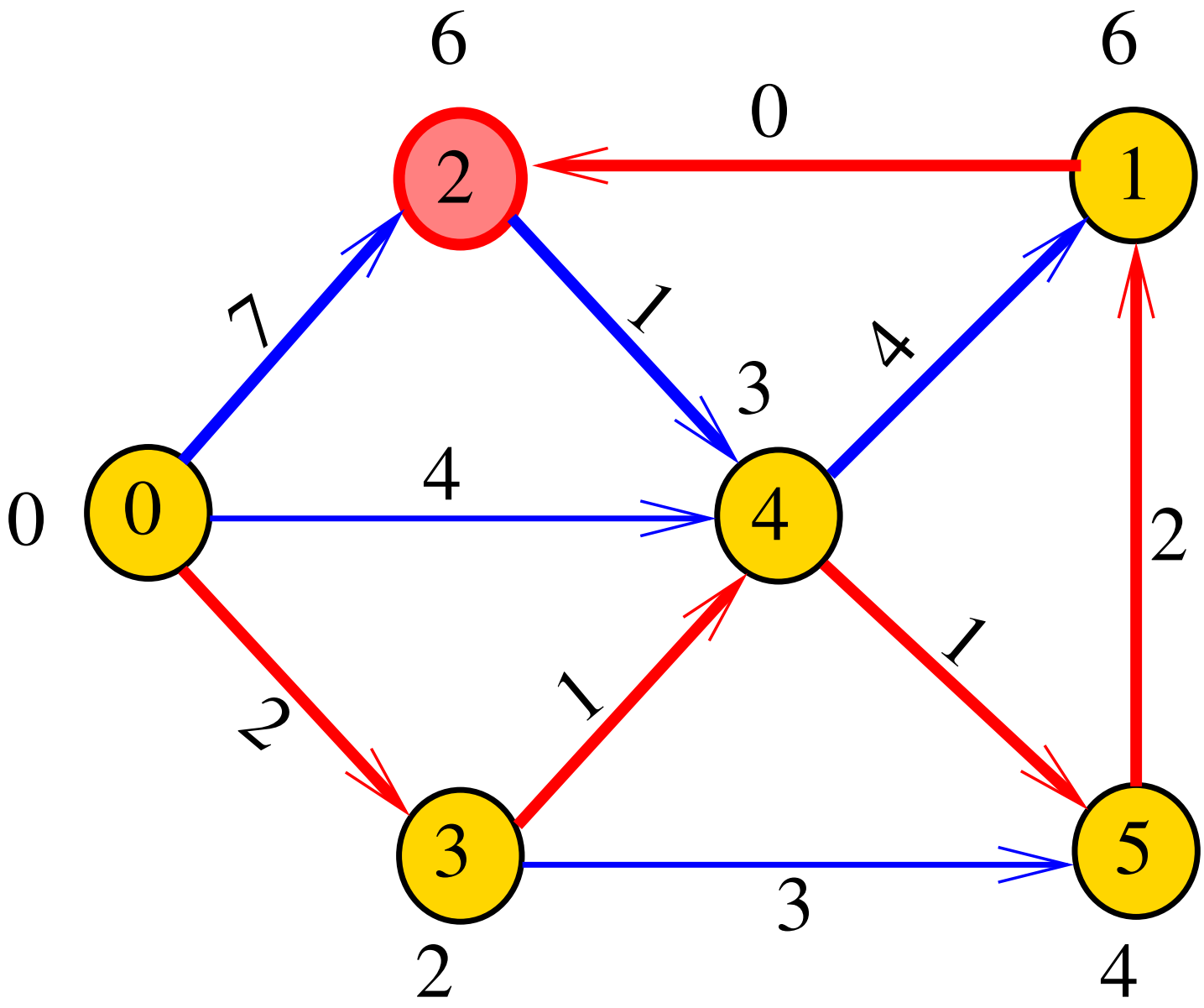
Simulação



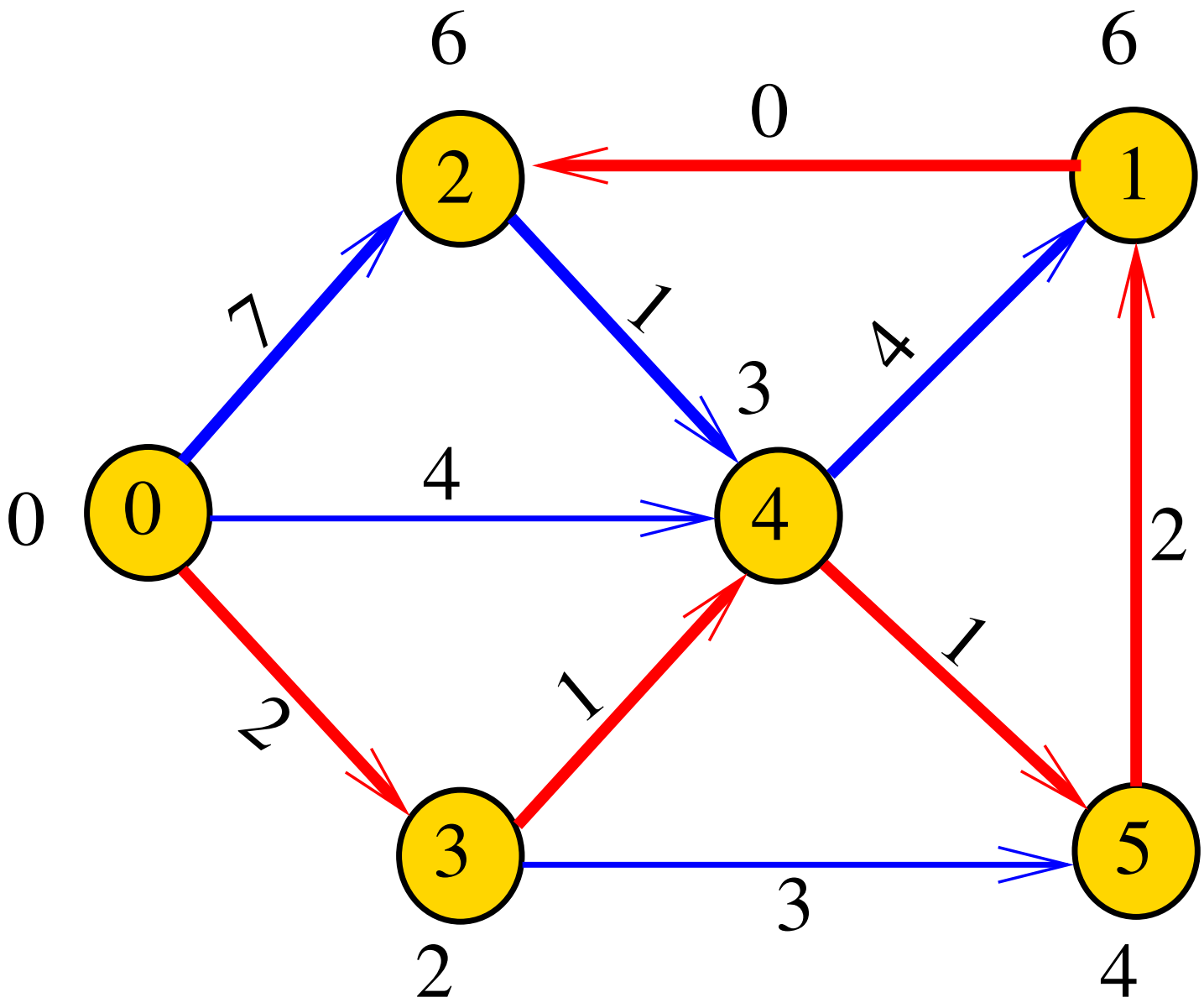
Simulação



Simulação



Simulação



DijkstraSP

Recebe digrafo G com custos não-negativos nos arcos e um vértice s
Calcula uma arborescência de caminhos mínimos com raiz s.
A arborescência é armazenada no vetor edgeTo
As distâncias em relação a s são armazenadas no vetor distTo

```
private double[] distTo;
private DirectedEdge[] edgeTo;
```

Fila com prioridades

A classe `DijkstraSP` usa uma fila com prioridades

```
private IndexMinPQ<Double> pq;
```

A fila é manipulada pelos métodos:

- `IndexMinPQ<Double>()`: crie uma fila de vértices em que cada vértice `v` tem prioridade `distTo[v]`
- `isEmpty()`: a fila está vazia?
- `contains(v)`: `v` está na fila?
- `insert(v,valor)`: insere `v` com prior. `valor`
- `delMin()`: retorna o um vértice de prioridade mínima.
- `decreaseKey(w,valor)`: reorganiza a fila depois que o valor de `distTo[w]` foi decrementado.

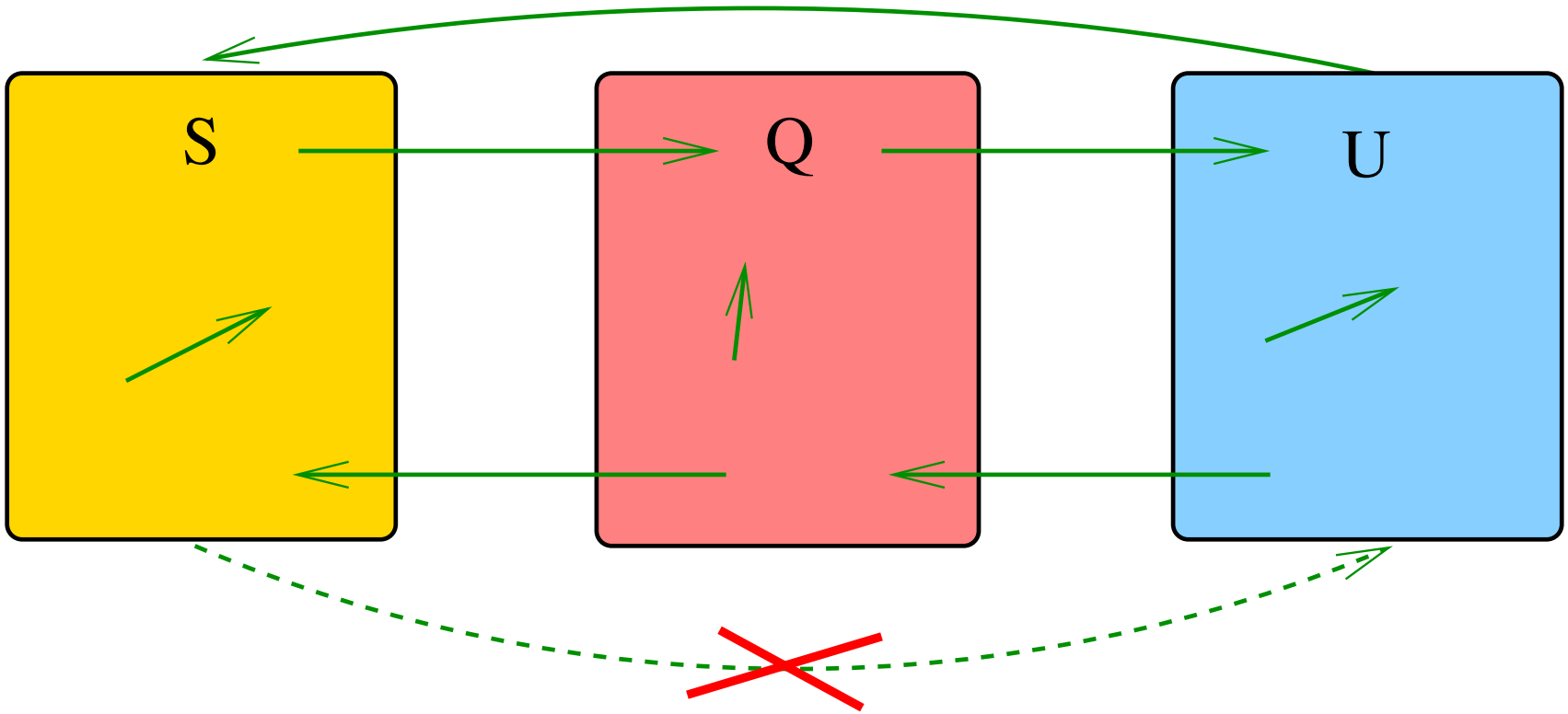
Relações invariantes

S = vértices examinados

Q = vértices visitados = vértices na fila

U = vértices ainda não visitados

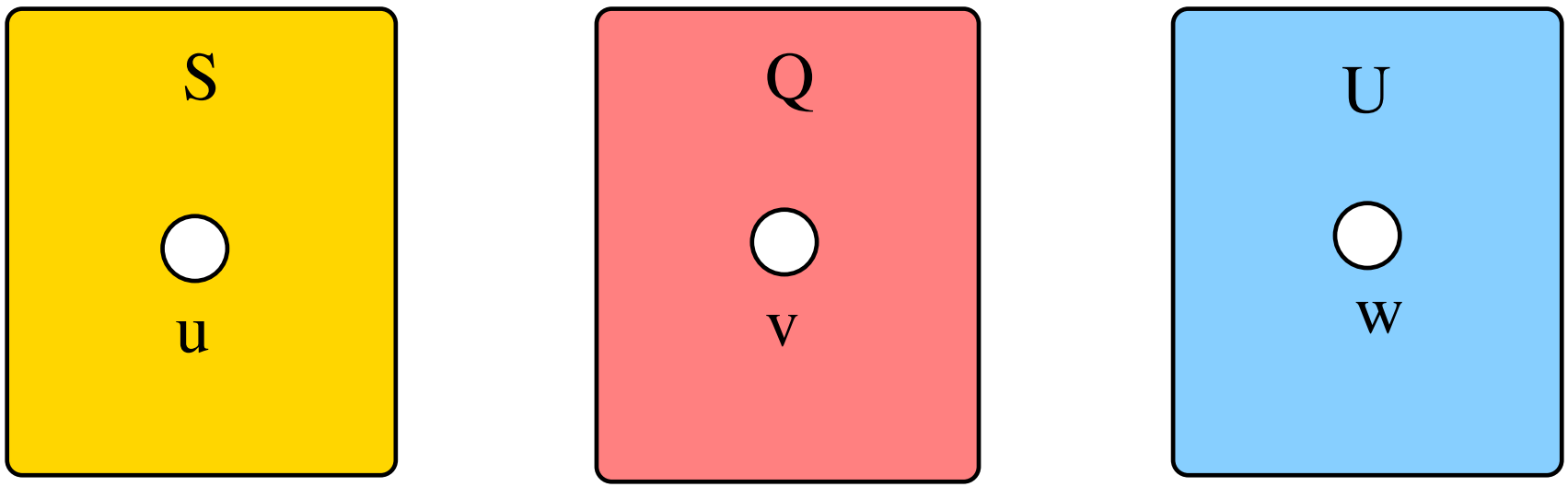
(i0) não existe arco v-w com v em S e w em U



Relações invariantes

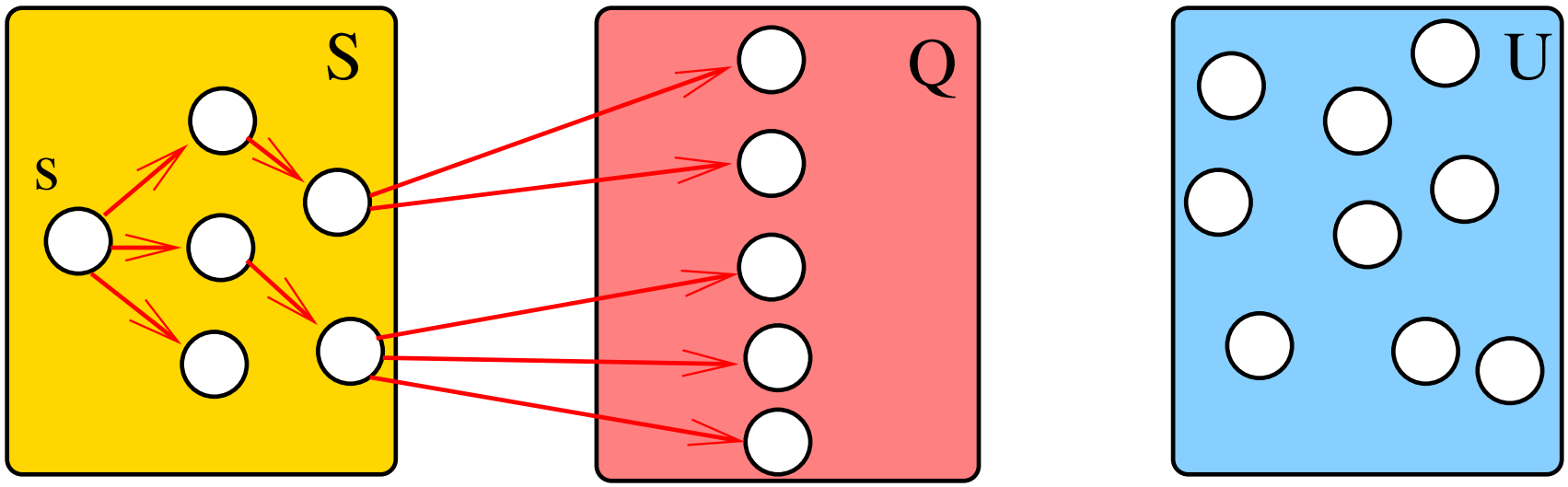
(i1) para cada `u` em `S`, `v` em `Q` e `w` em `U`

$$\texttt{distTo[u]} \leq \texttt{distTo[v]} \leq \texttt{distTo[w]}$$



Relações invariantes

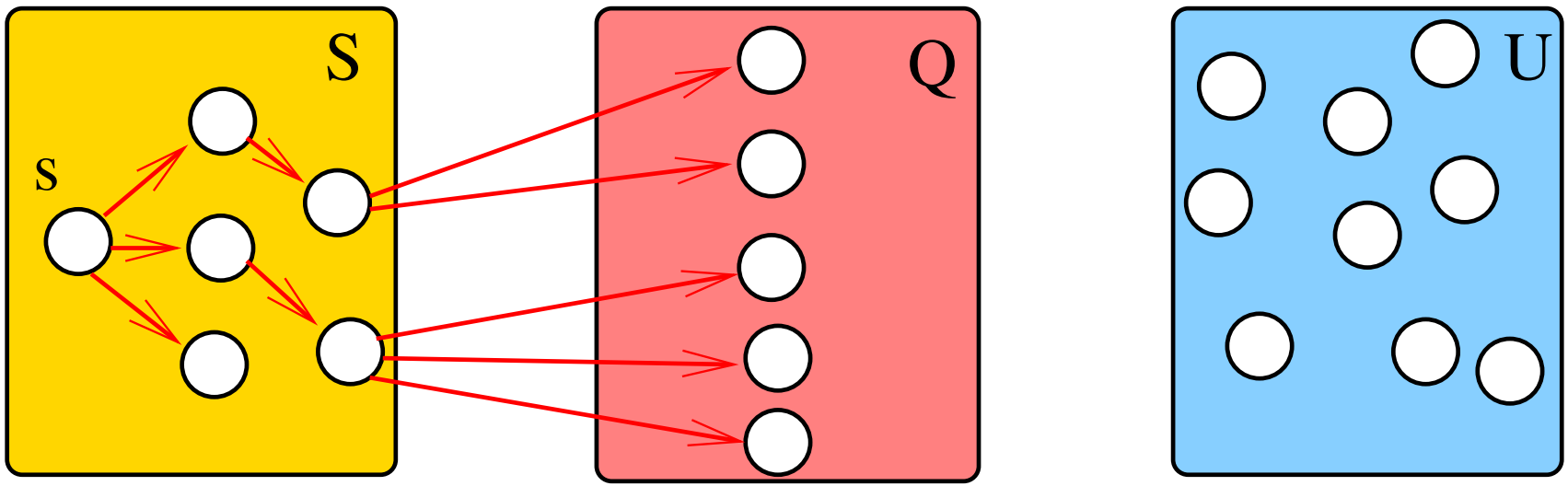
(i2) O vetor `edgeTo` restrito aos vértices de `S` e `Q` determina um árborescência com raiz `s`



Relações invariantes

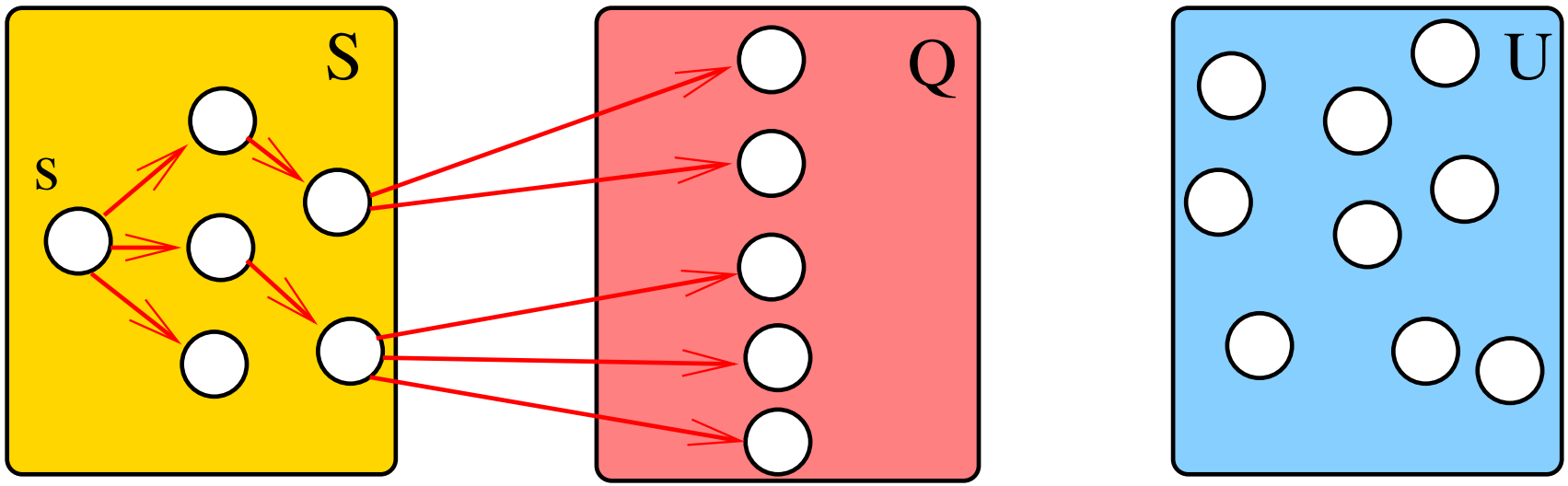
(i3) Para arco v-w na arborescência vale que

$$\texttt{distTo}[\texttt{w}] = \texttt{distTo}[\texttt{v}] + \text{custo do arco } \texttt{vw}$$

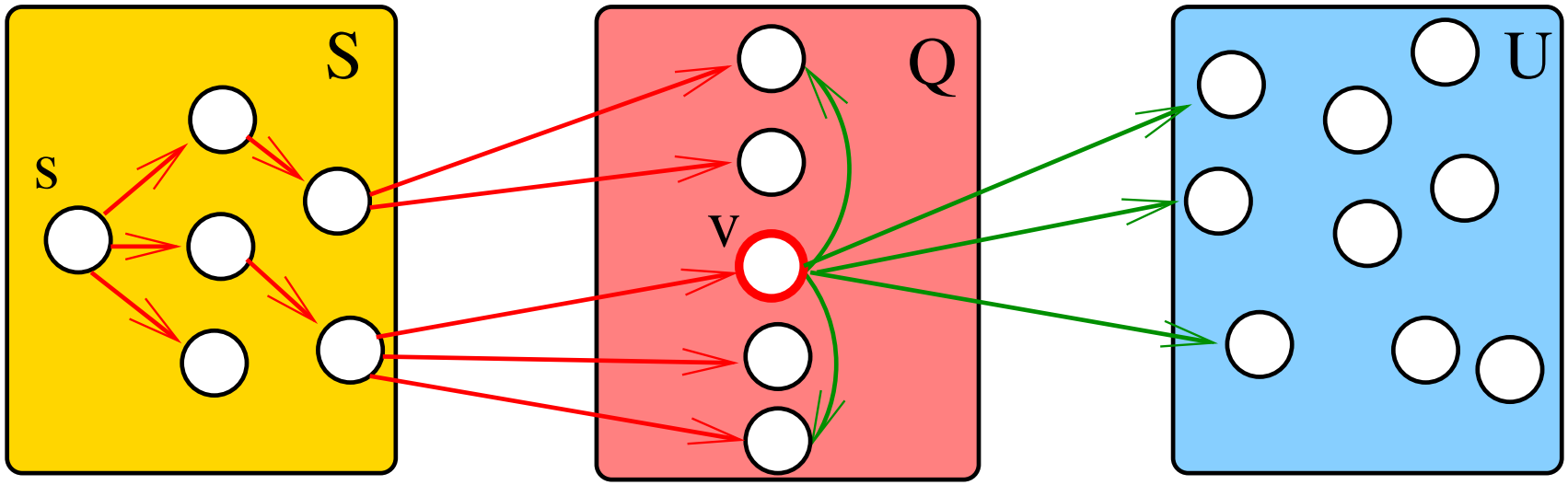


Relações invariantes

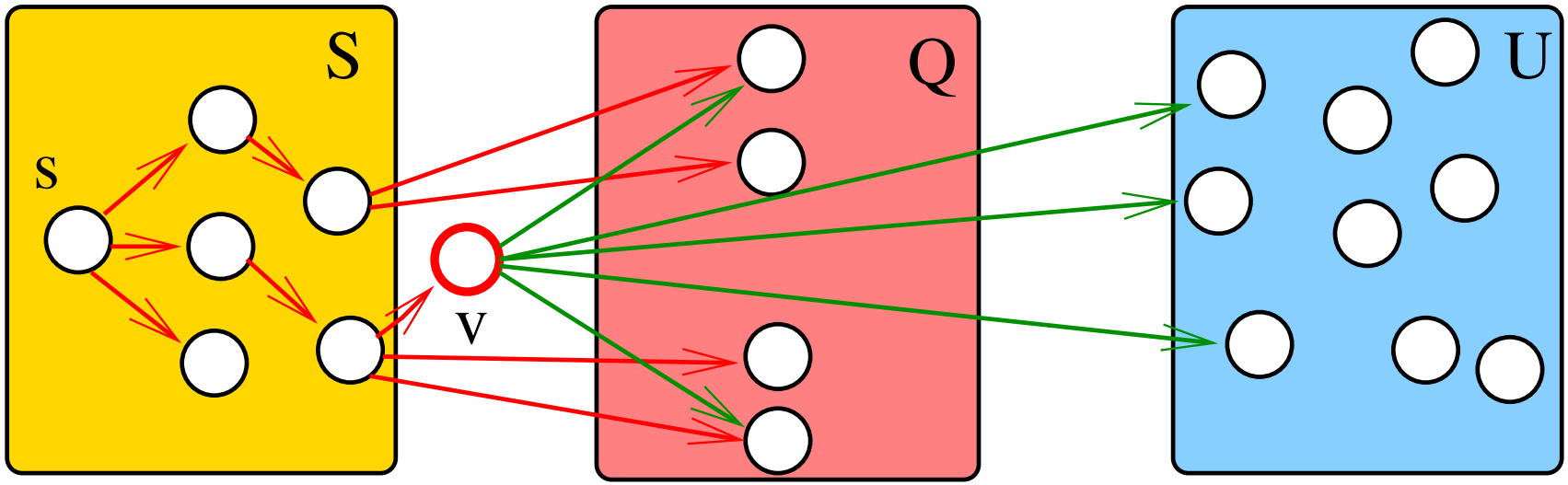
(i3) Para cada vértice `v` em `S` vale que `distTo[v]` é o custo de um caminho mínimo de `s` a `v`.



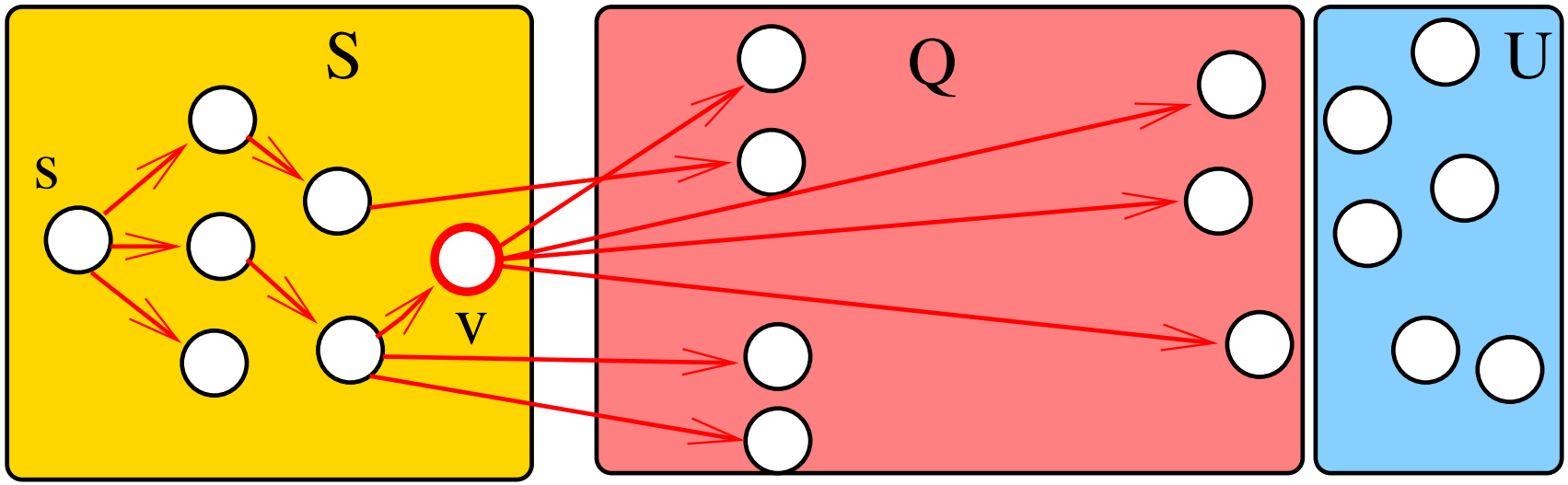
Iteração



Iteração



Iteração



Consumo de tempo

O consumo de tempo da função `dijkstra` é $O(V + E)$ mais o consumo de tempo de

1	execução de	`IndexMinPQ<Double>`,
$O(V)$	execuções de	`insert()`,
$O(V)$	execuções de	`isEmpty()`,
$O(V)$	execuções de	`contains()`,
$O(V)$	execuções de	`delMin()`, e
$O(E)$	execuções de	`decreaseKey()`.

Consumo de tempo Min-Heap

`IndexMinPQ<Double>`	$\Theta(1)$
`isEmpty`	$\Theta(1)$
`insert`	$\Theta(\lg V)$
`delMin`	$\mathrm{O}(\lg V)$
`decreaseKey`	$\Theta(\lg V)$
`contains`	$\Theta(1)$

Conclusão

O consumo de `DijkstraSP` é $O(E \lg V)$.

Para **grafos densos** podemos alcaçar consumo de tempo é ótimo . . . detalhes MAC0328.

Consumo de tempo Min-Heap

	heap	d-heap	fibonacci heap
`insert`	$\mathrm{O}(\lg \mathtt{V})$	$\mathrm{O}(\log_D \mathtt{V})$	$\mathrm{O}(1)$
`delMin`	$\mathrm{O}(\lg \mathtt{V})$	$\mathrm{O}(\log_D \mathtt{V})$	$\mathrm{O}(\lg \mathtt{V})$
`decreaseKey`	$\mathrm{O}(\lg \mathtt{V})$	$\mathrm{O}(\log_D \mathtt{V})$	$\mathrm{O}(1)$
`dijkstra`	$\mathrm{O}(\mathtt{E} \lg \mathtt{V})$	$\mathrm{O}(\mathtt{E} \log_D \mathtt{V})$	$\mathrm{O}(\mathtt{E} + \mathtt{V} \lg \mathtt{V})$

Consumo de tempo Min-Heap

	bucket heap	radix heap
`insert`	$O(1)$	$O(\lg(VC)R$
`delMin`	$O(C)$	$O(\lg(VC))$
`decreaseKey`	$O(1)$	$O(E + V \lg(VC))$
`dijkstra`	$O(E + VC)$	$O(E + V \lg(VC))$

C = maior custo de um arco.

Caminhos mínimos em DAGs

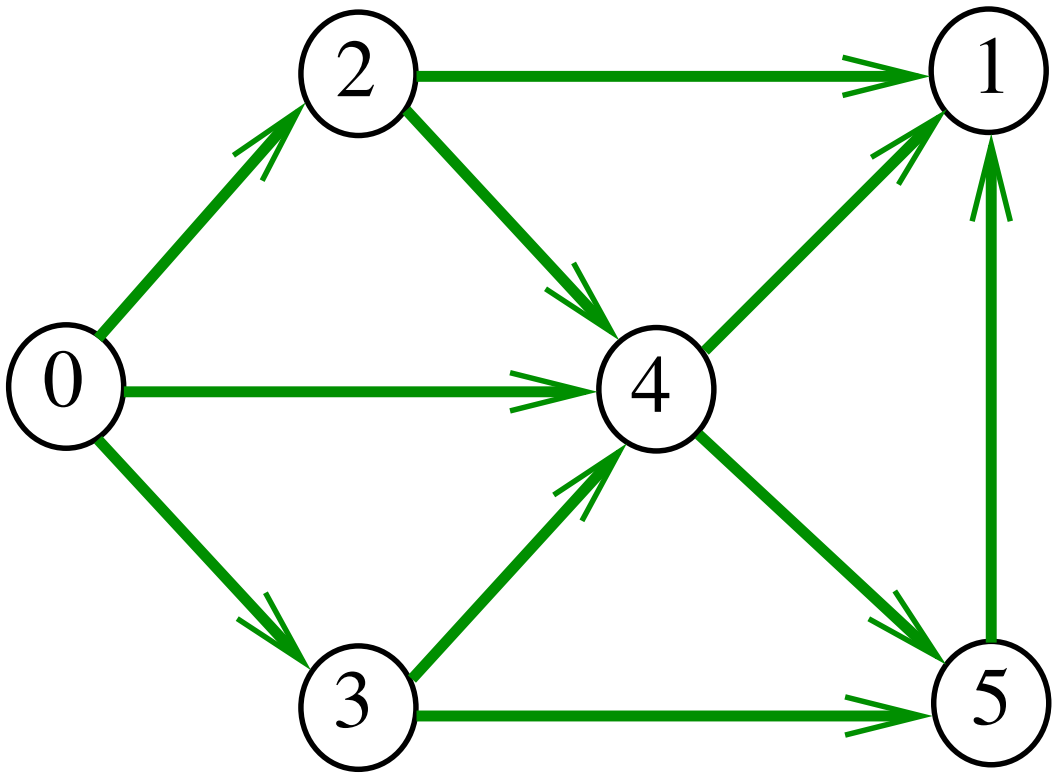
S 19.6

DAGs

Um digrafo é **acíclico** se não tem ciclos

Digrafos acíclicos também são conhecidos como DAGs (= *directed acyclic graphs*)

Exemplo: um digrafo acíclico

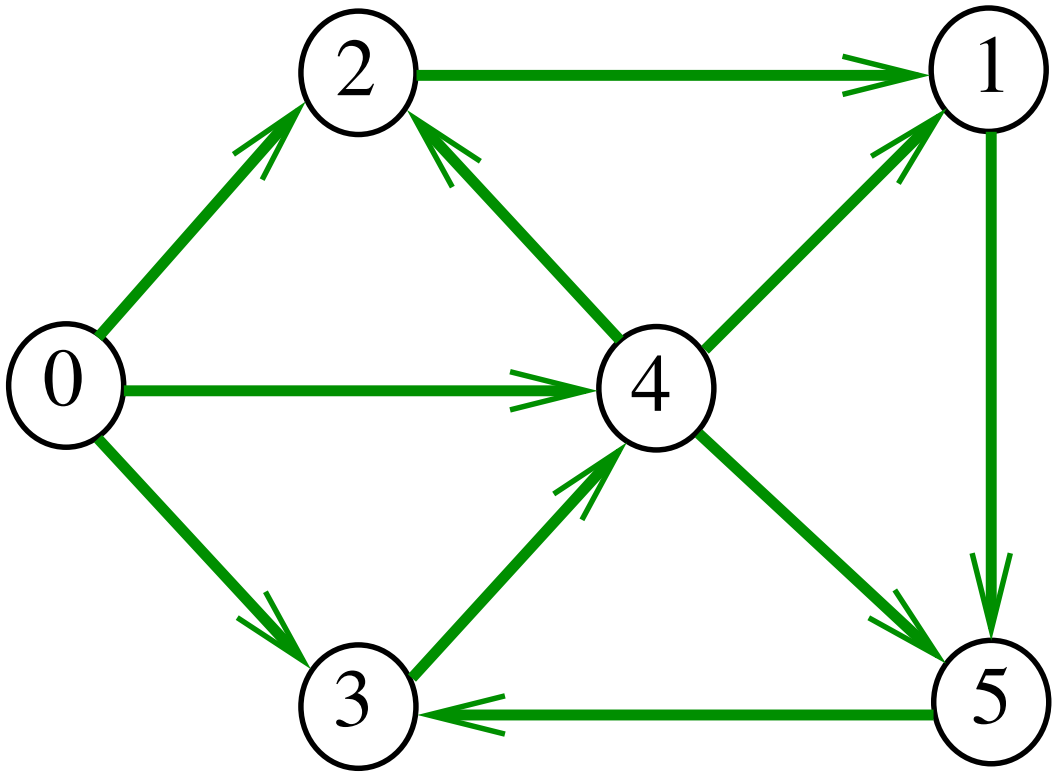


DAGs

Um digrafo é **acíclico** se não tem ciclos

Digrafos acíclicos também são conhecidos como DAGs (= *directed acyclic graphs*)

Exemplo: um digrafo que **não** é acíclico

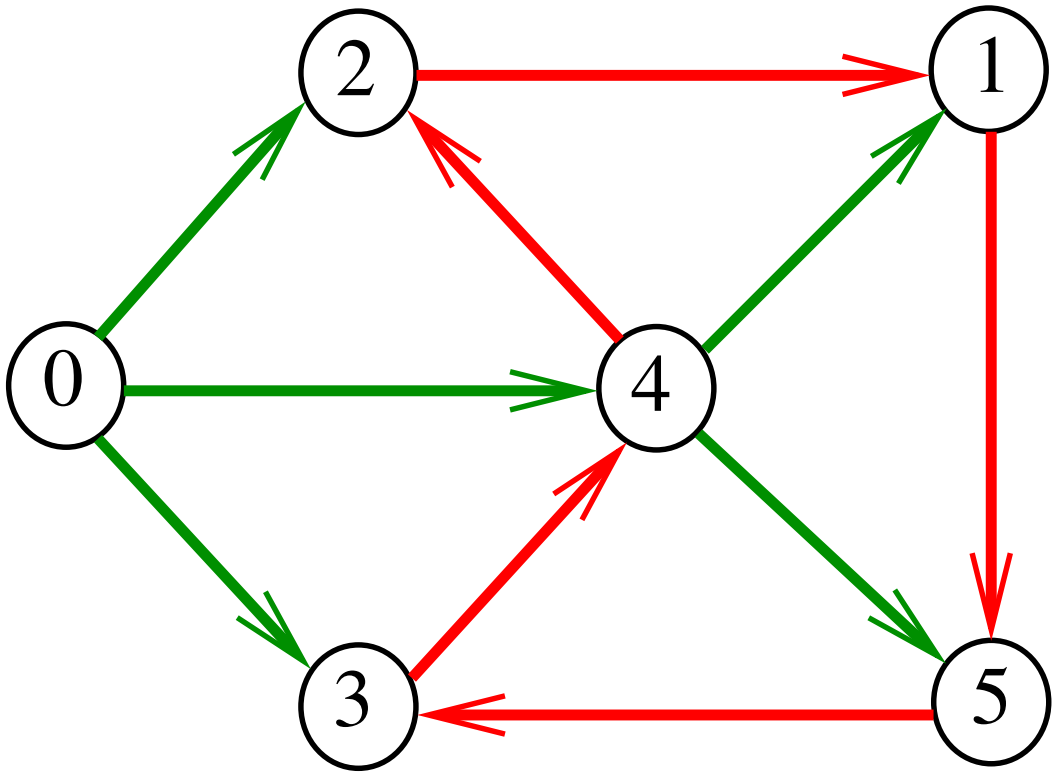


DAGs

Um digrafo é **acíclico** se não tem ciclos

Digrafos acíclicos também são conhecidos como DAGs (= *directed acyclic graphs*)

Exemplo: um digrafo que **não** é acíclico



Ordenaçao topológica

Uma **permutação** dos vértices de um digrafo é uma seqüência em que cada vértice aparece uma e uma só vez

Uma **ordenação topológica** (= *topological sorting*) de um digrafo é uma permutação

`ts[0], ts[1], ..., ts[V-1]`

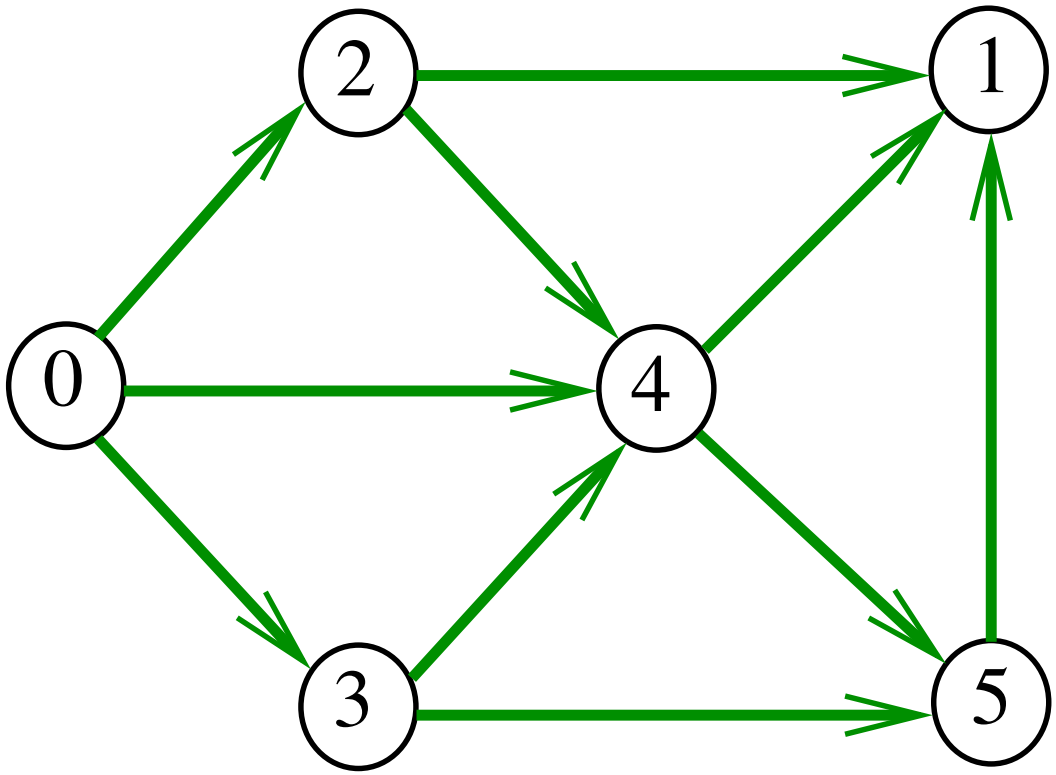
dos seus vértices tal que todo arco tem a forma

`ts[i]-ts[j]` com `i < j`

`ts[0]` é necessariamente uma **fonte**
`ts[V-1]` é necessariamente um **sorvedouro**

Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



Fato

Para todo digrafo G, vale uma e apenas umas das seguintes afirmações:

- G possui um ciclo
- G é um DAG e, portanto, admite uma ordenação topológica

Problema

Problema:

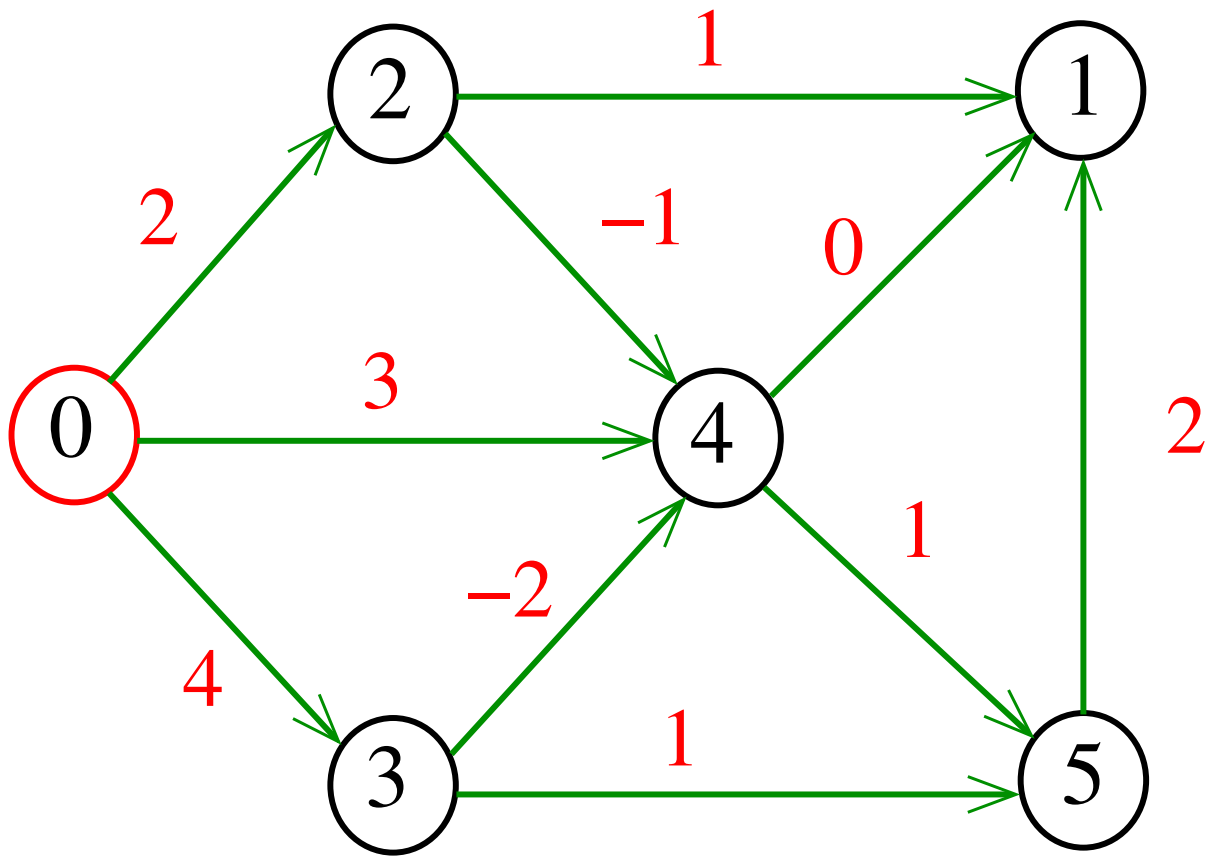
Dado um vértice s de um DAG com custos ***possivelmente negativos*** *nos arcos, encontrar, para cada vértice t que pode ser alcançado a partir de s, um caminho simples mínimo de s a t*

Problema:

Dado um vértice s de um DAG com custos possivelmente negativos nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s

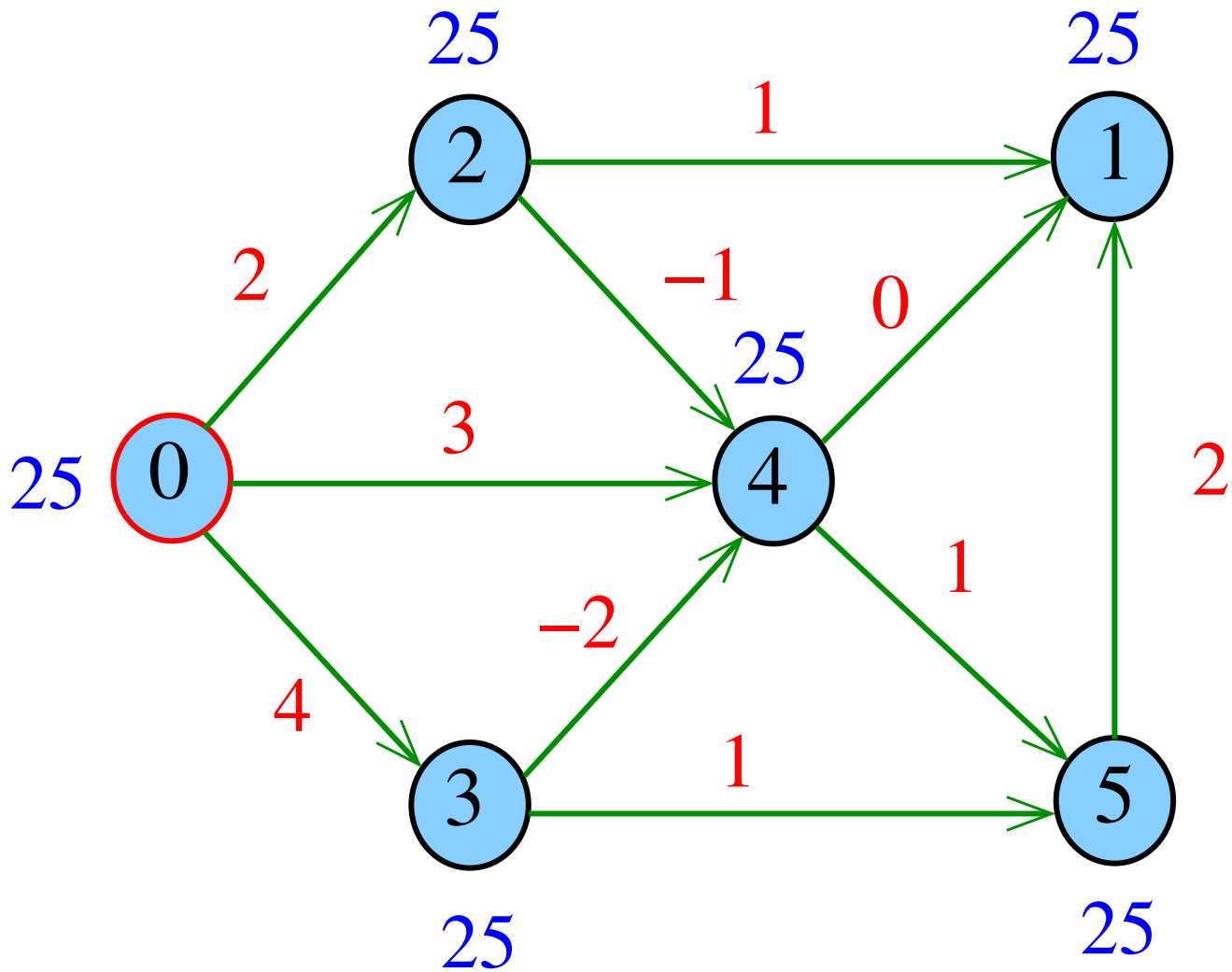
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



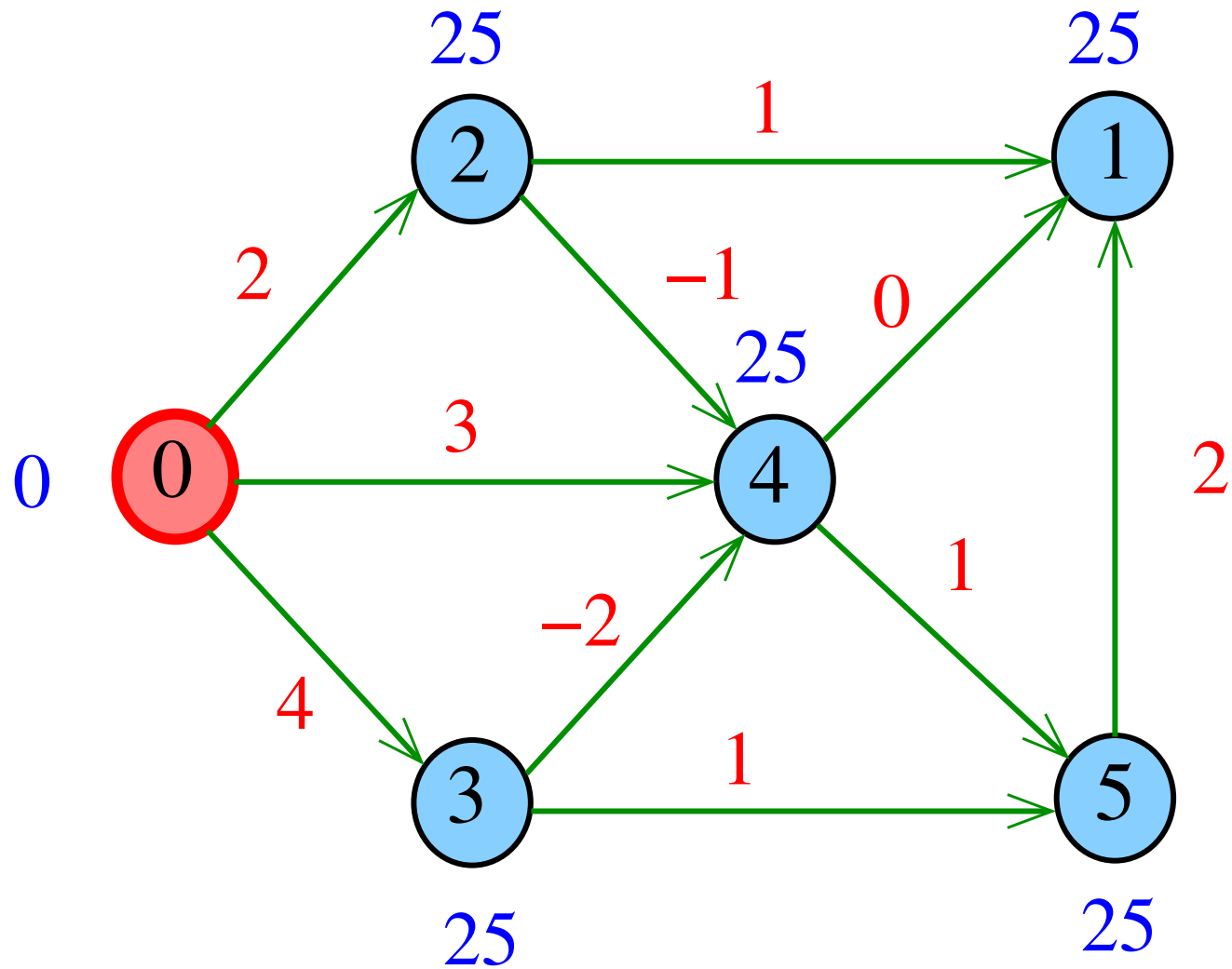
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



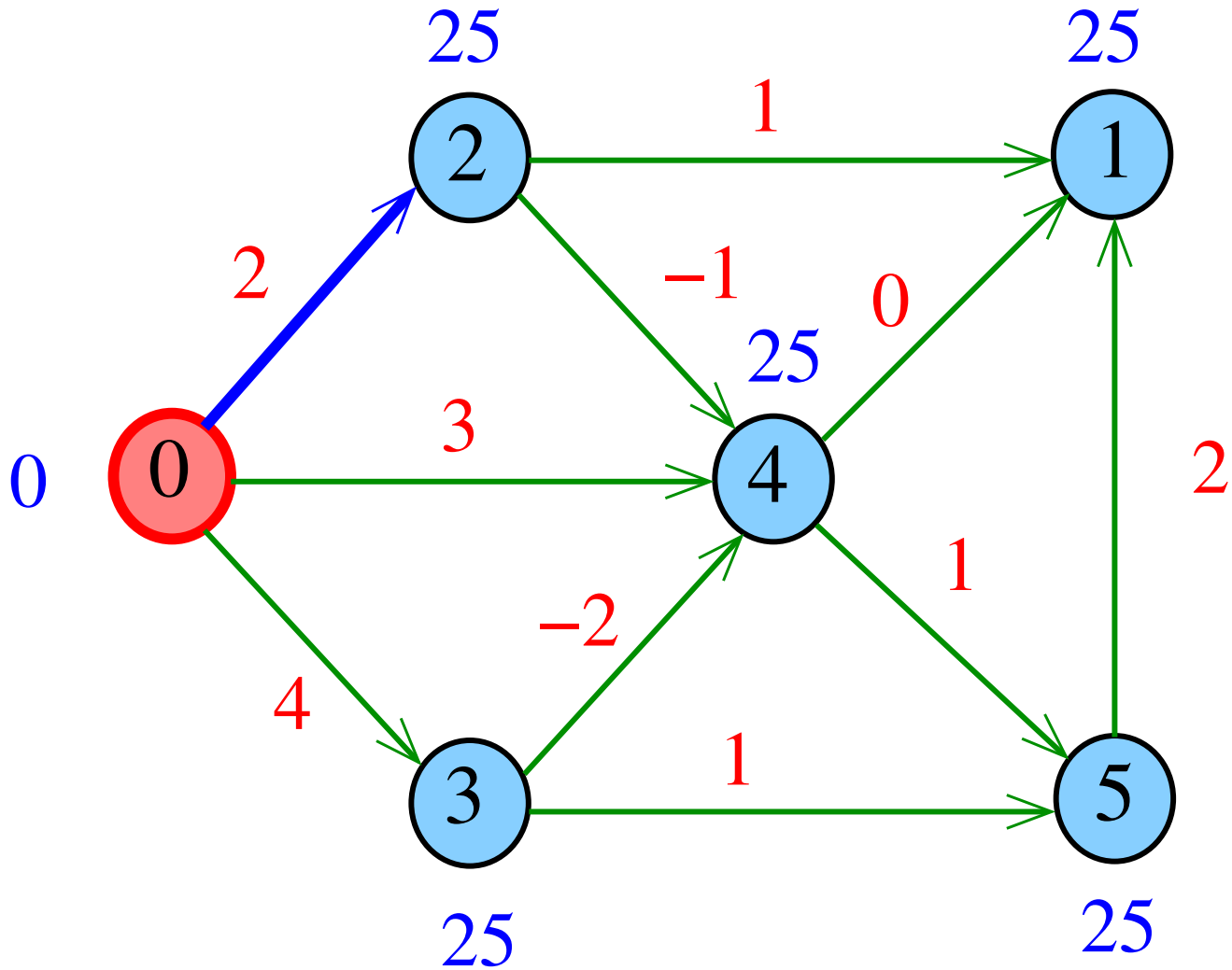
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



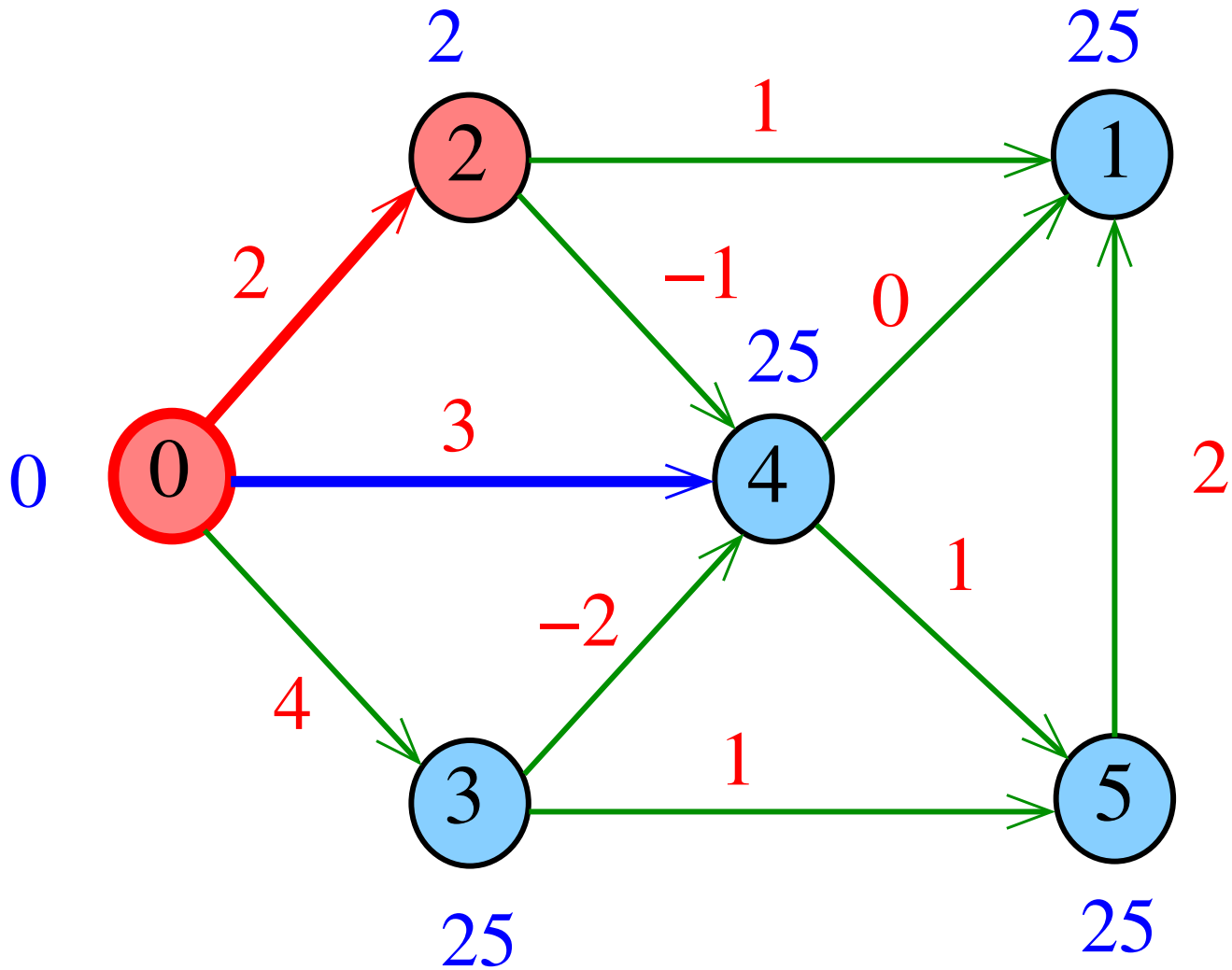
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



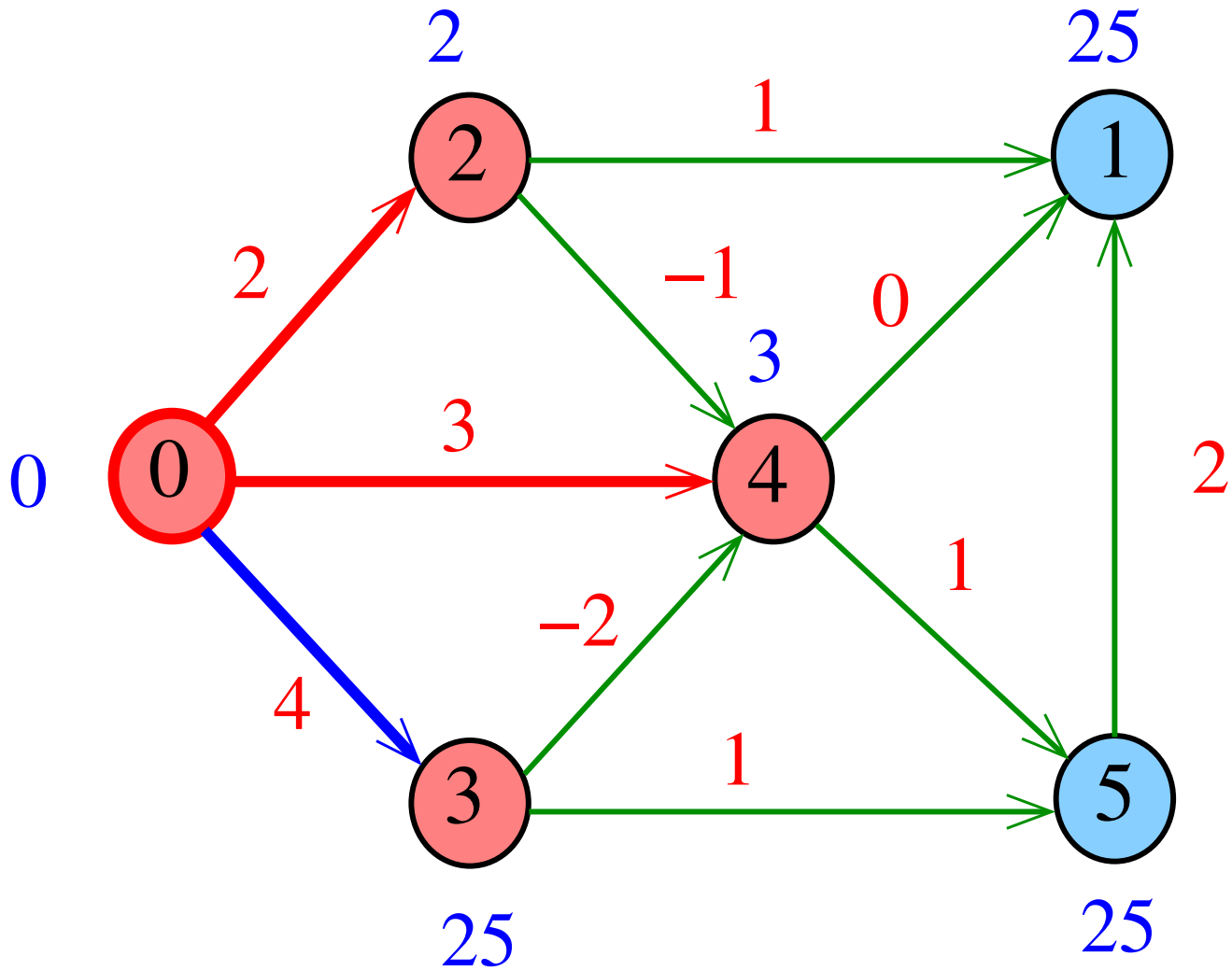
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



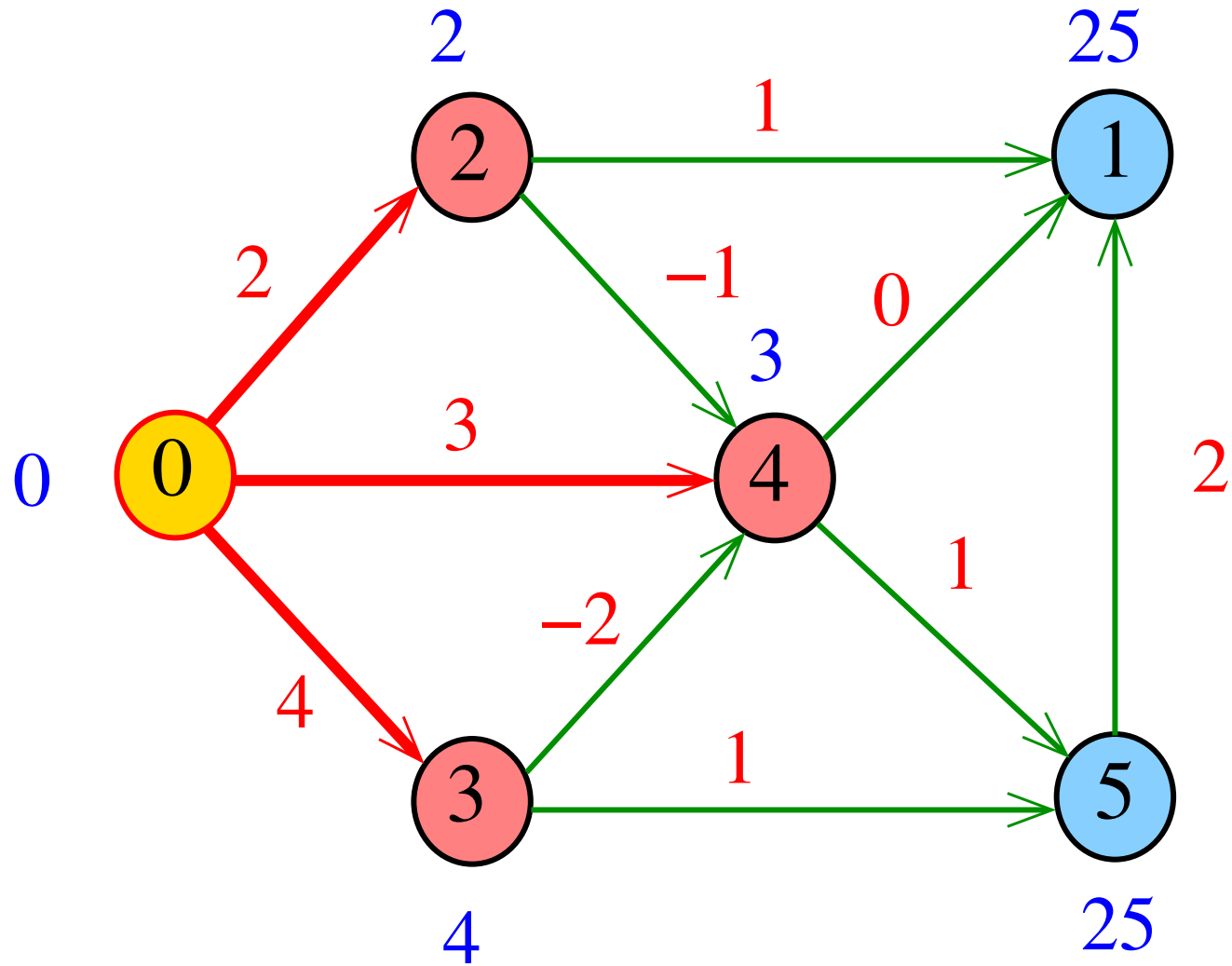
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



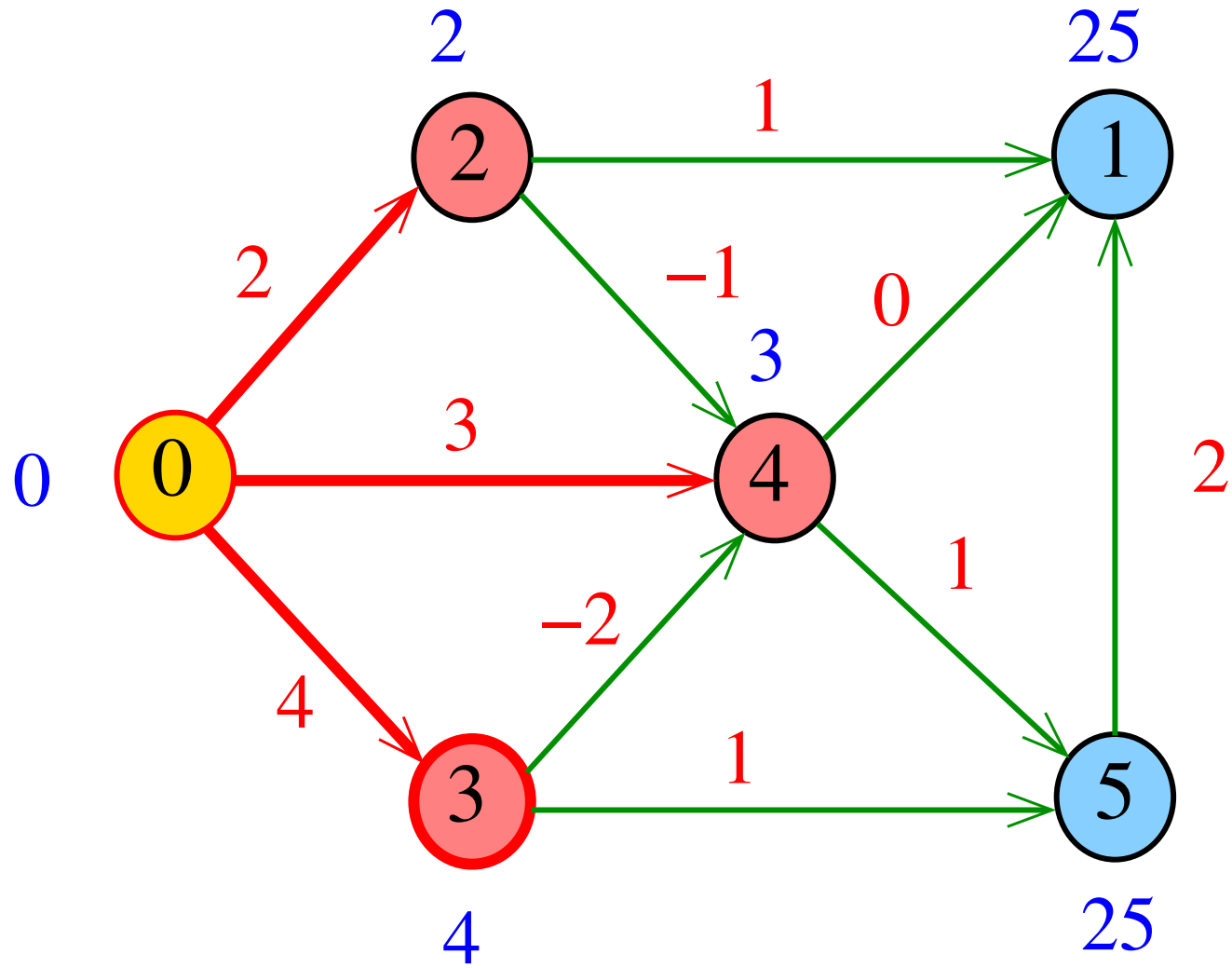
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



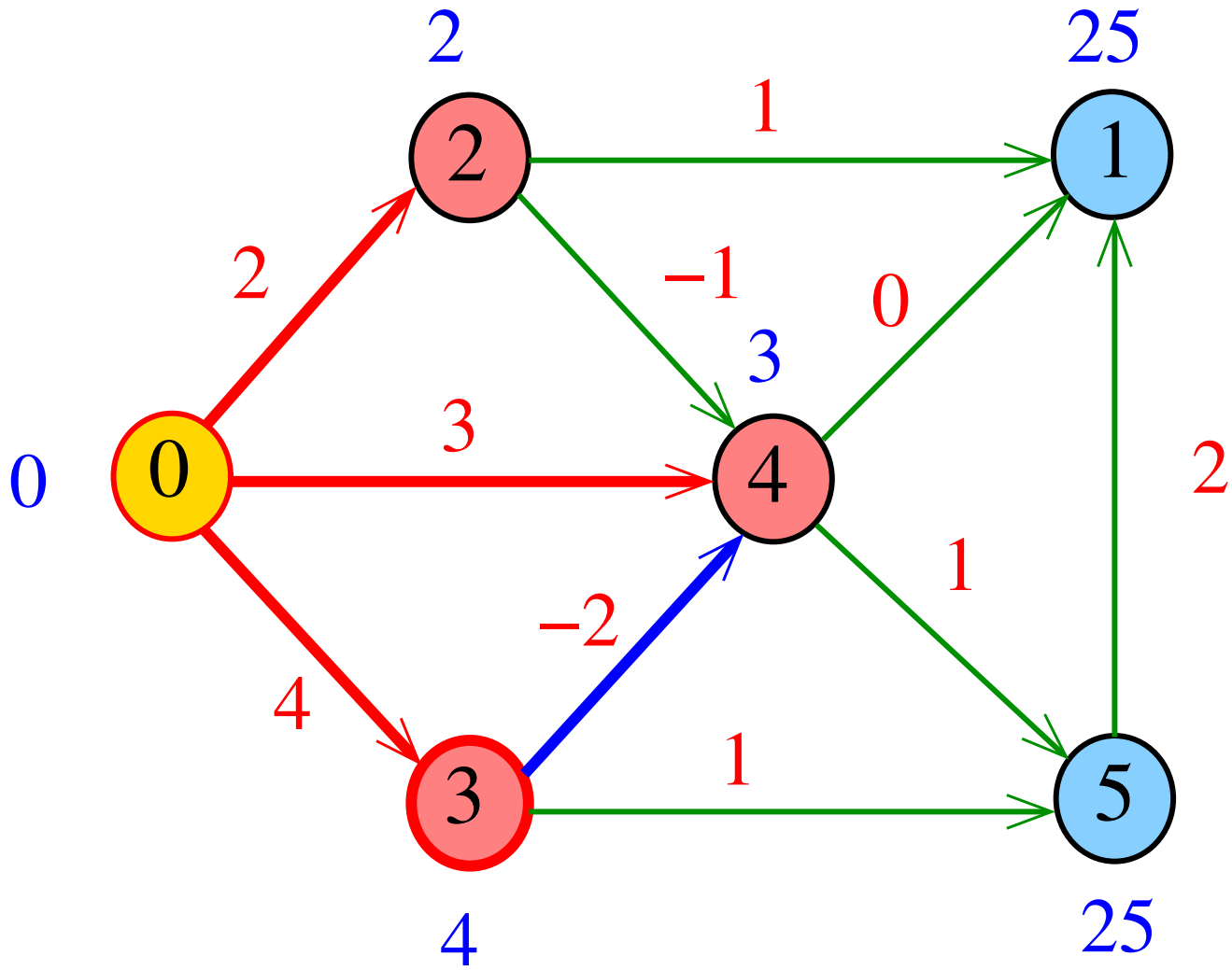
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



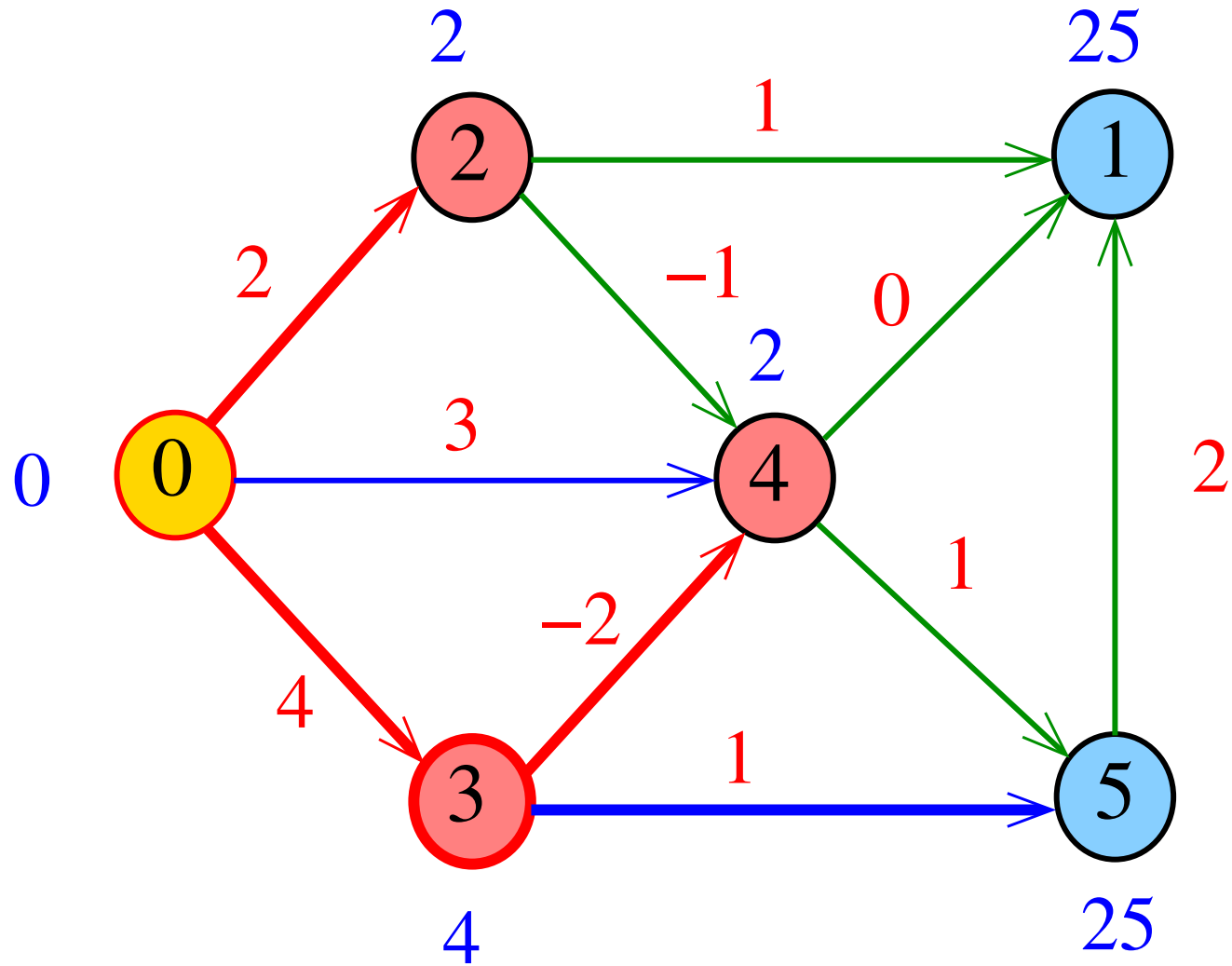
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



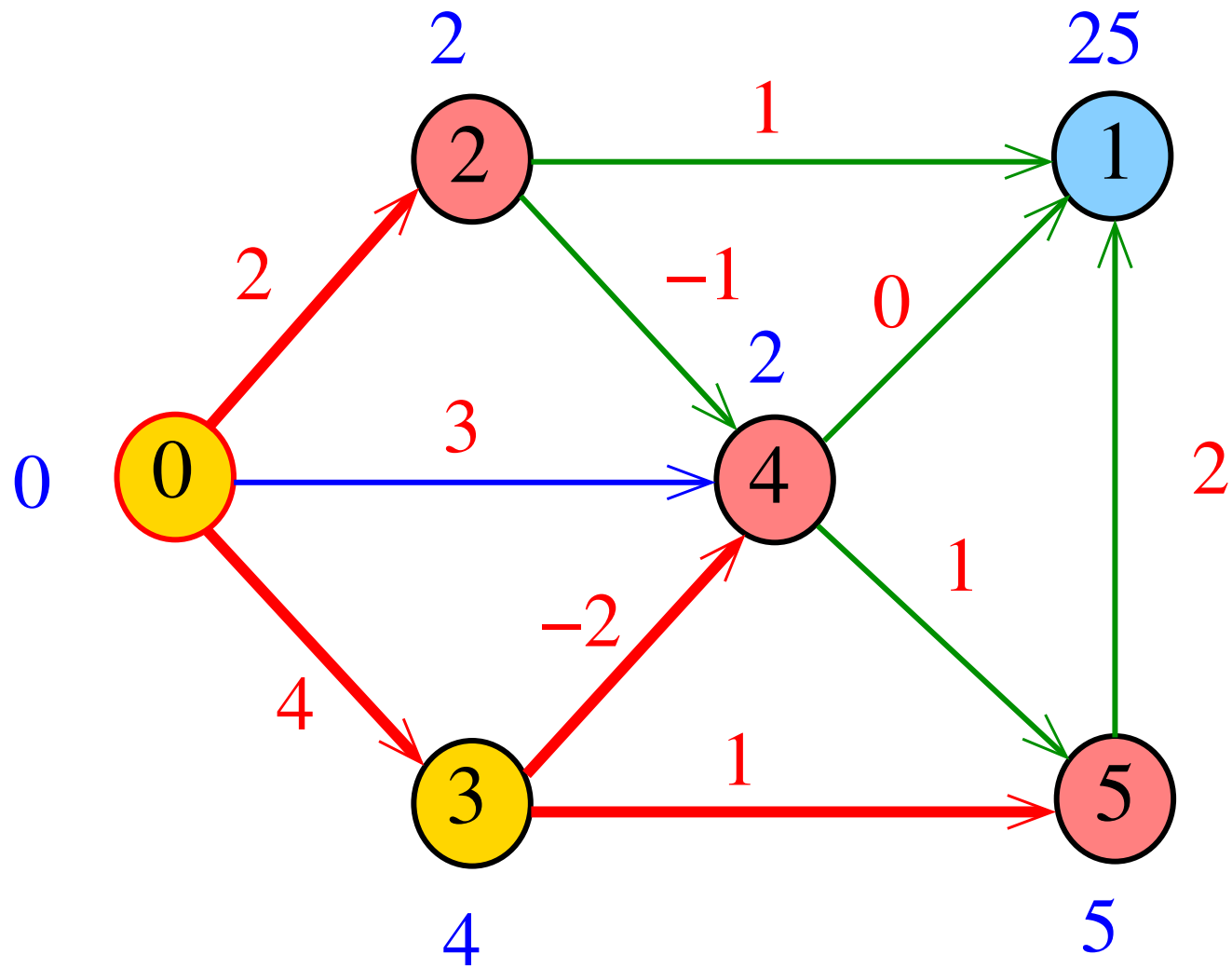
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



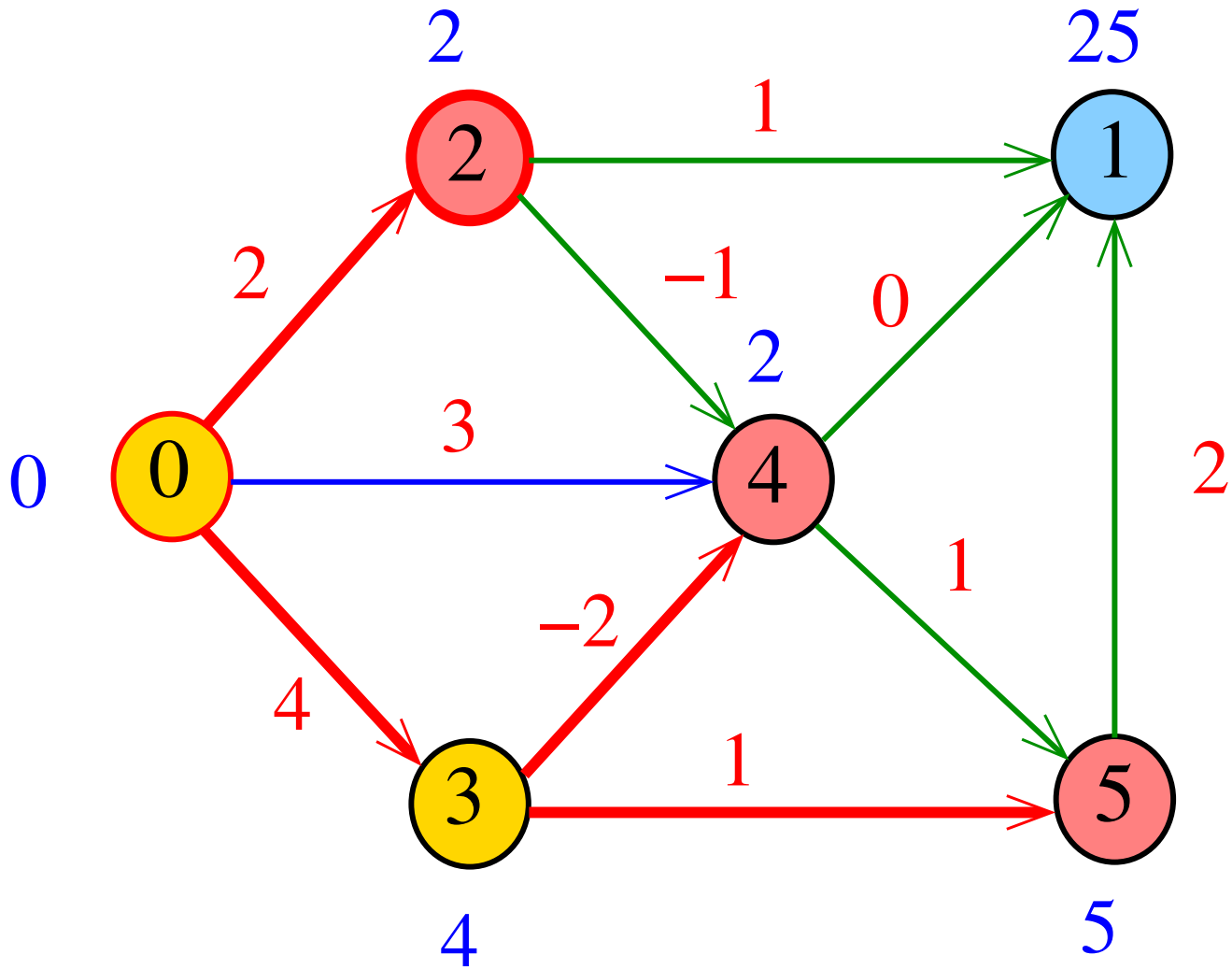
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



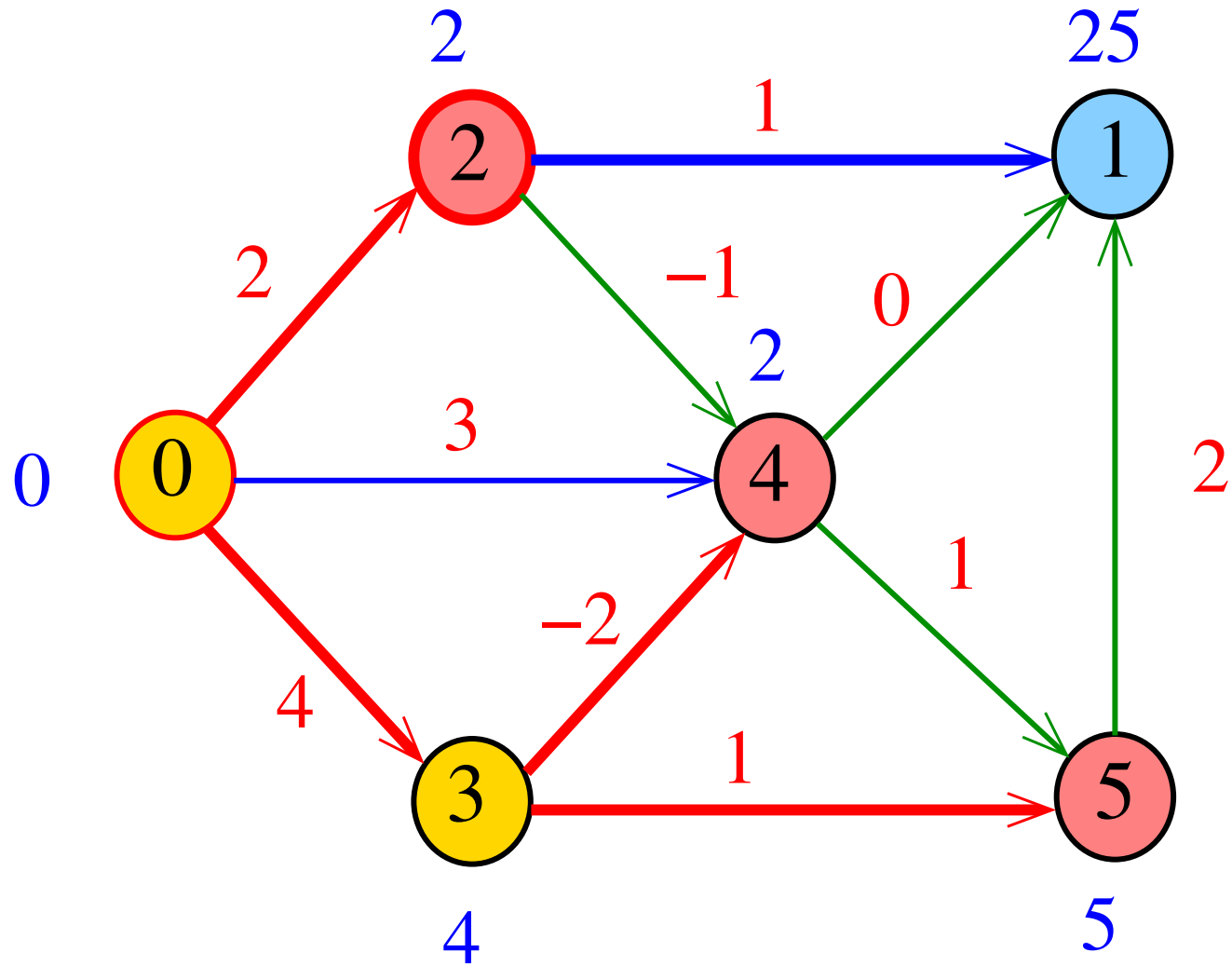
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



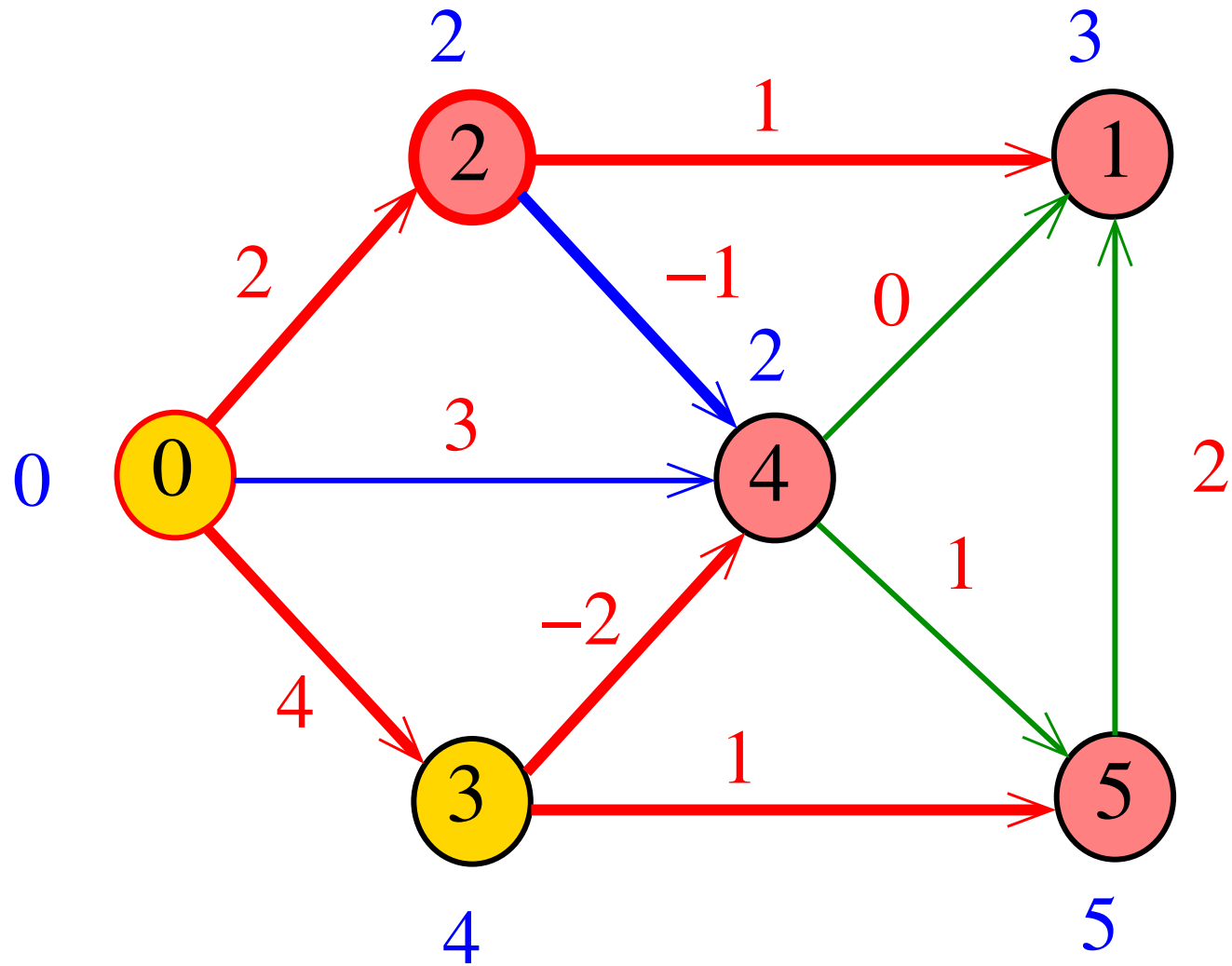
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



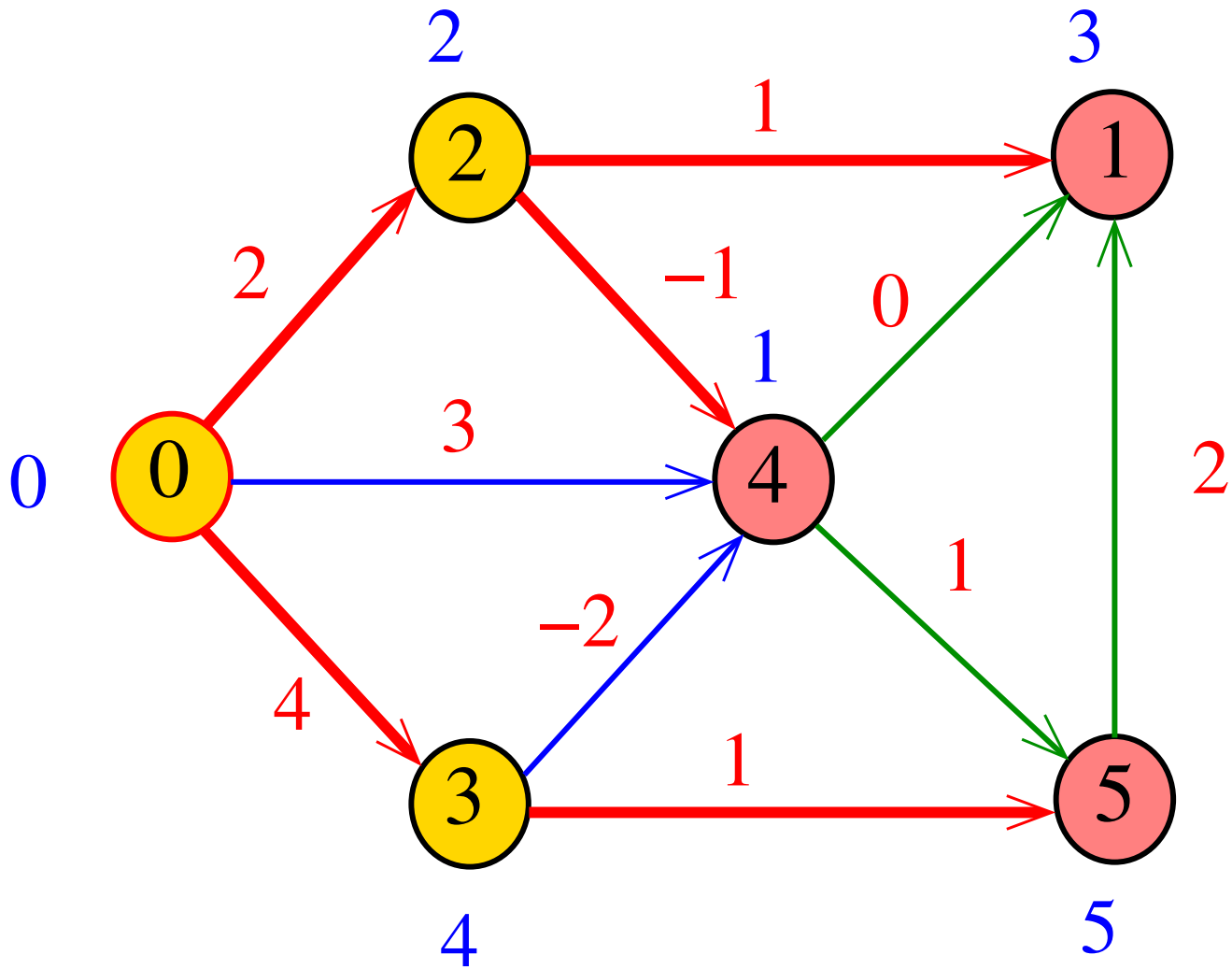
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



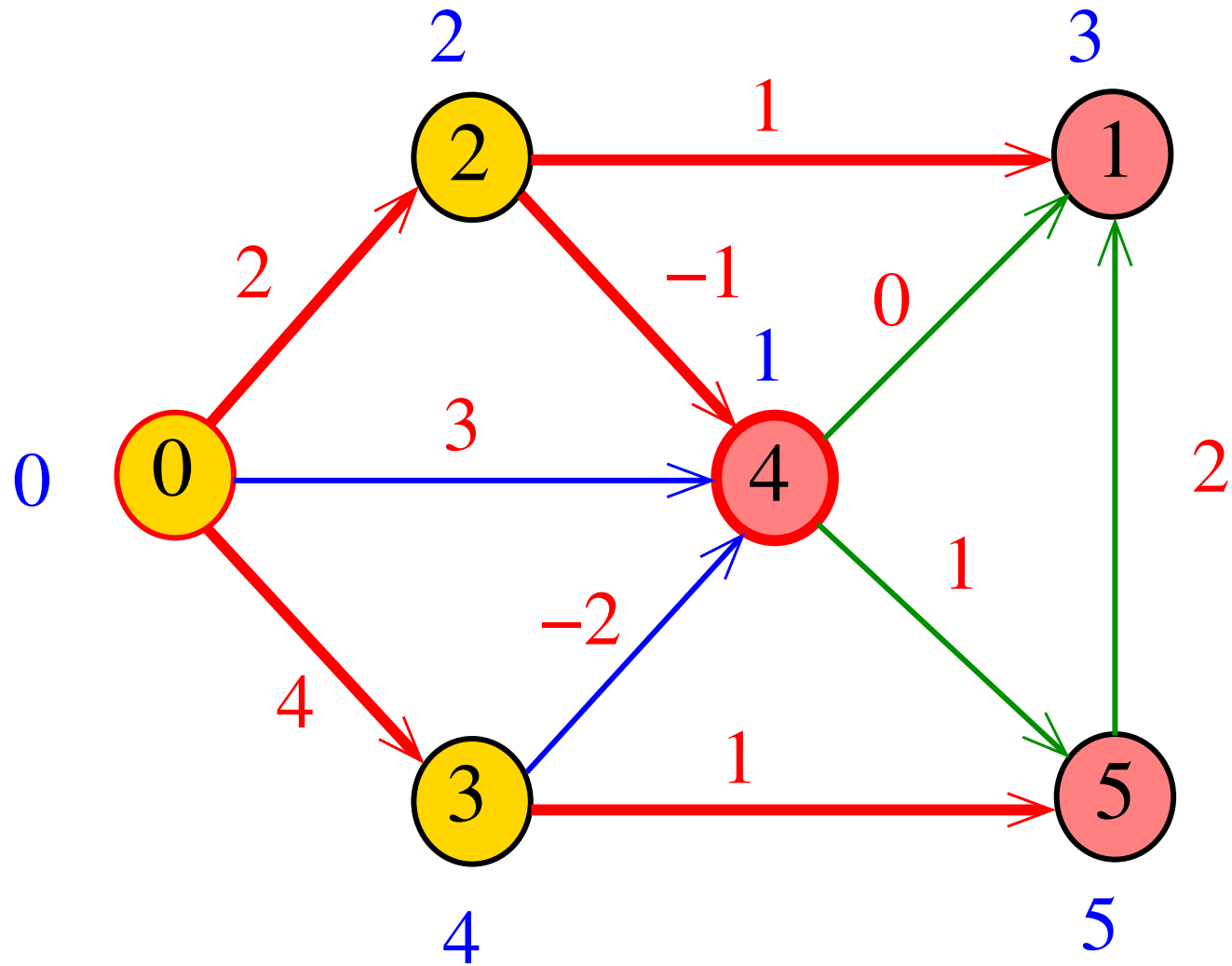
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



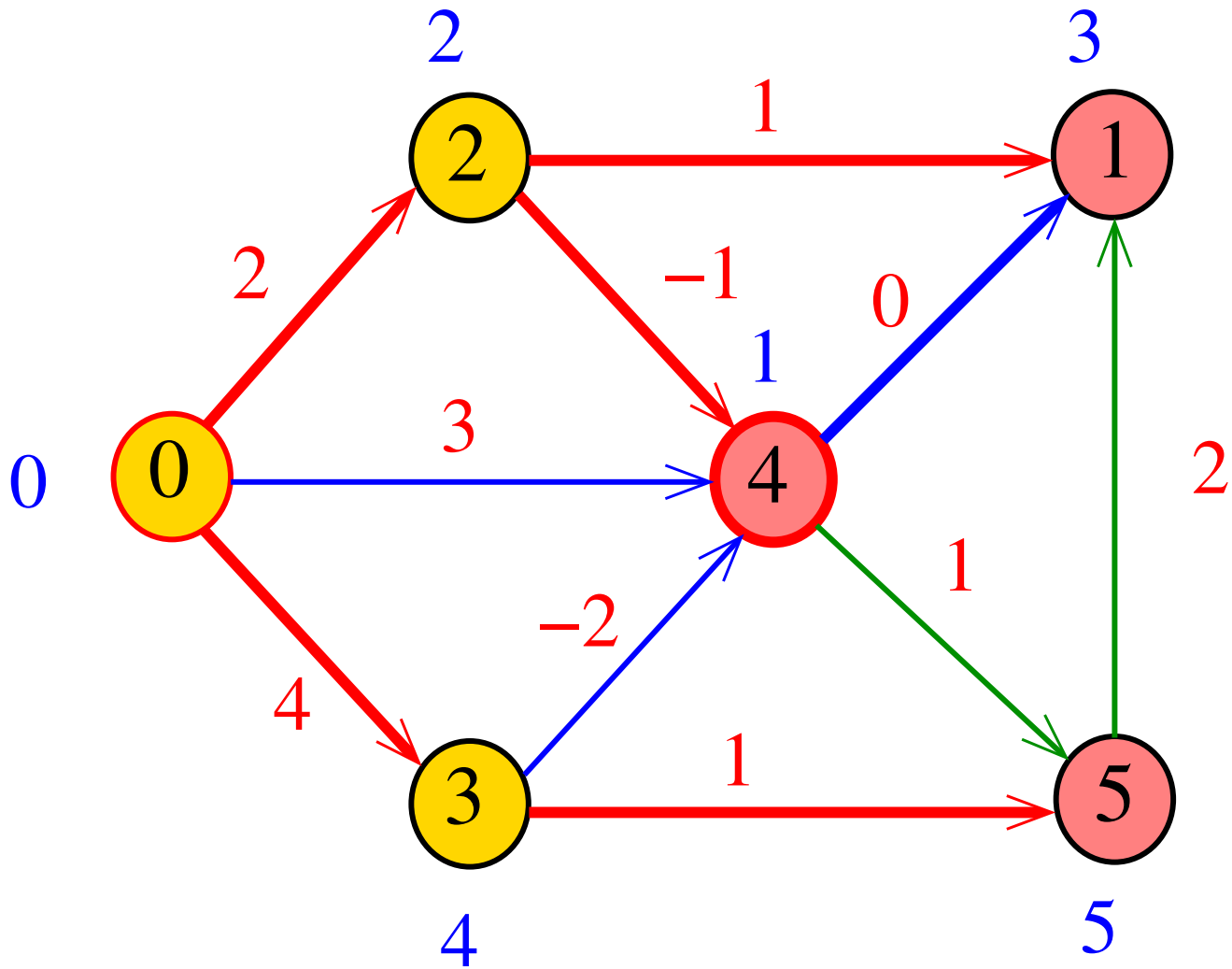
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



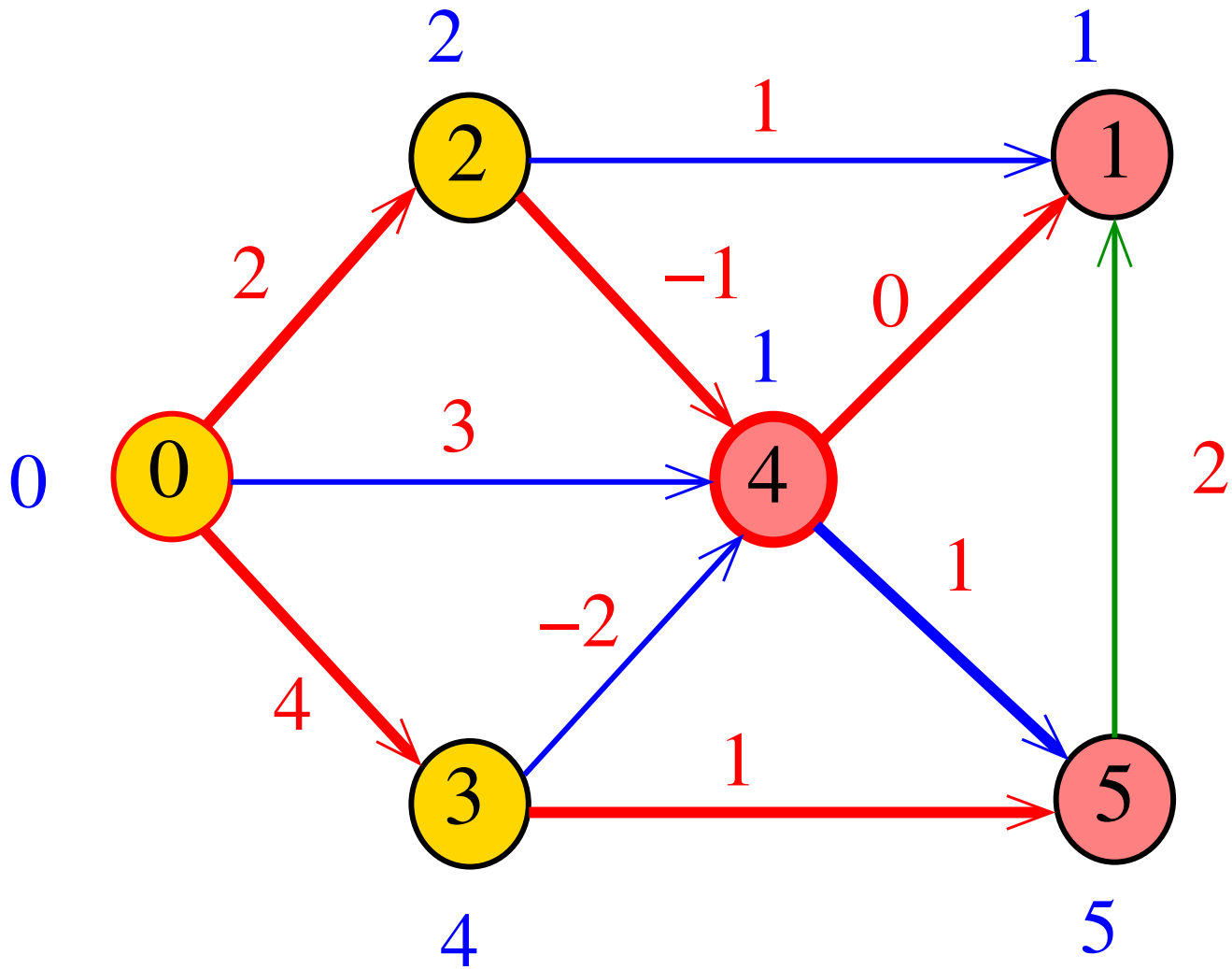
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



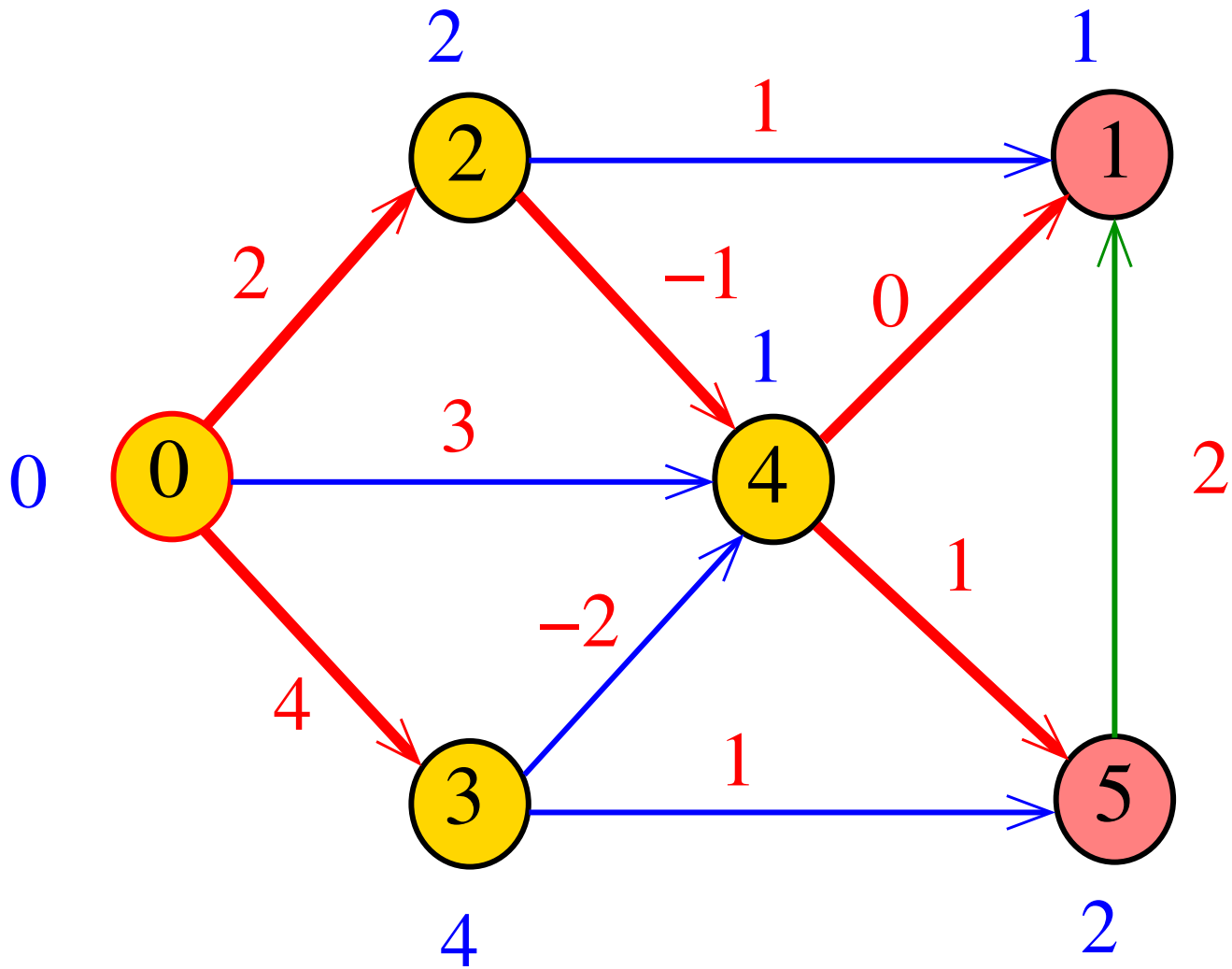
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



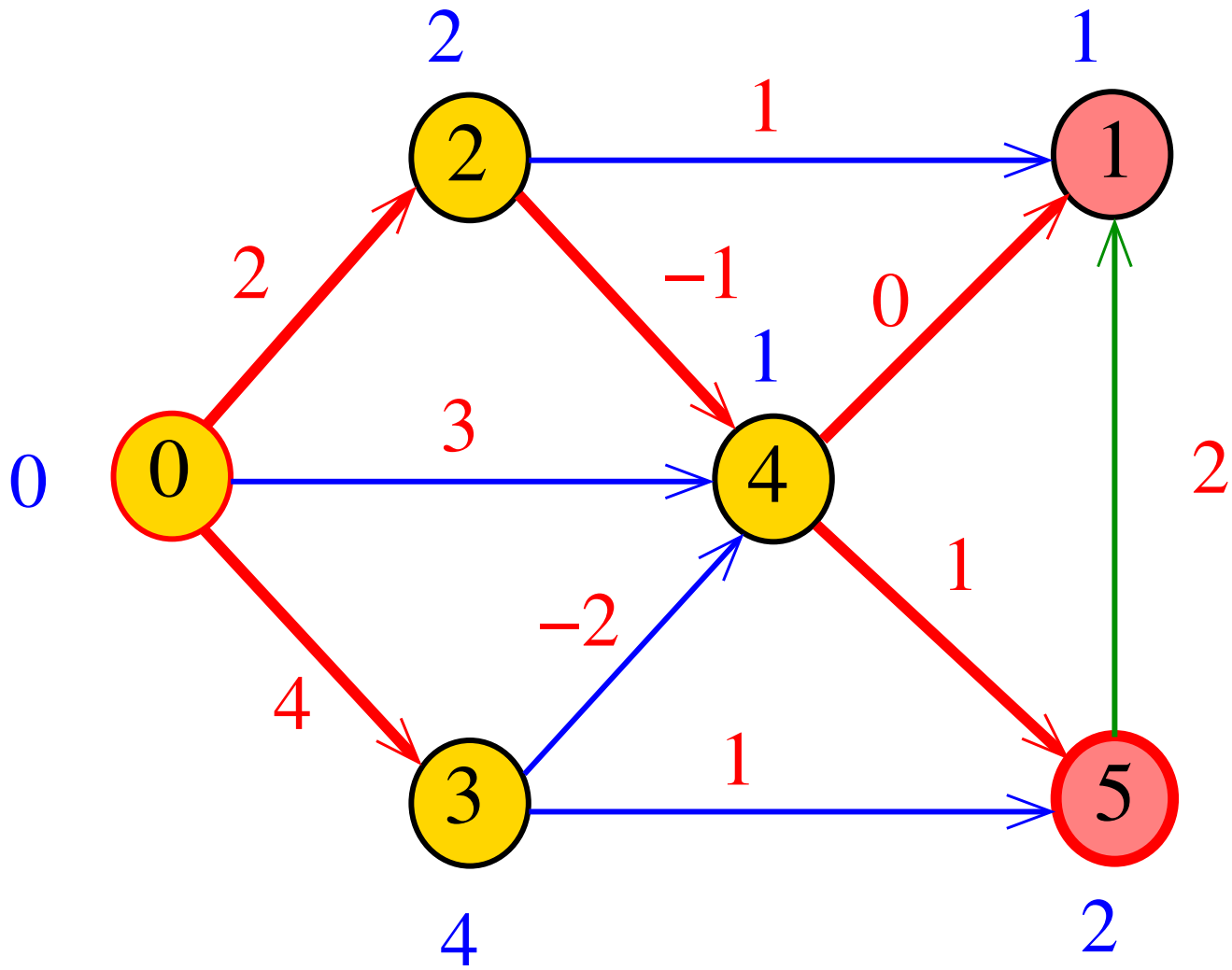
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



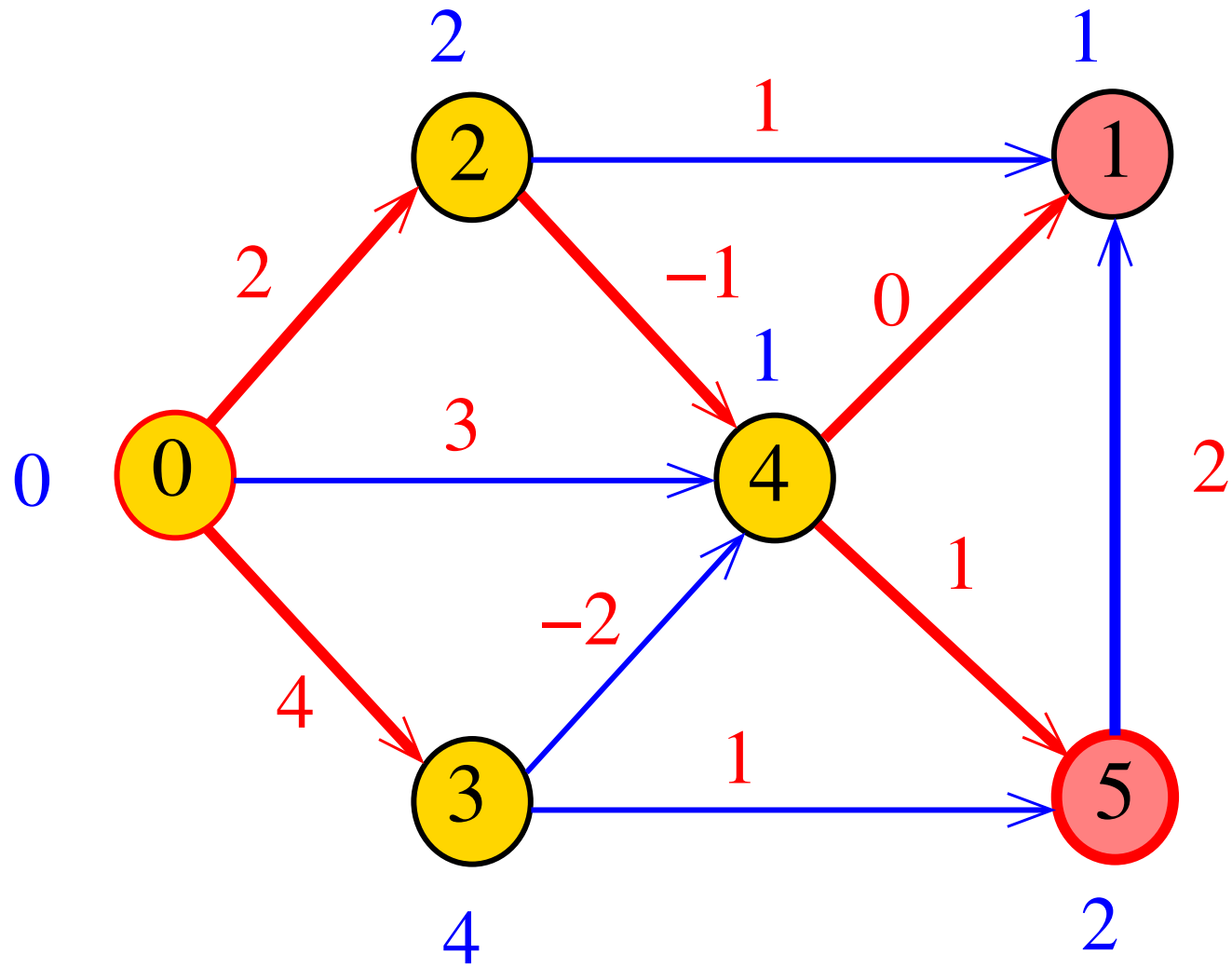
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



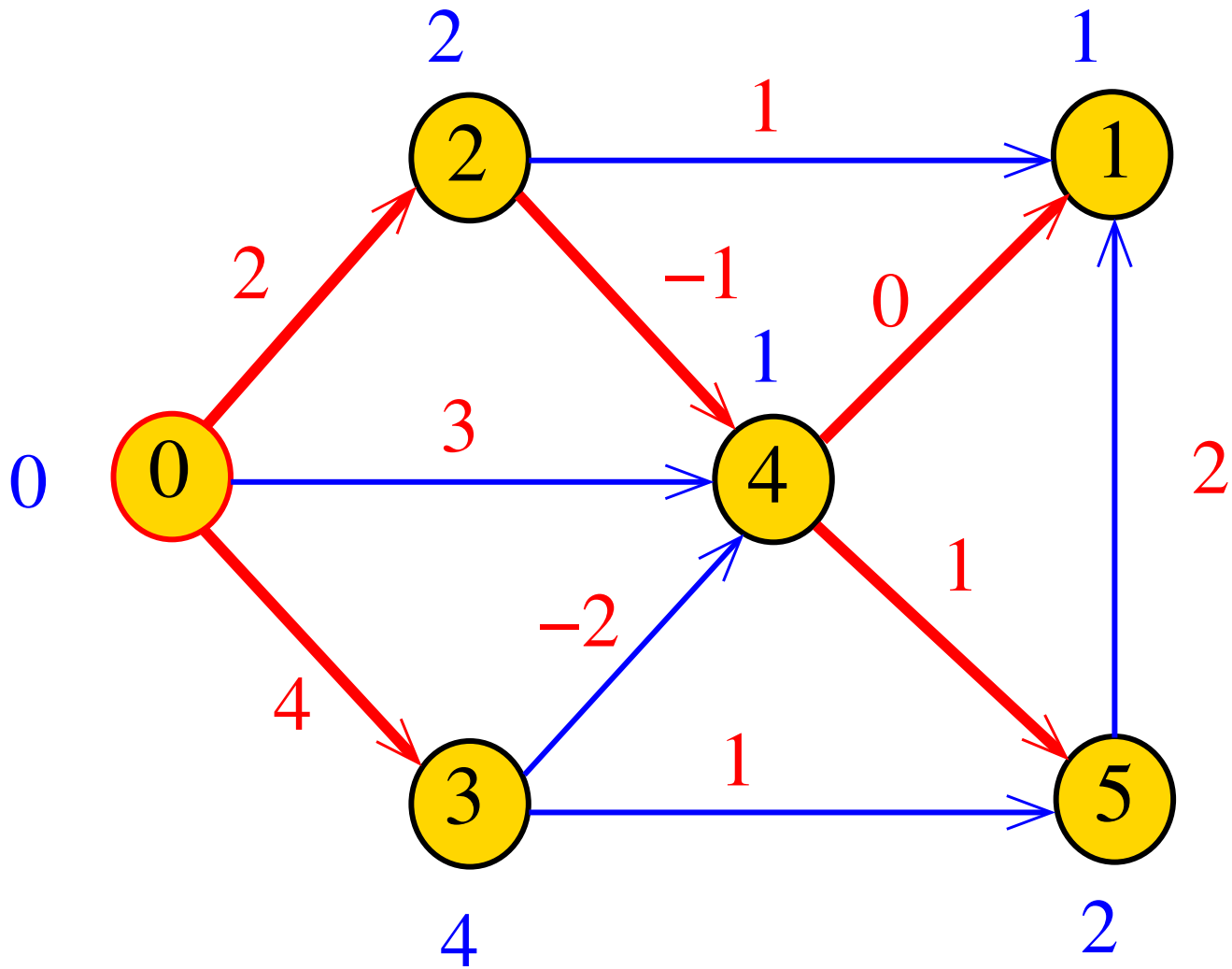
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



AcyclicSP

A classe AcyclicSP recebe um DAG G com custos possivelmente negativos e uma ordenação topológica ts de G. Recebe também um vértice s.
Para cada vértice t, a função calcula o custo de um caminho de custo mínimo de s a t. Esse número é depositado em distTo[t].

```
void
AcyclicSP (EdgeWeightedDigraph G,
ints);
```

Consumo de tempo

O consumo de tempo de `AcyclicSP` é $O(V + E)$.

Caminhos máximos em DAGs

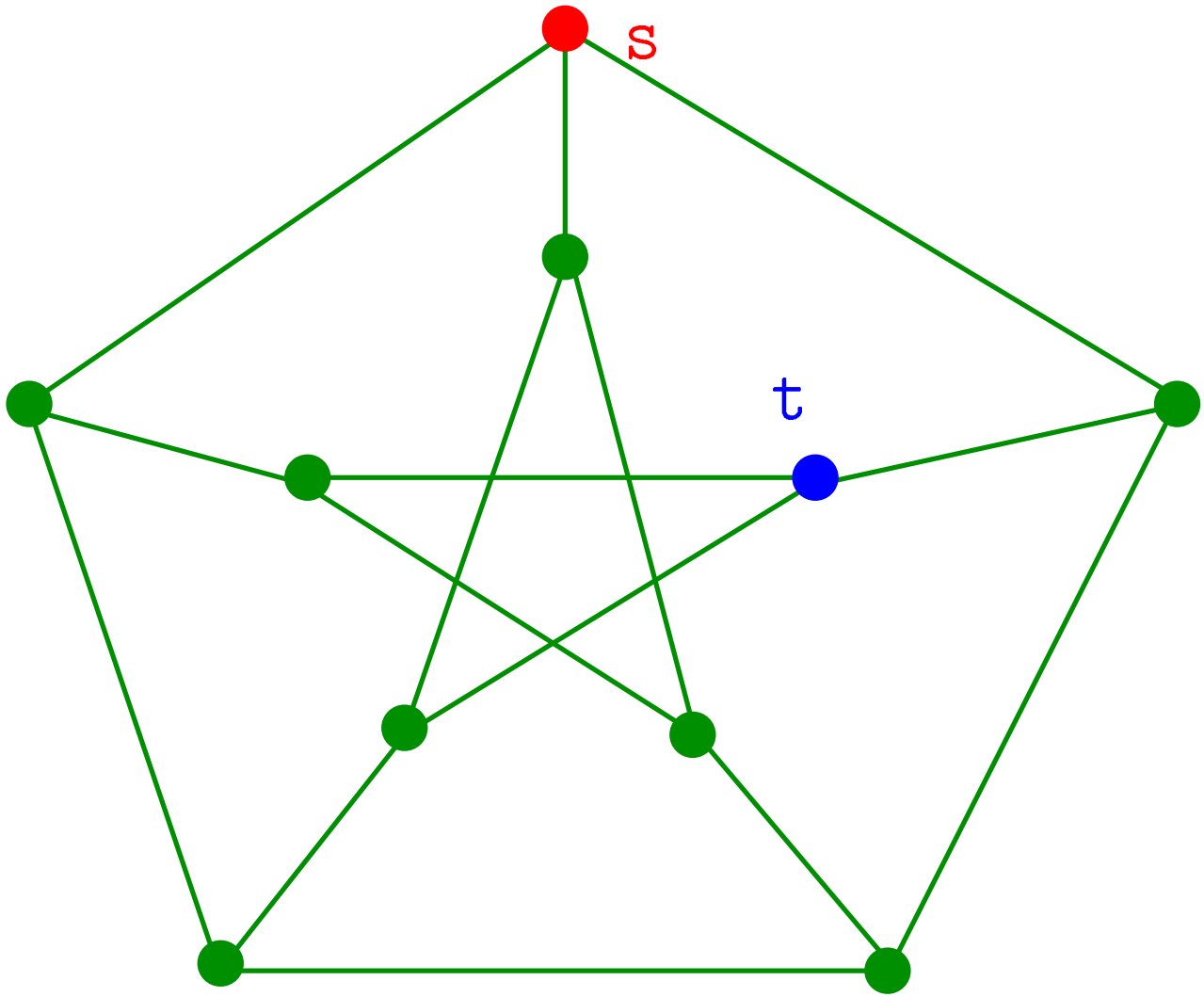
Do ponto de vista computacional, o problema de encontrar um caminho simples de custo máximo num digrafos com custos nos arcos é difícil.

Mais precisamente, problema é **NP-difícil** como vocês verão no final de Análise de Algoritmos.

O problema torna-se fácil, entretanto, quando restrito a DAGs.

Caminhos hamiltonianos

Problema: Dados vértices s e t de um grafo encontrar um caminho hamiltoniano de s e t



Caminhos hamiltonianos

Problema: Dados vértices s e t de um grafo encontrar um caminho hamiltoniano de s e t