AULA 2

Análise amortizada

CLRS 17

Contador binário

Incrementa de 1 o número binário representado por $A[0\,..\,k-1]$.

```
INCREMENT (A, k)
    i ← 0
    enquanto i < k e A[i] = 1 faça
        A[i] ← 0
        i ← i + 1
    se i < k
        então A[i] ← 1
```

Contador binário

Incrementa de 1 o número binário representado por $A[0\,..\,k-1]$.

```
INCREMENT (A, k)
   i ← 0
   enquanto i < k e A[i] = 1 faça
         A[i] ← 0
         i ← i + 1
   se i < k
         então A[i] ← 1
```

Entrada:

$k-1$		3	2	1	0	
0	1	0	1	1	1	A

Contador binário

Incrementa de 1 o número binário representado por $A[0\,..\,\mathtt{k}{-}1]$.

INCREMENT $(A, \mathtt{k})$

$\mathtt{i} \leftarrow 0$
enquanto $\mathtt{i} < \mathtt{k}$ **e** $A[\mathtt{i}] = 1$ **faça**
    $A[\mathtt{i}] \leftarrow 0$
    $\mathtt{i} \leftarrow \mathtt{i} + 1$
se $\mathtt{i} < \mathtt{k}$
    então $A[\mathtt{i}] \leftarrow 1$

Entrada:

$\mathtt{k}{-}1$		3	2	1	0	
0	1	0	1	1	1	A

Saída:

$\mathtt{k}{-}1$		3	2	1	0	
0	1	1	0	0	0	A

Consumo de tempo

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	$\Theta(1)$
2	$\mathrm{O}(\texttt{k})$
3	$\mathrm{O}(\texttt{k})$
4	$\mathrm{O}(\texttt{k})$
5	$\Theta(1)$
6	$\mathrm{O}(1)$
total	$\mathrm{O}(\texttt{k}) + \Theta(1) = \mathrm{O}(\texttt{k})$

“Custo” $=$

consumo de tempo $=$ número de bits alterados

$= \mathrm{O}(k)$

Sequência de n chamadas

A começa zerado.

$$\underbrace{\textsc{Incr} \quad \textsc{Incr} \quad \cdots \quad \textsc{Incr} \quad \textsc{Incr} \quad \textsc{Incr}}_{\mathtt{n}}$$

Consumo de tempo é $\mathrm{O}(nk)$

Sequência de n chamadas

A começa zerado.

$$\underbrace{\text{INCR} \quad \text{INCR} \quad \cdots \quad \text{INCR} \quad \text{INCR} \quad \text{INCR}}_{\mathtt{n}}$$

Consumo de tempo é $\mathrm{O}(nk)$

EXAGERO!

Exemplo

$\mathtt{n} = 16$

A

5	4	3	2	1	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1

$\mathtt{k} = 6$

A

5	4	3	2	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0

Exemplo

$\mathtt{n} = 16$

A

5	4	3	2	1	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1

$\mathtt{k} = 6$

A

5	4	3	2	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0

$A[0]$ muda $\mathtt{n}$ vezes

Exemplo

$\mathtt{n} = 16$						$\mathtt{k} = 6$					
A						A					
5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
						0	1	0	0	0	0

$A[0]$	muda	$\mathtt{n}$	vezes
$A[1]$	"	$\lfloor \mathtt{n}/2 \rfloor$	"

Exemplo

$\mathtt{n} = 16$

		A			
5	4	3	2	1	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1

$\mathtt{k} = 6$

		A			
5	4	3	2	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0

$A[0]$	muda	$\mathtt{n}$	vezes
$A[1]$	"	$\lfloor \mathtt{n}/2 \rfloor$	"
$A[2]$	"	$\lfloor \mathtt{n}/4 \rfloor$	"

Exemplo

$\mathtt{n} = 16$					
		A			
5	4	3	2	1	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1

$\mathtt{k} = 6$					
		A			
5	4	3	2	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0

$A[0]$	muda	$\mathtt{n}$	vezes
$A[1]$	"	$\lfloor \mathtt{n}/2 \rfloor$	"
$A[2]$	"	$\lfloor \mathtt{n}/4 \rfloor$	"
$A[3]$	"	$\lfloor \mathtt{n}/8 \rfloor$	"

Análise agregada

Custo total:

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor < n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2n = \Theta(n)$$

Custo amortizado (= custo médio) de uma operação:

$$\frac{2n}{n} = \Theta(1)$$

Este foi o **método agregado** de análise: soma os custos de todas as operações para determinar o custo amortizado de cada operação

Custo amortizado

O **custo amortizado** de uma operação é o custo médio da operação quando considerada em uma sequência de operações do ADT.

Conclusões

O consumo de tempo de uma sequência de $\texttt{n}$ execuções do algoritmo INCREMENT é $\Theta(\texttt{n})$.

O consumo de tempo amortizado do algoritmo INCREMENT é $\Theta(1)$.

Método de análise contábil

A começa zerado.

Pague $2 para mudar $A[\texttt{i}]$ de $0 \to 1$

$0 para mudar $A[\texttt{i}]$ de $1 \to 0$

Método de análise contábil

A começa zerado.

Pague $2 para mudar $A[\texttt{i}]$ de $0 \rightarrow 1$

$0 para mudar $A[\texttt{i}]$ de $1 \rightarrow 0$

$A[\texttt{i}]$ muda de $0 \rightarrow 1$ $\begin{cases} \text{\$1 é pago pela operação} \\ \text{\$1 é colocado na poupança.} \end{cases}$

$A[\texttt{i}]$ muda de $1 \rightarrow 0$:
paga com poupança do i-ésimo bit.

Método de análise contábil

A começa zerado.

Pague $2 para mudar $A[\mathtt{i}]$ de $0 \to 1$

$0 para mudar $A[\mathtt{i}]$ de $1 \to 0$

$A[\mathtt{i}]$ muda de $0 \to 1$ $\begin{cases} \$1 \text{ é pago pela operação} \\ \$1 \text{ é colocado na poupança.} \end{cases}$

$A[\mathtt{i}]$ muda de $1 \to 0$:
paga com poupança do i-ésimo bit.

Custo amortizado por chamada de INCREMENT: $\leq$ $2 (no máximo uma mudança $0 \to 1$ é feita).

Método de análise contábil

A começa zerado.

Pague \$2 para mudar $A[\mathtt{i}]$ de $0 \to 1$

\$0 para mudar $A[\mathtt{i}]$ de $1 \to 0$

$A[\mathtt{i}]$ muda de $0 \to 1$ $\begin{cases} \$1 \text{ é pago pela operação} \\ \$1 \text{ é colocado na poupança.} \end{cases}$

$A[\mathtt{i}]$ muda de $1 \to 0$:
paga com poupança do i-ésimo bit.

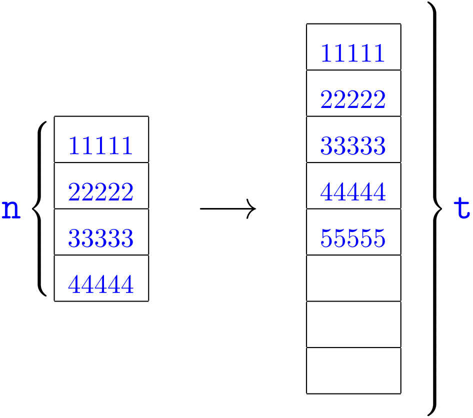
Custo amortizado por chamada de INCREMENT: $\leq$ \$2 (no máximo uma mudança $0 \to 1$ é feita).

Como \$ armazenado nunca é negativo, uma sequência de n chamadas de INCREMENT custa

Tabelas dinâmicas

CLRS 17

Tabelas dinâmicas



$\mathtt{n}[\mathtt{T}] =$ número de itens $\qquad$ $\mathtt{t}[\mathtt{T}] =$ tamanho de $\mathtt{T}$

Inicialmente $\mathtt{n}[\mathtt{T}] = \mathtt{t}[\mathtt{T}] = 0$

Inserção

TABLE-INSERT $(\mathtt{T}, x)$ $\triangleright$ Insere x na tabela $\mathtt{T}$

1 **se** $\mathtt{t}[\mathtt{T}] = 0$
2 **então** aloque $tabela[\mathtt{T}]$ com 1 posição
3 $\mathtt{t}[\mathtt{T}] \leftarrow 1$
4 **se** $\mathtt{n}[\mathtt{T}] = \mathtt{t}[\mathtt{T}]$
5 **então** aloque $nova\text{-}tabela$ com $2\,\mathtt{t}[\mathtt{T}]$ pos.
6 insira itens da $tabela[\mathtt{T}]$ na $nova\text{-}tabela$
7 $\mathtt{t}[nova\text{-}tabela] \leftarrow 2\,\mathtt{t}[\mathtt{T}]$
8 libere $tabela[\mathtt{T}]$
9 $tabela[\mathtt{T}] \leftarrow nova\text{-}tabela$
10 insira x na $tabela[\mathtt{T}]$
11 $\mathtt{n}[\mathtt{T}] \leftarrow \mathtt{n}[\mathtt{T}] + 1$

Custo $=$ número de inserções elementares (linhas 6 e 10)

Sequência de m TABLE-INSERTS

$$\mathtt{T}_0 \xrightarrow{1^{\text{a}} \text{ op}} \mathtt{T}_1 \xrightarrow{2^{\text{a}} \text{ op}} \mathtt{T}_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{m^{\text{a}} \text{ op}} \mathtt{T}_m$$

$\mathtt{T}_i$ = estado de $\mathtt{T}$ depois da i^{a} operação.

Sequência de m TABLE-INSERTS

$$\mathtt{T}_0 \xrightarrow{1^{\text{a}}\text{ op}} \mathtt{T}_1 \xrightarrow{2^{\text{a}}\text{ op}} \mathtt{T}_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{m^{\text{a}}\text{ op}} \mathtt{T}_m$$

$\mathtt{T}_i$ = estado de $\mathtt{T}$ depois da i^{a} operação.

Custo real da i^{a} operação:

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se há espaço} \\ \mathtt{n}_i & \text{se tabela cheia,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{onde } \mathtt{n}_i &= \text{valor de } \mathtt{n}[\mathtt{T}] \text{ depois da } i^{\text{a}} \text{ operação} \\ &= i. \end{aligned}$$

Sequência de m TABLE-INSERTS

$$\mathtt{T}_0 \xrightarrow{1^{\text{a}}\text{ op}} \mathtt{T}_1 \xrightarrow{2^{\text{a}}\text{ op}} \mathtt{T}_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{m^{\text{a}}\text{ op}} \mathtt{T}_m$$

$\mathtt{T}_i$ = estado de $\mathtt{T}$ depois da i^{a} operação.

Custo real da i^{a} operação:

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se há espaço} \\ \mathtt{n}_i & \text{se tabela cheia,} \end{cases}$$

onde $\mathtt{n}_i$ = valor de $\mathtt{n}[\mathtt{T}]$ depois da i^{a} operação
= i.

Custo de uma operação = $\mathrm{O}(m)$.

Sequência de m TABLE-INSERTS

$$\mathtt{T}_0 \xrightarrow{1^{\text{a}}\text{ op}} \mathtt{T}_1 \xrightarrow{2^{\text{a}}\text{ op}} \mathtt{T}_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{m^{\text{a}}\text{ op}} \mathtt{T}_m$$

$\mathtt{T}_i =$ estado de $\mathtt{T}$ depois da i^{a} operação.

Custo real da i^{a} operação:

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se há espaço} \\ \mathtt{n}_i & \text{se tabela cheia,} \end{cases}$$

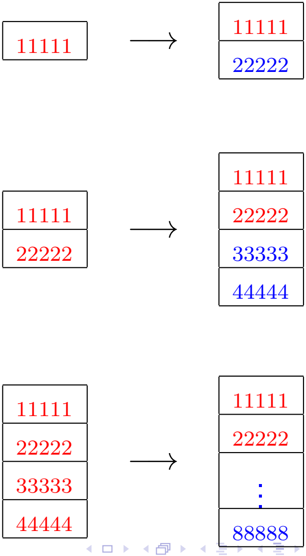
onde $\mathtt{n}_i$ $=$ valor de $\mathtt{n}[\mathtt{T}]$ depois da i^{a} operação
$= i$.

Custo de uma operação $= \mathrm{O}(m)$.

Custo das m operações $= \mathrm{O}(m^2)$. Exagero!

Exemplo

n[T] (operação)	t[T]	custo
1	1	1
2	2	1+1
3	4	1+2
4	4	1
5	8	1+4
6	8	1
7	8	1
8	8	1
9	16	1+8
10	16	1
16	16	1
17	32	1+16
33	64	1+32



Custo amortizado

Custo total:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \;=\; m + \sum_{i=0}^{k} 2^i \;=\; m + 2^{k+1} - 1 \;<\; m + 2m - 1 \;<\; 3m$$

onde $k = \lfloor \lg(m-1) \rfloor$

Custo amortizado:

$$\frac{3m}{m} \;=\; 3 \;=\; \Theta(1)$$

Conclusões

O custo de uma sequência de m execuções do algoritmo TABLE-INSERT é $\Theta(m)$.

O custo amortizado do algoritmo TABLE-INSERT é $\Theta(1)$.

Método de análise agregada

- m operações consomem tempo $T(m)$.

Método de análise agregada

- m operações consomem tempo $T(m)$.
- custo médio de cada operação é $T(m)/m$.
- custo amortizado de cada operação é $T(m)/m$.

Método de análise agregada

- m operações consomem tempo $T(m)$.
- custo médio de cada operação é $T(m)/m$.
- custo amortizado de cada operação é $T(m)/m$.
- defeito: no caso de mais de um tipo de operação, o custo de cada tipo não é determinado separadamente.

Método de análise contábil

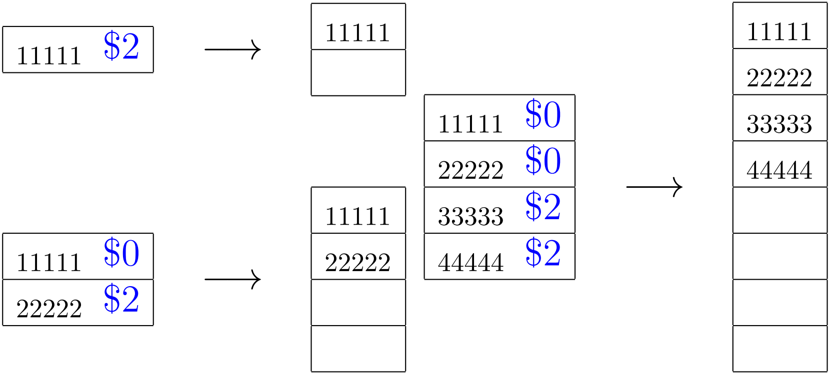
```
TABLE-INSERT (T, x)

    credito ← credito + 3
    se t[T] = 0
        então aloque tabela[T] com 1 posição
              t[T] ← 1
    se n[T] = t[T]
        então aloque nova-tabela com 2 t[T] pos.
              insira itens da tabela[T] na nova-tabela
              custo ← custo + n[T]
              libere tabela[T]
              tabela[T] ← nova-tabela
              t[T] ← 2 t[T]
    insira x na tabela[T]
    n[T] ← n[T] + 1
    custo ← custo + 1
```

Método de análise contábil

Invariante: soma créditos $\geq$ soma custos reais

n[T]	t[T]	custo	crédito	saldo
1	1	1	3	2
2	2	$1+1$	3	3
3	4	$1+2$	3	3
4	4	1	3	5
5	8	$1+4$	3	3
6	8	1	3	5
7	8	1	3	7
8	8	1	3	9
9	16	$1+8$	3	3
10	16	1	3	5
16	16	1	3	17
17	32	$1+16$	3	3

Método de análise contábil



Método de análise contábil

Pague	$1	para inserir um novo elemento
guarde	$1	para eventualmente mover o novo elemento
guarde	$1	para mover um elemento que já está na tabe

Custo amortizado por chamada de TABLE-INSERT:
$\leq$ $3

Sequência de m chamadas de TABLE-INSERT.

Como $ armazenado nunca é negativo,

$$\begin{aligned} \text{soma custos reais} &\leq \text{soma custos amortizados} \\ &= 3m \\ &= \mathrm{O}(m) \end{aligned}$$

Método de análise contábil

- cada operação paga seu custo real
- cada operação recebe um certo número de créditos
  (chute de custo amortizado)
- balanço nunca pode ser negativo

  $$\text{soma créditos} \;\geq\; \text{soma custos reais}$$

  créditos não usados são guardados para pagar operações futuras.
- custo amortizado de cada tipo de operação pode ser determinado separadamente

Conclusões

O custo de uma sequência de m execuções do algoritmos $\textsc{Table-Insert}$ é $\Theta(m)$.

O custo amortizado do algoritmo $\textsc{Table-Insert}$ é $\Theta(1)$.

Sequencia de INSERT e DELETE

Sequência de operações TABLE-INSERT e
TABLE-DELETE

$$\underbrace{\text{I} \quad \text{I} \quad \text{D} \quad \text{I} \quad \text{I} \quad \text{D} \quad \text{I} \quad \text{D} \quad \text{D} \quad \text{I} \quad \text{D} \quad \text{D} \quad \text{I} \quad \text{I}}_{m}$$

Custo total de uma sequência de TABLE-INSERT e TABLE-DELETE?

Remoção

Remove um elemento x da tabela T

TABLE-DELETE (T, x) ▷ supõe x na *tabela*[T]

```
1  remova x da tabela[T]
2  n[T] ← n[T] − 1
3  se n[T] < t[T]/2        ▷ tabela está "vazia"?
4      então aloque nova-tabela com t[T]/2 pos.
5            insira itens da tabela[T] na nova-tabela
6            t[nova-tabela] ← t[T]/2
7            n[nova-tabela] ← n[T]
8            libere tabela[T]
9            tabela[T] ← nova-tabela
```

Custo = número de remoções e inserções elementares
(linhas 1 e 5)

Sequência de Insert e Delete

Sequência de operações Table-Insert e
Table-Delete

$$\underbrace{\underbrace{\mathsf{I}\ \cdots\ \mathsf{I}\ \ \mathsf{I}}_{m/2}\ \ \mathsf{I}\ \ \mathsf{D}\ \ \mathsf{D}\ \ \mathsf{I}\ \ \mathsf{I}\ \ \mathsf{D}\ \ \mathsf{D}\ \ \mathsf{I}\ \ \mathsf{I}\ \ \mathsf{D}\ \ \mathsf{D}}_{m}$$

Se $m = 4\,k$, então, o custo total da sequência:

$$\Theta(2\,k) + k\,\Theta(2\,k) = \Theta\left(\frac{m}{2}\right) + \frac{m}{4}\,\Theta\left(\frac{m}{2}\right) = \Theta(m^2)$$

Remoção

Remove um elemento x da tabela T

TABLE-DELETE (T, x) ▷ supõe x na *tabela*[T]

```
1   remova x da tabela[T]
2   n[T] ← n[T] − 1
3   se n[T] < t[T]/4        ▷ tabela está "vazia"?
4       então aloque nova-tabela com t[T]/2 pos.
5             insira itens da tabela[T] na nova-tabela
6             t[nova-tabela] ← t[T]/2
7             n[nova-tabela] ← n[T]
8             libere tabela[T]
9             tabela[T] ← nova-tabela
```

Custo = número de remoções e inserções elementares
(linhas 1 e 5)

Sequência de m operações

$$\mathtt{T}_0 \xrightarrow{1^{\text{a}}\text{ op}} \mathtt{T}_1 \xrightarrow{2^{\text{a}}\text{ op}} \mathtt{T}_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{m^{\text{a}}\text{ op}} \mathtt{T}_m$$

$\mathtt{T}_i$ = estado de $\mathtt{T}$ depois da i^{a} operação.

Custo real da i^{a} operação se for TABLE-INSERT:

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se há espaço} \\ \mathtt{n}_i & \text{se tabela cheia} \end{cases}$$

onde $\mathtt{n}_i$ = valor de $\mathtt{n}[\mathtt{T}]$ depois da i^{a} operação

Custo de uma operação = $\mathrm{O}(m)$

Sequência de m operações

$$\mathtt{T}_0 \xrightarrow{1^{\text{a}}\text{ op}} \mathtt{T}_1 \xrightarrow{2^{\text{a}}\text{ op}} \mathtt{T}_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{m^{\text{a}}\text{ op}} \mathtt{T}_m$$

$\mathtt{T}_i$ = estado de $\mathtt{T}$ depois da i^{a} operação.

Custo real da i^{a} operação se for TABLE-DELETE:

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathtt{n}_{i-1} > \mathtt{t}_{i-1}/4 \\ 1 + \mathtt{n}_i & \text{se } \mathtt{n}_{i-1} = \mathtt{t}_{i-1}/4 \end{cases}$$

onde $\mathtt{n}_i$ = valor de $\mathtt{n}[\mathtt{T}]$ depois da i^{a} operação
e $\mathtt{t}_i$ = valor de $\mathtt{t}[\mathtt{T}]$ depois da i^{a} operação

Custo de uma operação $= \mathrm{O}(m)$

Custo das m operações $= \mathrm{O}(m^2)$ Exagero!

Conclusões

O custo de uma sequência de m execuções dos algoritmos TABLE-INSERT e TABLE-DELETE é $\Theta(m)$.

O custo amortizado dos algoritmos TABLE-INSERT e TABLE-DELETE é $\Theta(1)$.

Pilhas redimensionáveis

Pilha (= stack) e sua API (PF)

1.3 Bags, Queues, and Stacks (SW)

Pilhas redimensionáveis

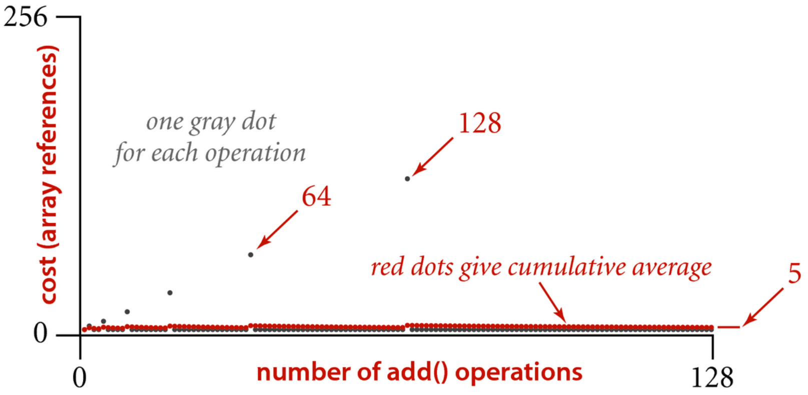
Considere a implementação de saco (Bag) em vetor com redimensionamento.

O custo amortizado da operação add() é muito baixo, pois cada ocorrência de uma execução lenta de add() é precedida por muitas ocorrências de execuções rápidas.

Pilhas redimensionáveis

public class	Stack<Item>	
	Stack()	construtor cria uma pilha de Items vazia
void	push(Item item)	insere item nesta pilha
Item	pop()	remove o Item mais recente desta pilha
boolean	isEmpty()	esta pilha está vazia?
int	size()	número de Items nesta pilha

Pilhas redimensionáveis



Amortized cost of adding to a RandomBag