

AULA 3

Conectividade dinâmica

1.5 Case Study: Union-Find

Leitura, vídeos, ...

Leitura: Case Study: Union-Find, S&W

Vídeos: *Union-find* e Kruskal, Gabriel Russo, canal BCC e *Union-find*, Robert Sedgewick.

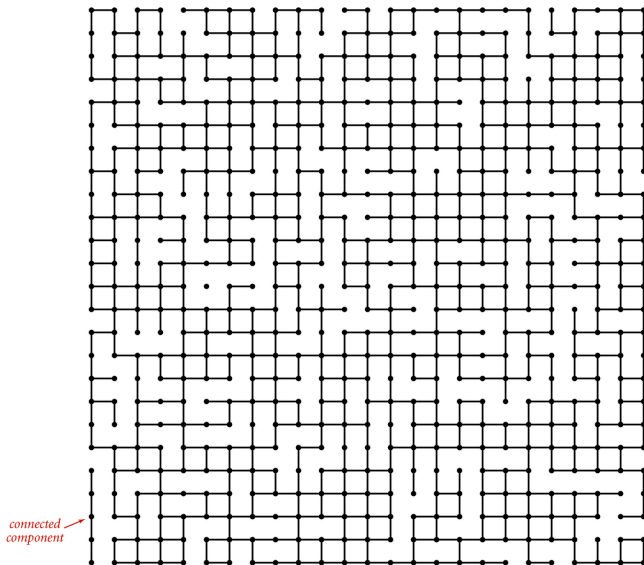
Considere uma coleção de conjuntos disjuntos

S_1, S_2, \dots, S_n .

Conjuntos são modificados ao longo do tempo.

Terminologia utiliza metáfora de redes: **sítios**/*sites*, **conexão**,...

Problema: p e q estão ligados?



Medium connectivity example (625 sites, 900 edges, 3 connected components)

Conjuntos disjuntos

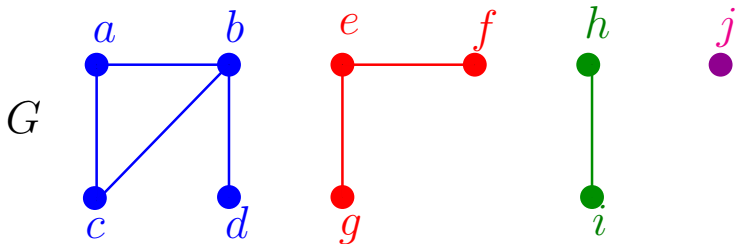
Seja $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ uma coleção de conjuntos disjuntos, ou seja,

$$S_i \cap S_j = \emptyset$$

para todo $i \neq j$.

Conjuntos disjuntos

Exemplo de coleção disjunta de conjuntos:
componentes conexos de um grafo



componentes formam conjuntos disjuntos de vértices

$\{a, b, c, d\}$ $\{e, f, g\}$ $\{h, i\}$ $\{j\}$

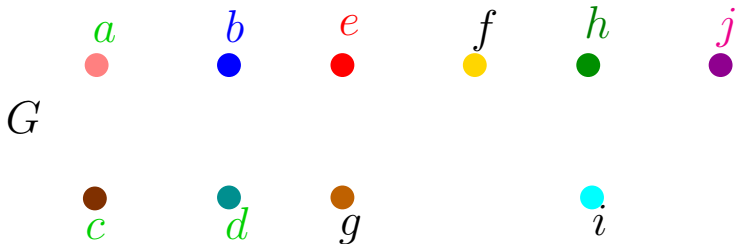
Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico



aresta

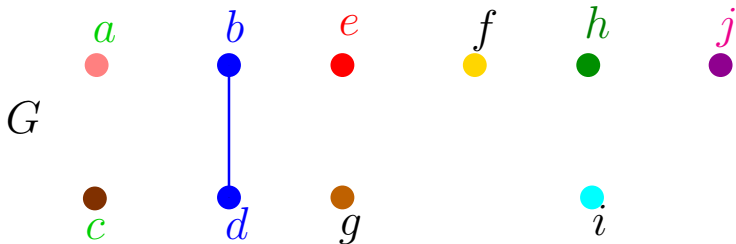
componentes

$\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{d\}$ $\{e\}$ $\{f\}$ $\{g\}$ $\{h\}$ $\{i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico



aresta

componentes

(b, d)

$\{a\}$

$\{b, d\}$

$\{c\}$

$\{e\}$

$\{f\}$

$\{g\}$

$\{h\}$

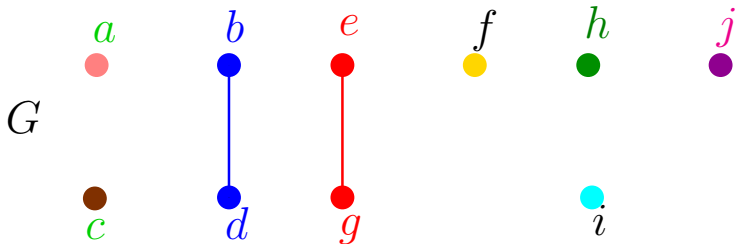
$\{i\}$

$\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico



aresta

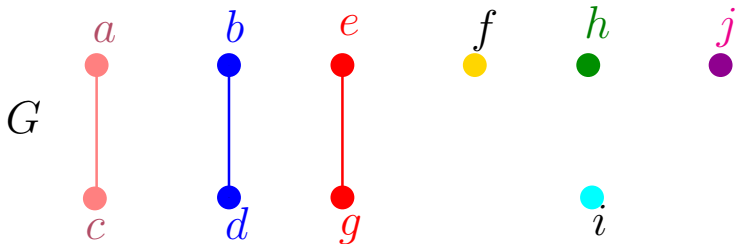
componentes

(e, g) $\{a\}$ $\{b, d\}$ $\{c\}$ $\{e, g\}$ $\{f\}$ $\{h\}$ $\{i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico



aresta

componentes

(a, c)

$\{a, c\}$

$\{b, d\}$

$\{e, g\}$

$\{f\}$

$\{h\}$

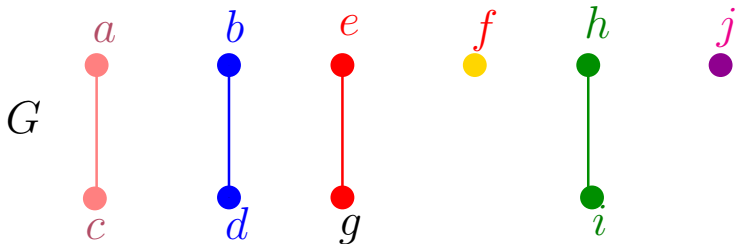
$\{i\}$

$\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico



aresta

componentes

(h, i)

$\{a, c\}$

$\{b, d\}$

$\{e, g\}$

$\{f\}$

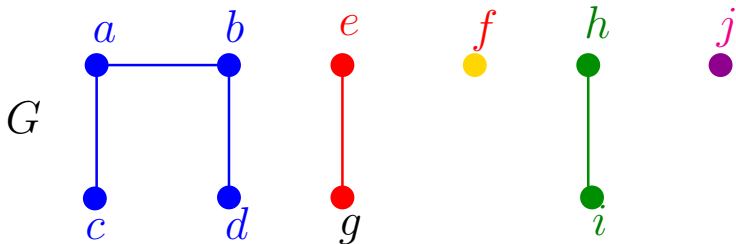
$\{h, i\}$

$\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico



aresta

componentes

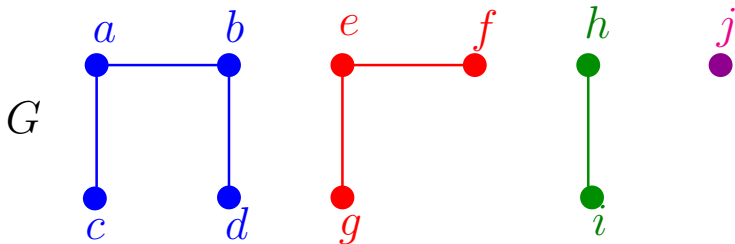
(a, b)

$\{a, b, c, d\}$ $\{e, g\}$ $\{f\}$ $\{h, i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico



aresta

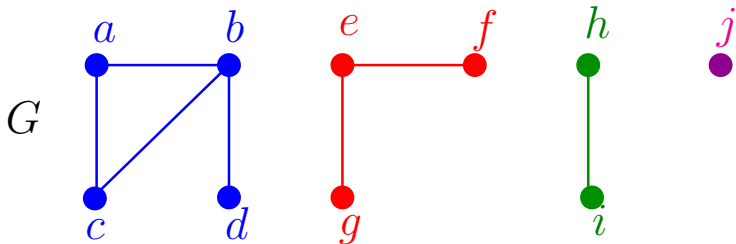
componentes

(e, f) $\{a, b, c, d\}$ $\{e, f, g\}$ $\{h, i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico



aresta

componentes

(b, c)

$\{a, b, c, d\}$

$\{e, f, g\}$

$\{h, i\}$

$\{j\}$

Operações básicas

\mathcal{S} coleção de conjuntos disjuntos.

Cada conjunto tem um **representante**.

MAKESET (x): x é elemento novo
 $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{\{x\}\}$

Operações básicas

\mathcal{S} coleção de conjuntos disjuntos.

Cada conjunto tem um **representante**.

MAKESET (x): x é elemento novo
 $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{\{x\}\}$

UNION (x, y): x e y em conjuntos diferentes
 $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} - \{S_x, S_y\} \cup \{S_x \cup S_y\}$

Operações básicas

\mathcal{S} coleção de conjuntos disjuntos.

Cada conjunto tem um **representante**.

MAKESET (x): x é elemento novo
 $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{\{x\}\}$

UNION (x, y): x e y em conjuntos diferentes
 $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} - \{S_x, S_y\} \cup \{S_x \cup S_y\}$
 x está em S_x e y está em S_y

FINDSET (x): devolve representante do conjunto que contém x

Connected-Components

Recebe um grafo G e contrói uma representação dos componentes conexos.

CONNECTED-COMPONENTS (G)

- 1 para cada vértice v de G faça
- 2 **MAKESET** (v)
- 3 para cada aresta (u, v) de G faça
- 4 se **FINDSET** (u) \neq **FINDSET** (v)
- 5 então **UNION** (u, v)

Detalhes de implementação: objeto representando vértice u aponta para para a representação de u como conjunto, e vice-versa.

Consumo de tempo

n := número de vértices do grafo

m := número de arestas do grafo

linha consumo de **todas** as execuções da linha

$$1 = \Theta(n)$$

$$2 = n \times \text{consumo de tempo MAKESET}$$

$$3 = \Theta(m)$$

$$4 = 2m \times \text{consumo de tempo FINDSET}$$

$$5 \leq n \times \text{consumo de tempo UNION}$$

$$\begin{aligned} \text{total} &\leq \Theta(n + m) + n \times \text{consumo de tempo MAKESET} \\ &\quad + 2m \times \text{consumo de tempo FINDSET} \\ &\quad + n \times \text{consumo de tempo UNION} \end{aligned}$$

Same-Component

Decide se u e v estão no mesmo componente:

SAME-COMPONENT (u, v)

- 1 **se** **FINDSET** (u) = **FINDSET** (v)
- 2 **então devolva** **SIM**
- 3 **senão devolva** **NÃO**

Algoritmo de Kruskal

Encontra uma **árvore geradora mínima** (CLRS 23).

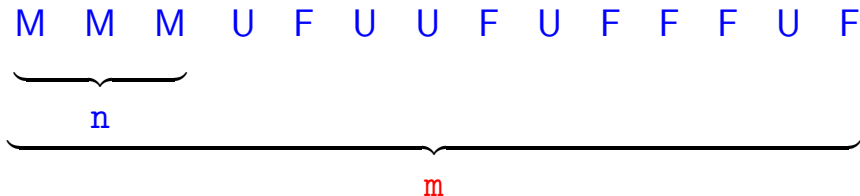
MST-KRUSKAL (G, w) $\triangleright G$ conexo

```
-1  coloque arestas em ordem crescente de  $w$ 
0    $A \leftarrow \emptyset$ 
1   para cada vértice  $v$  faça
2       MAKESET ( $v$ )
3   para cada aresta  $uv$  em ordem crescente de  $w$  faça
4       se FINDSET ( $u$ )  $\neq$  FINDSET ( $v$ )
5           então UNION ( $u, v$ )
8            $A \leftarrow A \cup \{uv\}$ 
9   devolva  $A$ 
```

“Avô” de todos os algoritmos gulosos.

Conjuntos disjuntos dinâmicos

Sequência de operações **MAKESET**, **UNION**,
FINDSET



Que estrutura de dados usar?

Compromissos (*trade-offs*).

API

`public class UF`

`UF(int n)`

inicializa n sites com
nomes inteiros
 $0, \dots, n-1$

`void`

`union(int p, int q)`

acrescenta ligação
entre p e q

`int`

`find(int p)`

retorna id do
componente de p

`boolean`

`connected(int p, int q)`

true se p e q
estão no mesmo
componente

`int`

`count()`

número de
componentes

Cliente

```
public static void main(String[] args) {
    int n = StdIn.readInt();
    UF uf = new UF(n);
    while (!StdIn.isEmpty()) {
        int p = StdIn.readInt();
        int q = StdIn.readInt();
        if (uf.connected(p, q)) continue;
        uf.union(p, q);
        StdOut.println(p + " " + q);
    }
    StdOut.println(uf.count()+" comps");
}
```

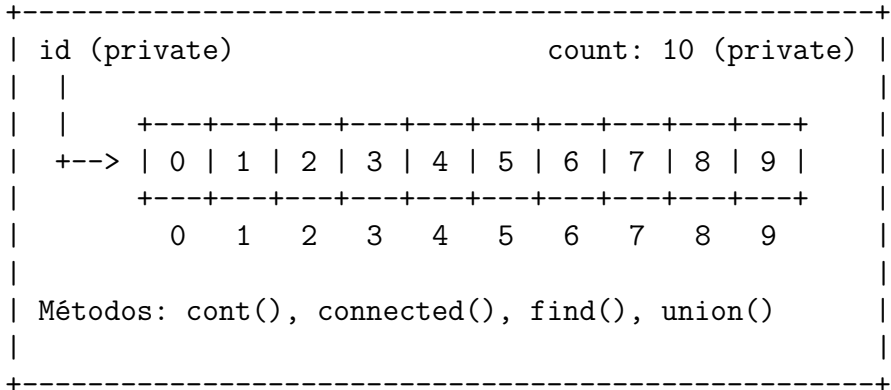
Quick-find

1.5 Case Study: Union-Find

QuickFindUF

```
QuickFindUF uf = new QuickFindUF(10);
```

```
uf ----+  
      |  
      V
```

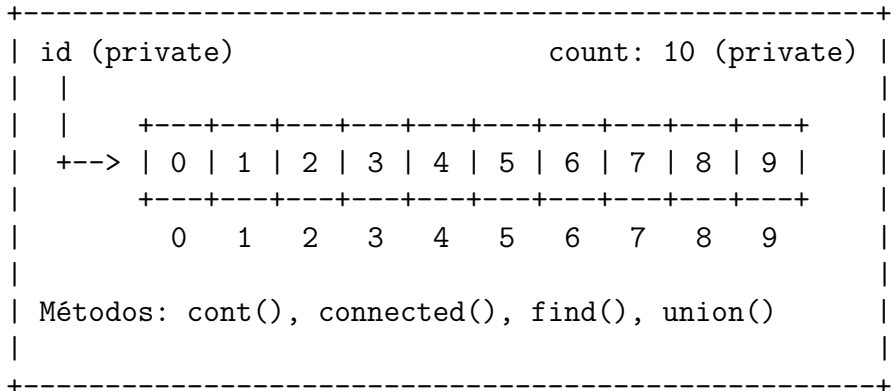


QuickFindUF

uf.find(3) retorna 3

uf.find(0) retorna 0

```
uf ----+
      |
      v
```



QuickFindUF

```
uf.union(4, 3);
```

```
uf ----+  
      |  
      v
```

id (private)	count: 9 (private)									
	0	1	2	3	3	5	6	7	8	9
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Métodos: cont(), connected(), find(), union()										

QuickFindUF

uf.find(3) retorna 3
uf.union(3, 8);

uf.find(4) retorna 3

uf ----+
 |
 V

id (private)	count: 8 (private)
0	8
1	5
2	6
3	7
4	8
5	9
6	
7	
8	
9	

Métodos: cont(), connected(), find(), union()

QuickFindUF

```
uf.union(6, 5);
```

```
uf ----+  
      |  
      v
```

id (private)	count: 7 (private)
0	8
1	8
2	5
3	5
4	7
5	8
6	9
7	
8	
9	

Métodos: cont(), connected(), find(), union()

QuickFindUF

```
uf.union(9, 4);
```

```
uf ----+  
      |  
      v
```

id (private)	count: 6 (private)
0	8
1	8
2	5
3	5
4	7
5	8
6	8
7	
8	
9	

Métodos: cont(), connected(), find(), union()

QuickFindUF

```
uf.union(2, 1);
```

```
uf ----+  
      |  
      v
```

id (private)	count: 5 (private)
0	1
1	1
8	8
8	5
5	5
7	7
8	8
8	8

Métodos: cont(), connected(), find(), union()

QuickFindUF

```
uf.union(8, 9);
```

```
uf ----+  
      |  
      v
```

id (private)	count: 5 (private)
0	1
1	1
8	8
8	8
5	5
5	5
7	7
8	8
8	8

Métodos: cont(), connected(), find(), union()

QuickFindUF

```
uf.union(5, 0);
```

```
uf ----+  
      |  
      v
```

id (private)	count: 5 (private)
0	1
1	1
2	8
3	8
4	0
5	0
6	7
7	8
8	8
9	

Métodos: cont(), connected(), find(), union()

QuickFindUF

```
uf.union(7, 2);
```

```
uf ----+  
      |  
      v
```

id (private)	count:	3 (private)
0	1	1
1	8	8
2	0	0
3	0	1
4	8	8
5		
6		
7		
8		
9		

Métodos: cont(), connected(), find(), union()

QuickFindUF

```
uf.union(6, 1);
```

```
uf ----+  
      |  
      v
```

id (private)	count: 2 (private)
1	1
1	1
1	1
8	1
8	1
1	1
1	1
1	1
8	1
8	1

Métodos: cont(), connected(), find(), union()

Consumo de tempo

$UF(n)$	$\Theta(n)$
$union(p, q)$	$O(n)$
$find(p)$	$\Theta(1)$

Uma sequência de m operações pode consumir tempo $\Theta(m^2)$ no pior caso.

Consumo de tempo amortizado de cada operação é $O(m)$.

Hmm. Em $union()$ seria razoável alterarmos o **menor número possível de posições** do vetor id . Para isso precisamos saber qual conjunto tem o menor número de itens. . .

Experimentos

```
% java Driver < tinyUF.txt
```

```
2 components
```

```
0.002seg
```

```
% java Driver < mediumUF.txt
```

```
3 components
```

```
0.025seg
```

```
% java Driver < largeUF.txt
```

```
:-(  

```

Quick-union

1.5 Case Study: Union-Find

QuickUnionUF

A **ideia** é trocar o indicador `id[]` do componente por um indicador do `pai[]` do sítio. Por sua vez, se `p` é um sítio, o `pai p` indica quem é **avô** (`pai [pai [p]]`), que indica que é o **bisavô** (`pai [pai [pai [p]]]`), que indica o sítio **tataravô**,...

QuickUnionUF

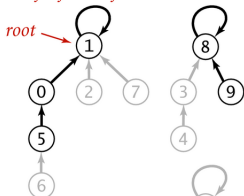
O **representante** ou **nome** de um componente será o sítio que é o pai de si mesmo. Hmm. Aqui a metáfora fica meio estranha. . .

É intuitivo representarmos a estrutura através de um conjunto de **árvores disjuntas** (= **floresta**) onde as raízes das árvores são os sítios p tais que

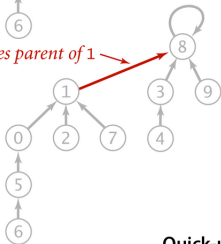
$$p == \text{pai}[p].$$

Estrutura *disjoint-set forest*

id[] is parent-link representation of a forest of trees



8 becomes parent of 1



find has to follow links to the root

p	q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	9	1	1	1	8	3	0	5	1	8	8

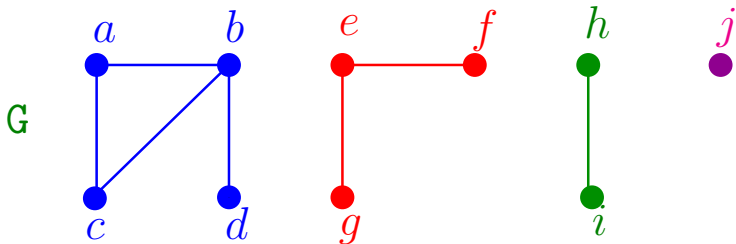
↑
↑
find(5) is *find(9) is*
id[id[id[5]]] *id[id[9]]*

union changes just one link

p	q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	9	1	1	1	8	3	0	5	1	8	8
		1	8	1	8	3	0	5	1	8	8

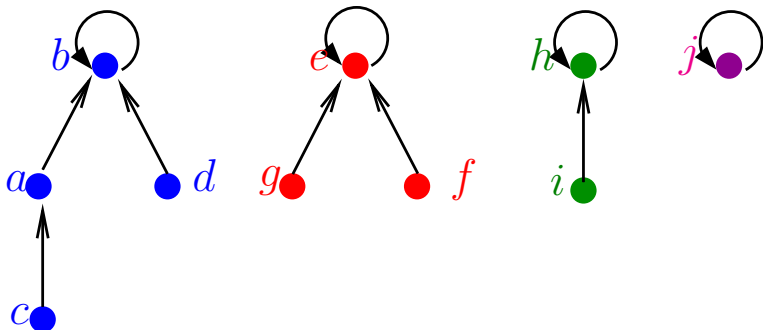
Quick-union overview

Estrutura *disjoint-set forest*



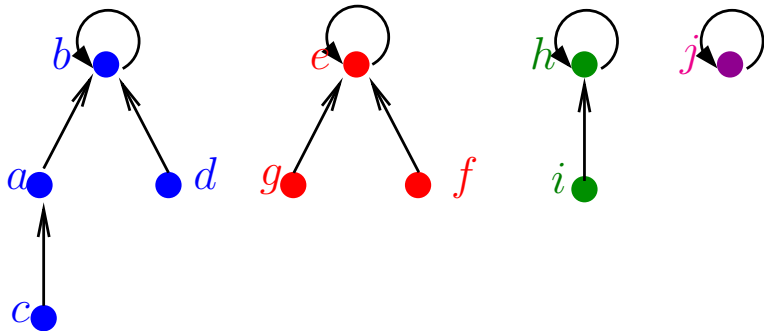
- ▶ cada conjunto tem uma **raiz**, que é o seu representate
- ▶ cada nó p tem um pai
- ▶ $\text{pai}[p] = p$ se e só se p é uma raiz

Estrutura *disjoint-set forest*



- ▶ cada conjunto tem uma **raiz**
- ▶ cada nó **p** tem um pai
- ▶ $\text{pai}[p] = p$ se e só se **p** é uma raiz

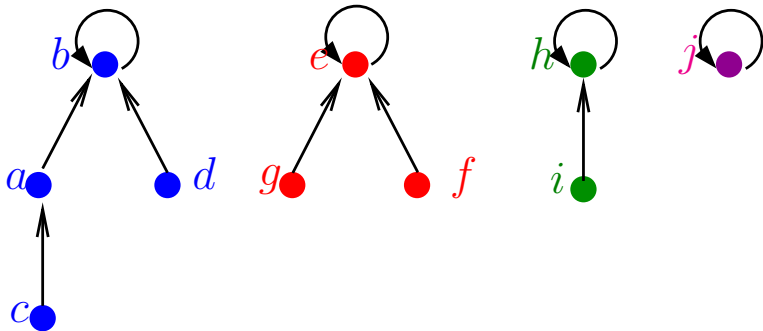
MakeSet e FindSet



MAKESET(p)

1 $pai[p] \leftarrow p$

MakeSet e FindSet



MAKESET(*p*)

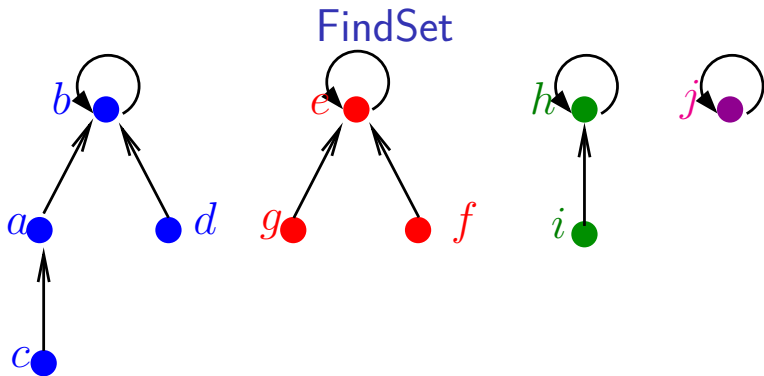
1 $\text{pai}[p] \leftarrow p$

FINDSET(*p*)

1 **enquanto** $\text{pai}[p] \neq p$ **faça**

2 $p \leftarrow \text{pai}[p]$

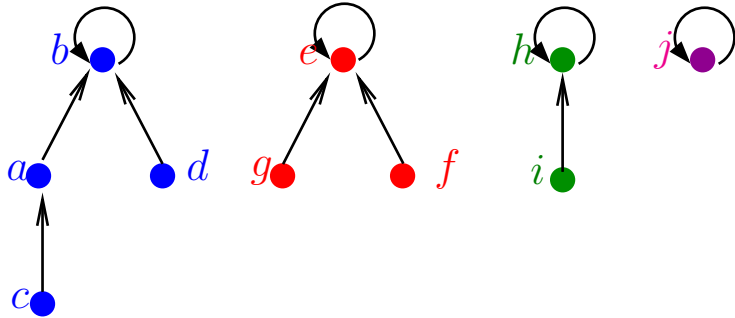
3 **devolva** *p*



FINDSET(p)

- 1 se $\text{pai}[p] = p$
- 2 então devolva p
- 3 senão devolva **FINDSET**($\text{pai}[p]$)

Union



$\text{UNION}(p, q)$

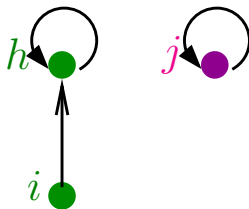
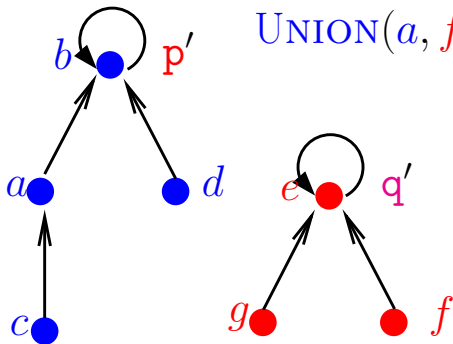
1 $p' \leftarrow \text{FINDSET}_0(p)$

2 $q' \leftarrow \text{FINDSET}_0(q)$

3 $\text{pai}[q'] \leftarrow p'$

Union

$\text{UNION}(a, f)$

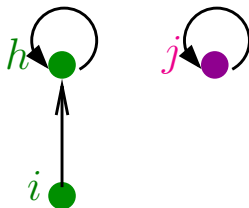
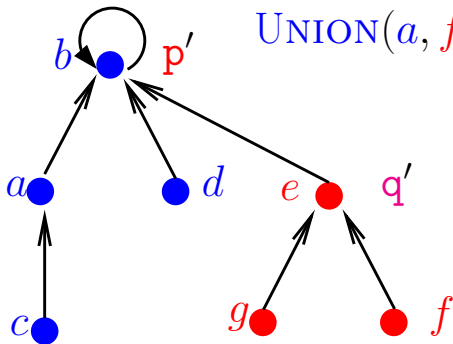


$\text{UNION}(p, q)$

- 1 $p' \leftarrow \text{FINDSET}_0(p)$
- 2 $q' \leftarrow \text{FINDSET}_0(q)$
- 3 $\text{pai}[q'] \leftarrow p'$

Union

$\text{UNION}(a, f)$



$\text{UNION}(p, q)$

- 1 $p' \leftarrow \text{FINDSET}_0(p)$
- 2 $q' \leftarrow \text{FINDSET}_0(q)$
- 3 $\text{pai}[q'] \leftarrow p'$

MakeSet, Union e FindSet

MAKESET(p)

1 $\text{pai}[p] \leftarrow p$

UNION(p, q)

1 $p' \leftarrow \text{FINDSET}_0(p)$

2 $q' \leftarrow \text{FINDSET}_0(q)$

3 $\text{pai}[q'] \leftarrow p'$

FINDSET(p)

1 **se** $\text{pai}[p] = p$

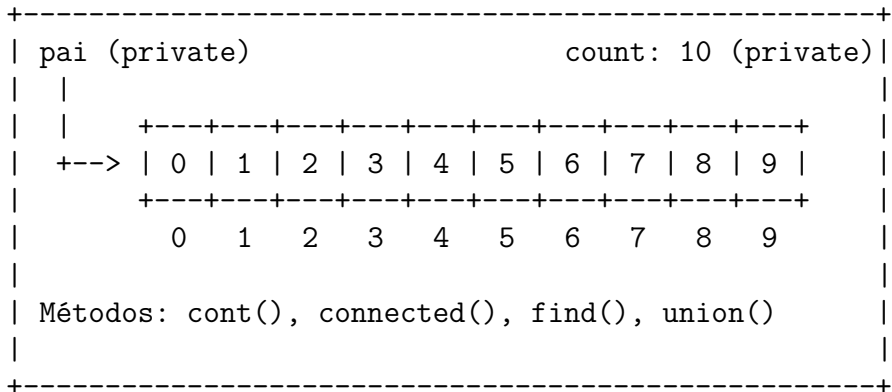
2 **então devolva** p

3 **senão devolva** $\text{FINDSET}_1(\text{pai}[p])$

QuickUnionUF

```
QuickUnionUF uf = new QuickUnionUF(10);
```

```
uf ----+  
      |  
      v
```

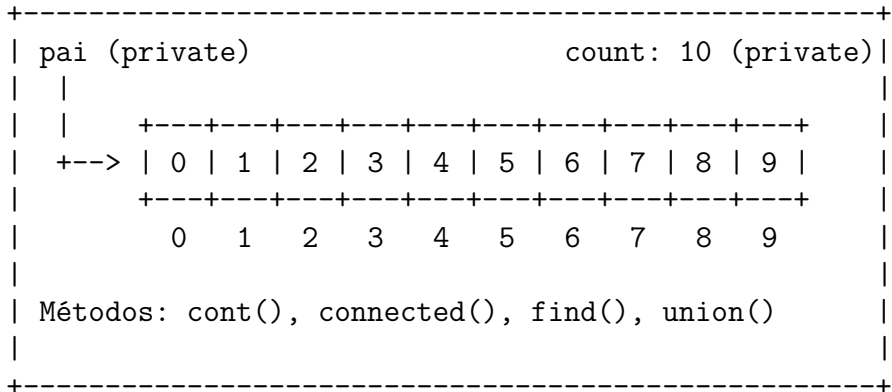


QuickUnionUF

uf.find(3) retorna 3

uf.find(0) retorna 0

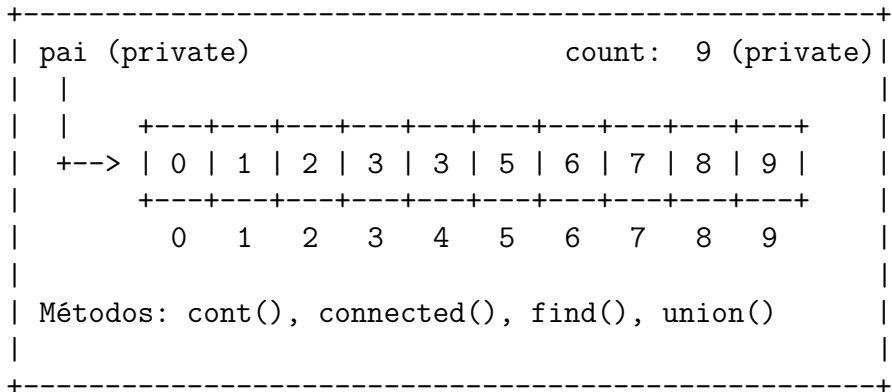
```
uf ----+
      |
      v
```



QuickUnionUF

```
uf.union(4, 3);
```

```
uf ----+  
      |  
      V
```

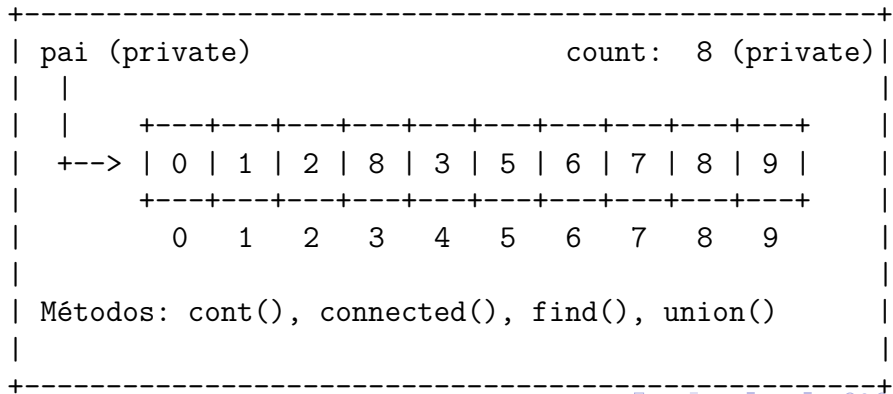


QuickUnionUF

uf.find(3) retorna 3
uf.union(3, 8);

uf.find(4) retorna 3

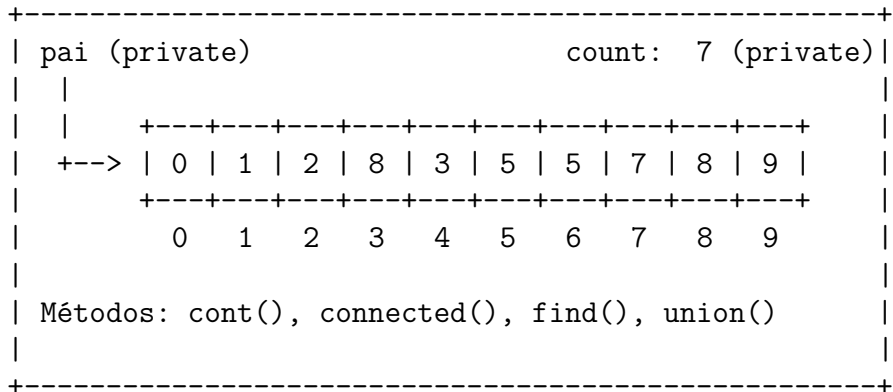
uf ----+
 |
 V



QuickUnionUF

```
uf.union(6, 5);
```

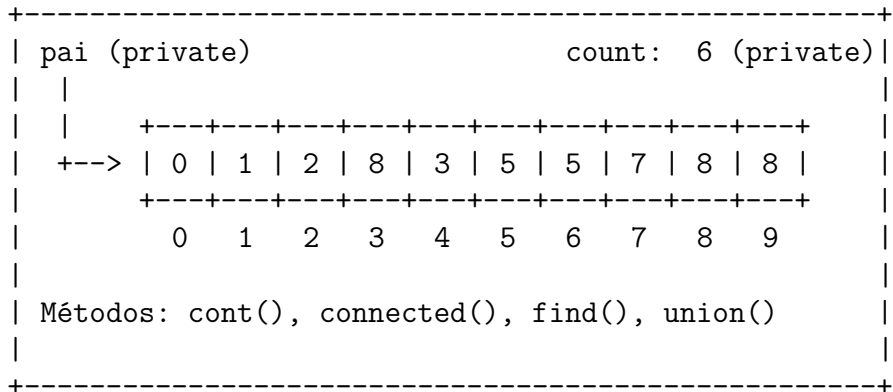
```
uf ----+  
      |  
      v
```



QuickUnionUF

```
uf.union(9, 4);
```

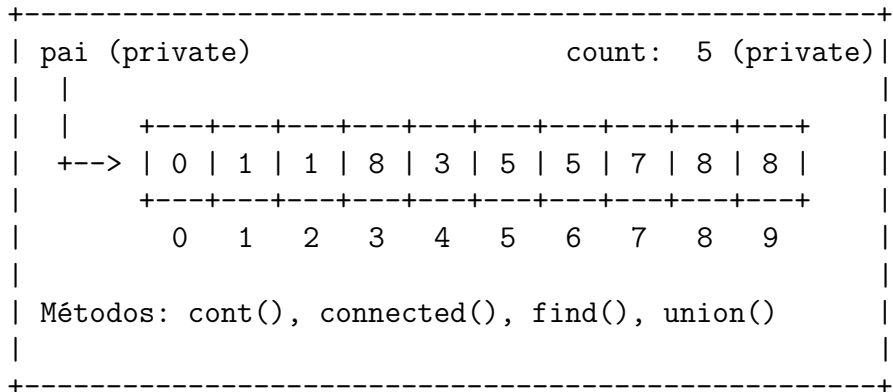
```
uf ----+  
      |  
      v
```



QuickUnionUF

```
uf.union(2, 1);
```

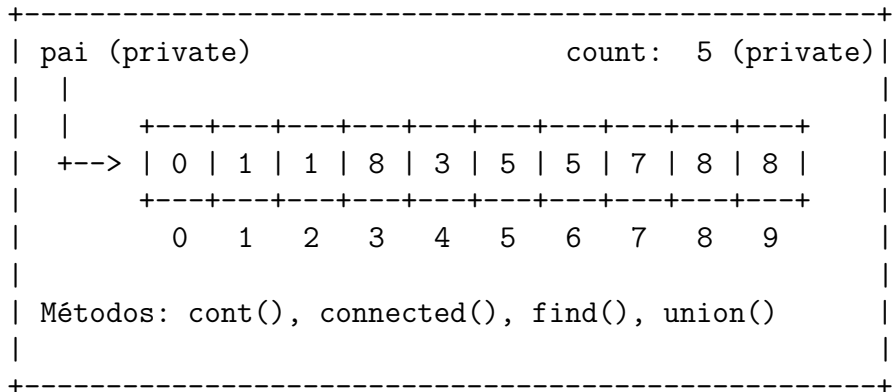
```
uf ----+  
      |  
      v
```



QuickUnionUF

```
uf.union(8, 9);
```

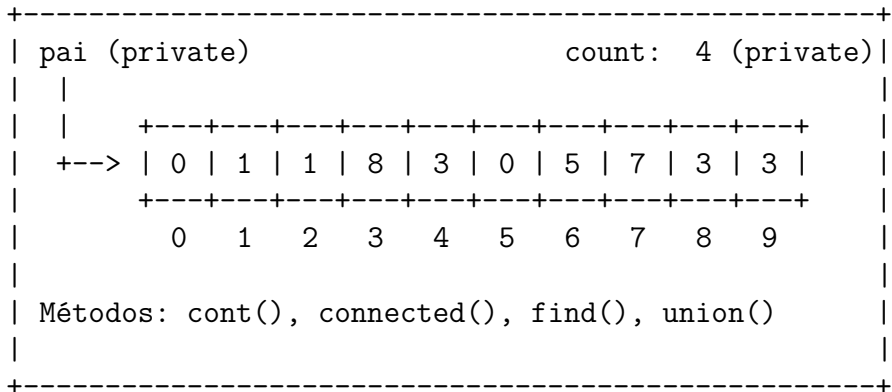
```
uf ----+  
      |  
      v
```



QuickUnionUF

```
uf.union(5, 0);
```

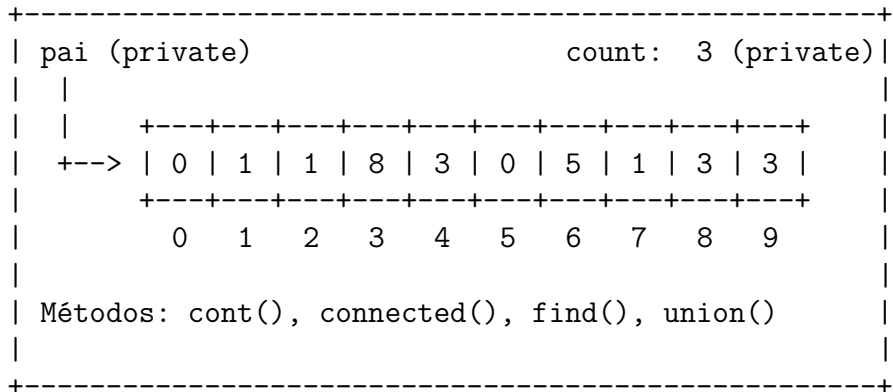
```
uf ----+  
      |  
      v
```



QuickUnionUF

```
uf.union(7, 2);
```

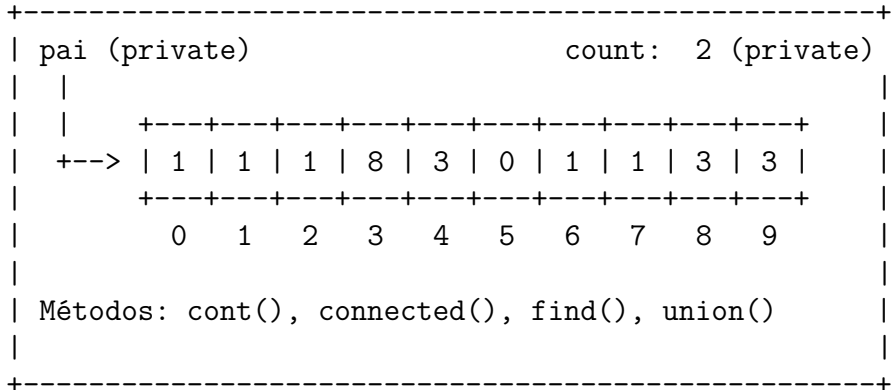
```
uf ----+  
      |  
      v
```



QuickUnionUF

```
uf.union(6, 1);
```

```
uf ----+  
      |  
      v
```

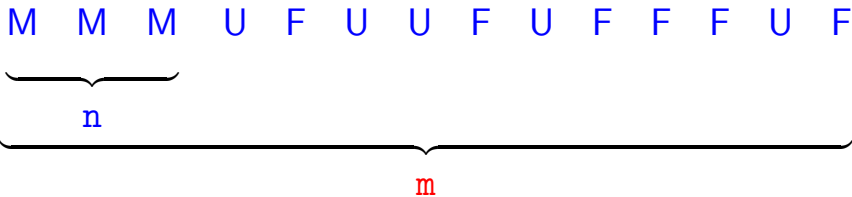


Consumo de tempo

UF(n) $\Theta(n)$

find(p) $O(n)$

union(p, q) $O(n)$



Custo total da sequência:

$$n \Theta(1) + m O(n) + n O(n) = O(mn)$$

Weight-Quick-union

1.5 Case Study: Union-Find

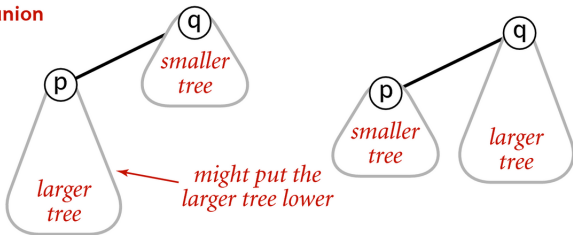
WeightedQuickUnionUF

Ideia, ligar a raiz da árvore com menos sítios na raiz da árvore com mais sítios.

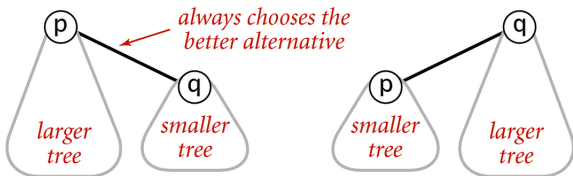
Isso seria a política natural para tornarmos o quick-find mais eficiente.

WeightedQuickUnionUF

quick-union

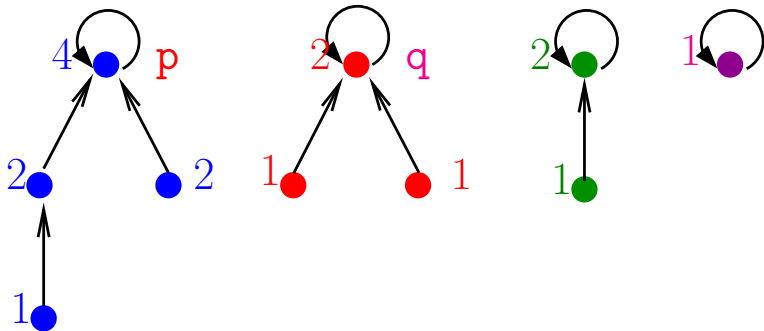


weighted



Weighted quick-union

union by size



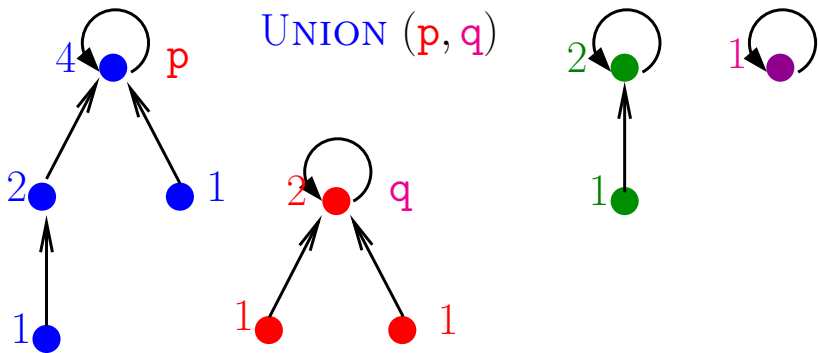
$sz[p] = \text{n\acute{o}s em } p$

MAKESET (p)

1 $\text{pai}[p] \leftarrow p$

2 $sz[p] \leftarrow 0$

union by size



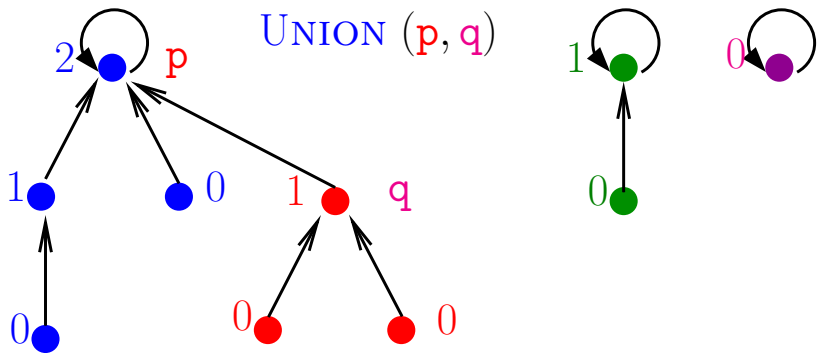
$sz[p] = \text{n\acute{o}s em } p$

MAKESET (p)

1 pai[p] \leftarrow p

2 sz[p] \leftarrow 0

union by size

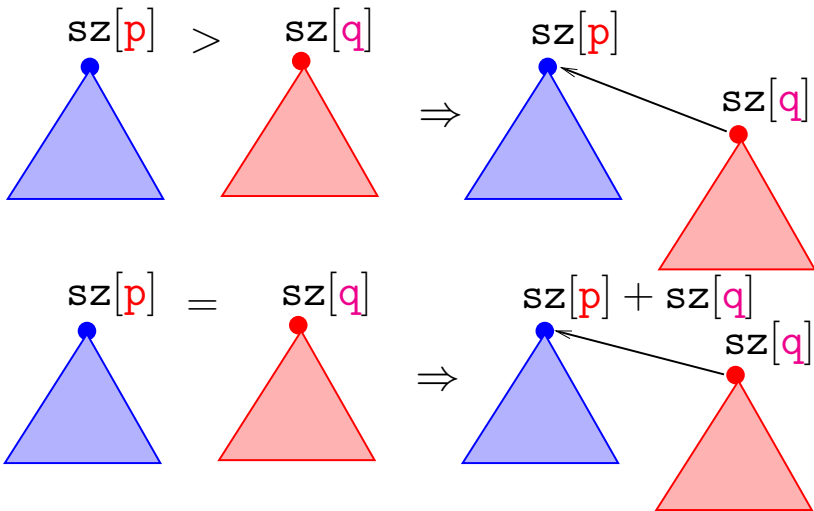


$sz[p] =$ posto do nó p MAKESET (p)

1 pai[p] \leftarrow p

2 sz[p] \leftarrow 0

union by size



union by size

UNION (p, q) \triangleright com “union by size”

1 $p' \leftarrow \text{FINDSET}(p)$

2 $q' \leftarrow \text{FINDSET}(q)$ \triangleright supõe que $p' \neq q'$

3 **se** $\text{sz}[p'] > \text{sz}[q']$

4 **então** $\text{pai}[q'] \leftarrow p'$

5 $\text{sz}[p'] \leftarrow \text{sz}[p'] + \text{sz}[q']$

6 **senão** $\text{pai}[p'] \leftarrow q'$

7 $\text{sz}[q'] \leftarrow \text{sz}[q'] + \text{sz}[p']$

WeightedQuickUnionUF

```
WeightedQuickUnionUF uf = new WeightedQuickUnionUF(10);
```

```
uf
```

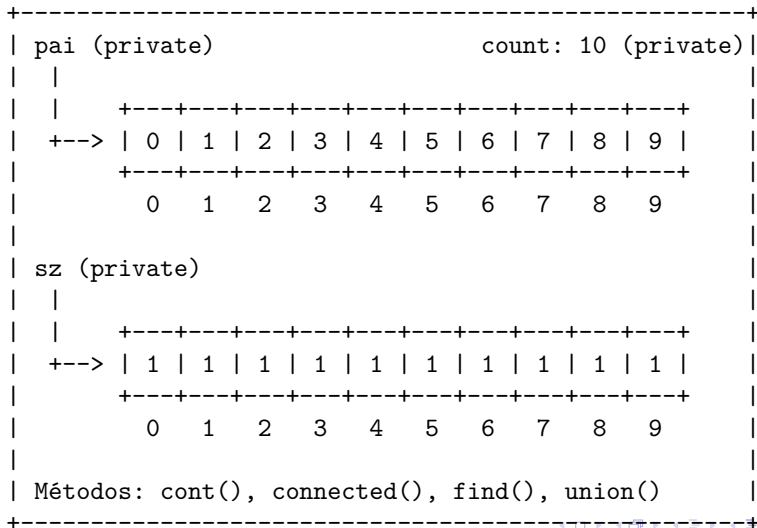
```
+-----+
| pai (private)                count: 0 (private) |
| |                             |                 | | | | | | | | |
| | +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|          0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
|
| sz (private)
| |                             |                 | | | | | | | | |
| | +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|          0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
|
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()
+-----+
```

WeightedQuickUnionUF

uf.find(3) retorna 3

uf.find(0) retorna 0

uf



WeightedQuickUnionUF

```
uf.union(4, 3);
```

```
uf
```

```
+-----+
| pai (private)                count:  9 (private)|
| |
| |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+
| +--> | 0 | 1 | 2 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
|
| sz (private)
| |
| |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+
| +--> | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
|
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()
+-----+
```

WeightedQuickUnionUF

```
uf.union(3, 8);
```

```
uf
```

```
+-----+
| pai (private)                count:  8 (private)|
| |
| |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
| +--> | 0 | 1 | 2 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 4 | 9 |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
|
| sz (private)
| |
| |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
| +--> | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
|
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()
+-----+
```

WeightedQuickUnionUF

```
uf.union(6, 5);
```

```
uf
```

```
+-----+
| pai (private)                count: 7 (private) |
| |
| | +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
| +--> | 0 | 1 | 2 | 4 | 4 | 6 | 6 | 7 | 4 | 9 |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
|
| sz (private)
| |
| | +---+---+---+---+---+---+---+---+---+
| +--> | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
|
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()
+-----+
```

WeightedQuickUnionUF

```
uf.union(9, 4);
```

```
uf
```

```
+-----+
| pai (private)                count: 6 (private) |
| |                             |                 | | | | | | | | | |
| | +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 0 | 1 | 2 | 4 | 4 | 6 | 6 | 7 | 4 | 4 | |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9          |
| |                             |                 | | | | | | | | | |
| sz (private)                  |                 |
| | +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9          |
| |                             |                 |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union() |
+-----+
```

WeightedQuickUnionUF

```
uf.union(2, 1);
```

```
uf
```

```
+-----+
| pai (private)                count: 5 (private) |
| |                             |                 | | | | | | | | | |
| | +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 0 | 1 | 1 | 4 | 4 | 6 | 6 | 7 | 4 | 4 | |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|          0  1  2  3  4  5  6  7  8  9         |
|                                             |
| sz (private)                  |                 | | | | | | | | | | |
| |                             |                 |
| | +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|          0  1  2  3  4  5  6  7  8  9         |
|                                             |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union() |
+-----+
```


WeightedQuickUnionUF

```
uf.union(8, 9);
```

```
uf
```

```
+-----+
| pai (private)                count: 4 (private) |
| |                             |                 | | | | | | | | | |
| | +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 0 | 1 | 1 | 4 | 4 | 6 | 6 | 7 | 4 | 4 | |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9          |
| |                             |                 | | | | | | | | | |
| sz (private)                  |                 |
| |                             |                 |
| | +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 1 | 2 | 1 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9          |
| |                             |                 |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union() |
+-----+
```

WeightedQuickUnionUF

```
uf.union(5, 0);
```

```
uf
```

```
+-----+
| pai (private)                count:  3 (private)|
| |
| |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
| +--> | 6 | 1 | 1 | 4 | 4 | 6 | 6 | 7 | 4 | 4 |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
|
| sz (private)
| |
| |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
| +--> | 1 | 2 | 1 | 1 | 4 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
|
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()
+-----+
```

WeightedQuickUnionUF

```
uf.union(7, 2);
```

```
uf
```

```
+-----+
| pai (private)                count:  2 (private)|
| |
| |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
| +--> | 6 | 1 | 1 | 4 | 4 | 6 | 6 | 1 | 4 | 4 |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
|
| sz (private)
| |
| |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
| +--> | 1 | 3 | 1 | 1 | 4 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
|
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()
+-----+
```

WeightedQuickUnionUF

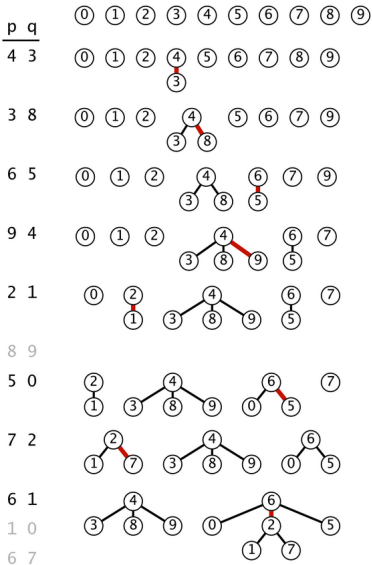
```
uf.union(6, 1);
```

```
uf
```

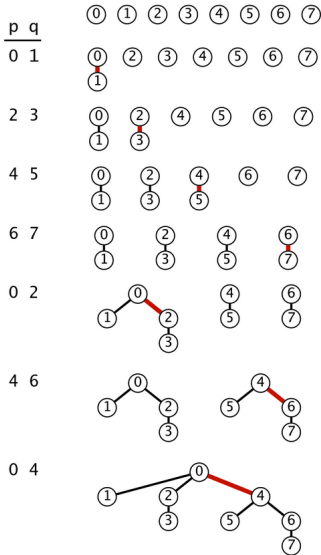
```
+-----+
| pai (private)                count:  2 (private) |
| |                             |                   | | | | | | | | | |
| |      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 6 | 6 | 1 | 4 | 4 | 6 | 6 | 1 | 4 | 4 | |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|          0  1  2  3  4  5  6  7  8  9          |
| |                             |                   | | | | | | | | | |
| sz (private)                  |                   |
| |                             |                   |
| |      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 1 | 3 | 1 | 1 | 5 | 1 | 6 | 1 | 1 | 1 | |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|          0  1  2  3  4  5  6  7  8  9          |
| |                             |                   |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union() |
+-----+
```

Simulação

reference input



worst-case input



Estrutura *disjoint-set forest*

Para verificar que o consumo de tempo de `union()` e `find()` é não superior a $\lg n$, basta demonstrar que

Na floresta de árvores disjuntas produzida durante uma sequência de operações `union()`, toda árvore com altura h tem pelo menos 2^h nós.

A demonstração é por indução no número de operações `union()` realizadas.

Estrutura *disjoint-set forest*

Inicialmente nenhuma operação `union()` foi realizada e toda árvore tem altura zero e possui um nó. Logo vale a afirmação.

Sejam `p` e `q` sítios e considere a operação `union(p, q)`.

Se `p` e `q` estão em uma mesma árvore não há o que demonstrar. Portanto, podemos supor que a árvore T_p que contém `p` e árvore T_q que contém `q` são distintas.

Estrutura *disjoint-set forest*

Sejam

- ▶ h_p e n_p a altura e número de nós de T_p e
- ▶ h_q e n_q a altura e número de nós de T_q .

Pela hipótese de indução $n_p \geq 2^{h_p}$ e $n_q \geq 2^{h_q}$.

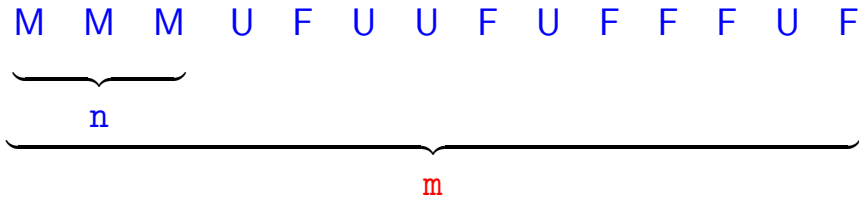
Seja T a árvore de altura h resultante da operação $\text{union}(p, q)$. Se $h \leq \max\{h_p, h_q\}$, não há o que demonstrar. Assim, podemos supor que, digamos, $n_p \geq n_q$ e $h = h_q + 1$. Logo,

$$n = n_p + n_q \geq n_q + n_q \geq 2^{h_q} + 2^{h_q} = 2^{h_q+1} = 2^h.$$

O que encerra este rascunho de demonstração.

Consumo de tempo

$UF(n)$	$\Theta(n)$
$find(p)$	$O(\lg n)$
$union(p, q)$	$O(\lg n)$

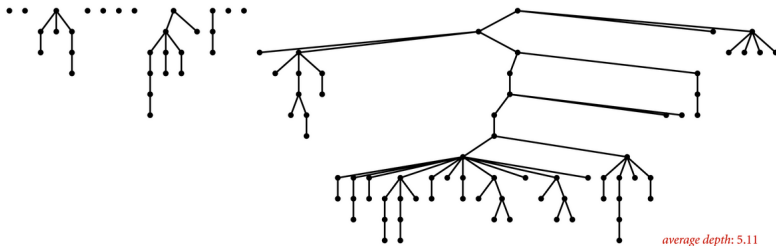


Custo total da sequência:

$$\Theta(n) + m O(\lg n) + n O(\lg n) = O(m \lg n)$$

Ilustração

quick-union



average depth: 5.11

weighted



average depth: 1.52

Quick-union and weighted quick-union (100 sites, 88 union() operations)

Experimentos

```
% java Driver < tinyUF.txt
```

2 components

0.0003seg

```
% java Driver < mediumUF.txt
```

3 components

0.027seg

```
% java Driver < largeUF.txt
```

6 components

4.079seg

Encurtamento de caminhos

Acrescentando uma linha a `find()` encurtamos o comprimento do caminho à metade.

```
public int find(int p) {  
    while (p != pai[p]) {  
        // encurta caminho à metade  
        pai[p] = pai[pai[p]];  
        p = pai[p];  
    }  
    return p;  
}
```

Mais experimentos

```
% java Driver < tinyUF.txt
```

```
2 components
```

```
0.0003seg
```

```
% java Driver < mediumUF.txt
```

```
3 components
```

```
0.025seg
```

```
% java Driver < largeUF.txt
```

```
6 components
```

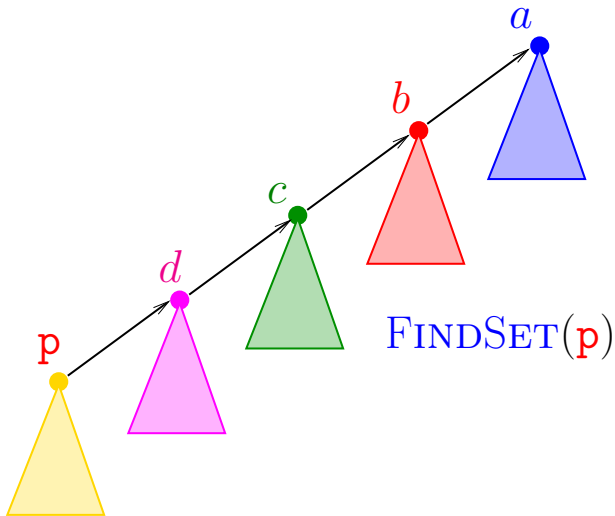
```
3.923seg
```

Weight-Quick-union with path compression

1.5 Case Study: Union-Find

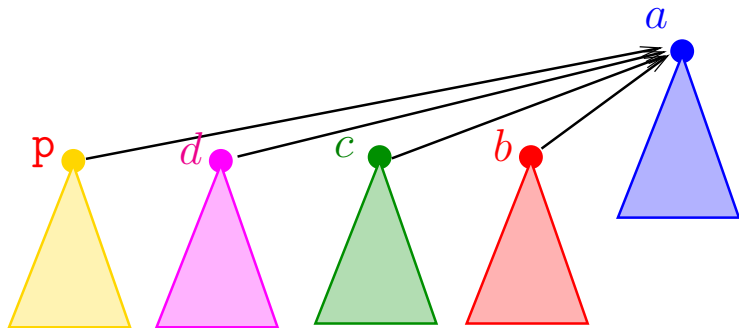
path compression

Ideia: encurtar os caminhos durante cada `find()`.



path compression

Ideia: encurtar os caminhos durante cada `find()`.



`FINDSET(p)`

path compression

FINDSET (**p**) ▷ com “path compression”

- 1 **se** **p** \neq pai[**p**]
- 2 **então** pai[**p**] \leftarrow **FINDSET** (pai[**p**])
- 3 **devolva** pai[**p**]

path compression

```
public int find(int p) {  
    if (p != pai[p])  
        pai[p] = find[pai[p]];  
    return pai[p];  
}
```

PathCompressionUF

```
PathCompressionUF uf = new PathCompressionUF(10);
```

```
uf
```

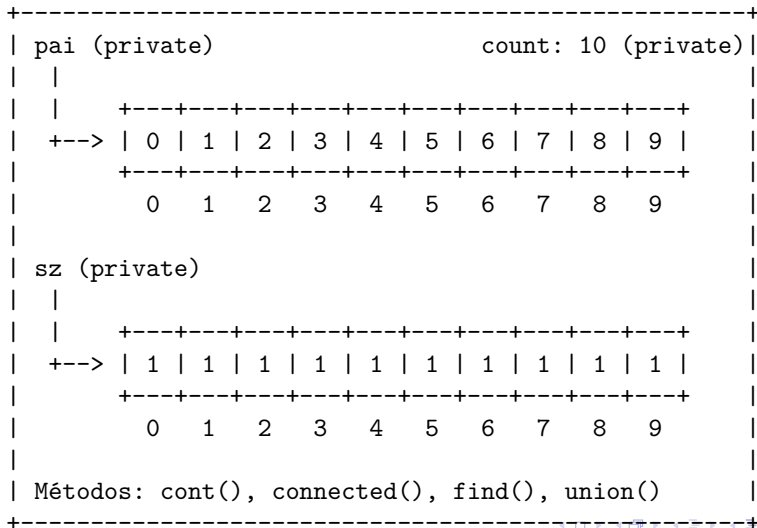
```
+-----+
| pai (private)                count: 0 (private) |
| |                             | | | | | | | | | |
| | +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
|
| sz (private)
| |                             | | | | | | | | | |
| | +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
|
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()
+-----+
```

PathCompressionUF

uf.find(3) retorna 3

uf.find(0) retorna 0

uf



PathCompressionUF

```
uf.union(4, 3);
```

```
uf
```

```
+-----+
| pai (private)                count:  9 (private)|
| |                             | | | | | | | | | |
| |      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 0 | 1 | 2 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|          0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
|
| sz (private)
| |                             | | | | | | | | | |
| |      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|          0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
|
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()
+-----+
```

PathCompressionUF

```
uf.union(3, 8);
```

```
uf
```

```
+-----+
| pai (private)                count:  8 (private)|
| |
| |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
| +--> | 0 | 1 | 2 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 4 | 9 |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
|
| sz (private)
| |
| |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
| +--> | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
|
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()
+-----+
```

PathCompressionUF

```
uf.union(6, 5);
```

```
uf
```

```
+-----+
| pai (private)                count: 7 (private) |
| |
| | +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
| +--> | 0 | 1 | 2 | 4 | 4 | 6 | 6 | 7 | 4 | 9 |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
|
| sz (private)
| |
| | +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
| +--> | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
|
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()
+-----+
```

PathCompressionUF

```
uf.union(9, 4);
```

```
uf
```

```
+-----+
| pai (private)                count: 6 (private) |
| |                             |                 | | | | | | | | | |
| |      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 0 | 1 | 2 | 4 | 4 | 6 | 6 | 7 | 4 | 4 | |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|          0  1  2  3  4  5  6  7  8  9          |
| |                             |                 | | | | | | | | | |
| sz (private)                  |                 |
| |                             |                 |
| |      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|          0  1  2  3  4  5  6  7  8  9          |
| |                             |                 |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union() |
+-----+
```


PathCompressionUF

```
uf.union(2, 1);
```

```
uf
```

```
+-----+
| pai (private)                count: 5 (private) |
| |                             |                 | | | | | | | | | |
| | +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 0 | 1 | 1 | 4 | 4 | 6 | 6 | 7 | 4 | 4 | |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|          0  1  2  3  4  5  6  7  8  9         |
|                                             |
| sz (private)                  |                 | | | | | | | | | | |
| |                             |                 |
| | +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|          0  1  2  3  4  5  6  7  8  9         |
|                                             |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union() |
+-----+
```

PathCompressionUF

```
uf.union(8, 9);
```

```
uf
```

```
+-----+
| pai (private)                count: 4 (private) |
| |                             |                 | | | | | | | | | |
| | +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 0 | 1 | 1 | 4 | 4 | 6 | 6 | 7 | 4 | 4 | |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9          |
| |                             |                 | | | | | | | | | |
| sz (private)                  |                 |
| |                             |                 |
| | +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 1 | 2 | 1 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9          |
| |                             |                 |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union() |
+-----+
```

PathCompressionUF

```
uf.union(5, 0);
```

```
uf
```

```
+-----+
| pai (private)                count:  3 (private)|
| |
| |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+
| +--> | 6 | 1 | 1 | 4 | 4 | 6 | 6 | 7 | 4 | 4 |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
|
| sz (private)
| |
| |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+
| +--> | 1 | 2 | 1 | 1 | 4 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+
|         0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
|
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()
+-----+
```

PathCompressionUF

```
uf.union(7, 2);
```

```
uf
```

```
+-----+
| pai (private)                count:  2 (private) |
| |                             |                 | | | | | | | | | |
| | +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 6 | 1 | 1 | 4 | 4 | 6 | 6 | 1 | 4 | 4 | |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|      0  1  2  3  4  5  6  7  8  9             |
|                                             |
| sz (private)                  |                 | | | | | | | | | | |
| |                             |                 |
| | +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 1 | 3 | 1 | 1 | 4 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|      0  1  2  3  4  5  6  7  8  9             |
|                                             |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union() |
+-----+
```

PathCompressionUF

```
uf.union(6, 1);
```

```
uf
```

```
+-----+
| pai (private)                count:  2 (private) |
| |                             |                 | | | | | | | | | |
| |      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 6 | 6 | 1 | 4 | 4 | 6 | 6 | 1 | 4 | 4 | |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|          0  1  2  3  4  5  6  7  8  9         |
|                                             |
| sz (private)                  |                 | | | | | | | | | | |
| |                             |                 |
| |      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
| +--> | 1 | 3 | 1 | 1 | 5 | 1 | 6 | 1 | 1 | 1 | |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+ |
|          0  1  2  3  4  5  6  7  8  9         |
|                                             |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union() |
+-----+
```

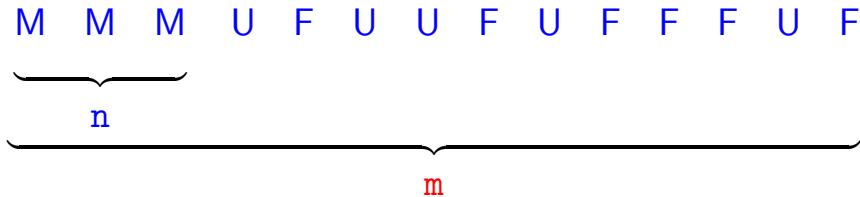

Função 'torre'

$$t(i) := \begin{cases} 1 & \text{se } i = 0 \\ 2^{t(i-1)} & \text{se } i = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

i	$t(i)$
0	1
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^{2^2} = 16$
4	$2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65536$
5	$2^{2^{2^{2^2}}} > \underbrace{10000000000000000000 \dots 0000000000000000}_{80}$
⋮	⋮

Consumo de tempo

$UF(n)$	$\Theta(n)$	
$\text{find}(p)$	$O(\lg^* n)$	amortizado!
$\text{union}(p, q)$	$O(\lg^* n)$	amortizado!



Custo total da sequência:

$$\Theta(n) + m O(\lg^* n) + n O(\lg^* n) = O(m \lg^* n)$$

Conclusões

Se conjuntos disjuntos são representados através de *disjoint-set forest* com *union by rank* e *path compression*, então uma sequência de $UF(n)$ e m operações `union()` e `find()`, sendo que n , consome tempo $O(m \lg^* n)$.

Experimentos

Acrescentando a linha

```
// diminui a altura pela metade  
pai[p] = pai[pai[p]]
```

Experimentos

```
% java Driver < tinyUF.txt
```

2 components

0.0003seg

```
% java Driver < mediumUF.txt
```

3 components

0.025seg

```
% java Driver < largeUF.txt
```

6 components

3.923seg

Parece que **na prática** weighted quick-union e weighted quick-union com path-compression **não são muito diferentes.**