AULA 8

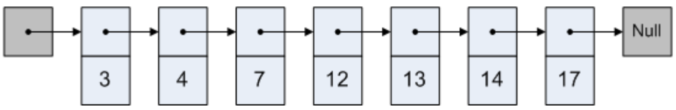
Skip lists

A Probabilistic Alternative to Balanced Trees
William Pugh

Skip lists é uma estrutura de dados probabilística baseada em uma generalização de listas ligadas: utilizam balanceamento probabilístico em vez de forçar balanceamento.

Referências: CMSC 420; Skip Lists: Done Right; Open Data Structures; ConcurrentSkipListMap (Java Platform SE 8); Randomization: Skip Lists (YouTube)

Lista (simplemente) ligada

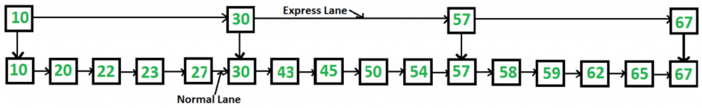


Fonte: Skip lists are fascinating!

Cada nó `x` tem três campos:

1. `key`: chave do item;
2. `val`: valor associado a chave;
3. `next`: próximo nó na lista

2 níveis de listas ligadas



Fonte: GeeksforGeeks

Cada nó `x` tem quatro campos:

1. `key`: chave do item;
2. `val`: valor associado a chave;
3. `next`[0]: próximo nó na lista no níveis 0
4. `next`[1]: próximo nó na lista no níveis 1

Consumo de tempo de `get()`

L_0 = lista ligada do nível 0 (=térreo)

L_1 = lista ligada do nível 1 (= 1o. andar)

n = número de itens na ST = número de nós em L_0

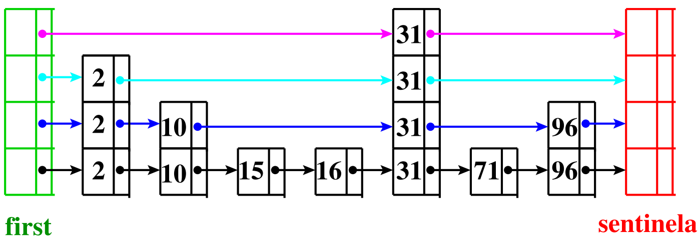
Consumo de tempo de `get()` é pelo menos

$$|L_1| + n/|L_1|$$

Valor minimizado quando $|L_1| = \sqrt{n}$.

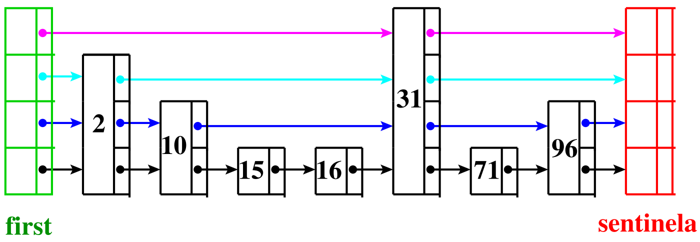
De fato, $\sqrt{n}$ é ponto de mínimo de $x + n/x$

Multiplas listas



- `key`s ordenadas
- `first` e `setinela` em lista

Skip list

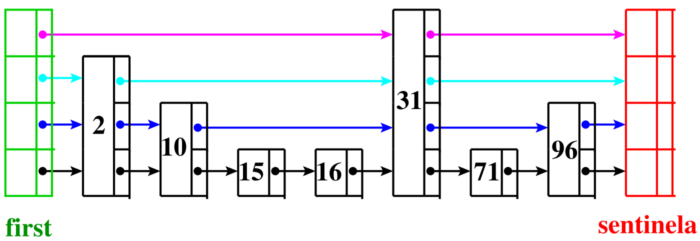


- `key`s ordenadas
- `first` e `setinela` em cada nível
- `next[]` de tamanho variado

subclasse Node

```
private class Node {
  private String key;
  private Integer val;
  private Node[] next;
  public Node(String key, Integer val,
                    int levels) {
     this.key = key;
     this.val = val;
     this.next = new Node[levels];
  }
}
```

Skip list

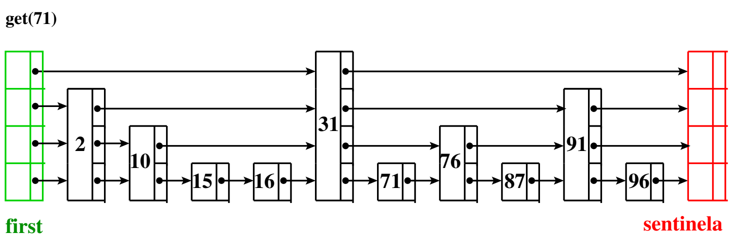


Chamada **skip list** pois listas de mais alto níveis permite *skip* vários itens.

SkipListST

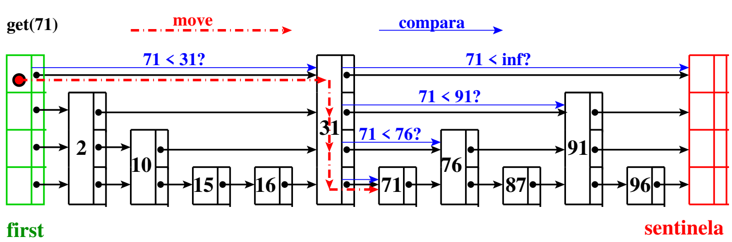
```
public class SkipListST{
  // temos no máximo 31 listas
  private int MAXLEVELS = 31;
  // número de níveis 0,1,...,lgN-1
  private int lgN;
  private Node first; nó cabeça
  // número de itens na ST
  private int n = 0;

  public SkipListST() {
     first = newNode(MAXLEVELS);
  }
```

get(k)



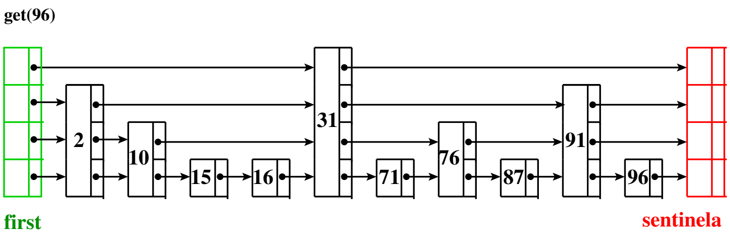

```
if k == key, achou
if k < next.key, vá para nível inferior
if k >= next.key, vá para direita
```

get(k)



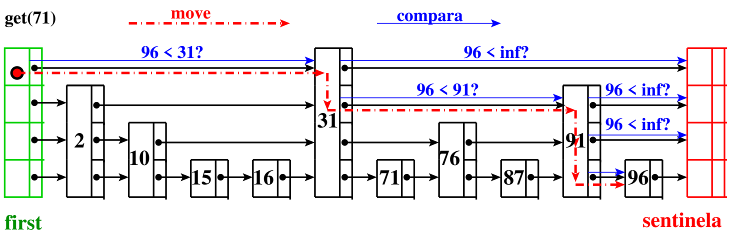

```
if k == key, achou
if k < next.key, vá para nível inferior
if k >= next.key, vá para direita
```

get(k)




```
if k == key, achou
if k < next.key, vá para nível inferior
if k >= next.key, vá para direita
```

get(k)




```
if k == key, achou
if k < next.key, vá para nível inferior
if k >= next.key, vá para direita
```

get() para lista ligada

```
public Value get(Key key) {
   Node p = prev(key);
   // key está na ST?
   Node q = p.next;
   if (q != null && q.key.equals(key))
      return q.val;
   return null;
}
```

get() para skip list

```
public Value get(Key key) {
   Node p = first;
   for (int k = lgN-1; k >= 0; k--) {
      Node p = prev(key, p, k);
      // key está na ST?
      Node q = p.next[k];
      if (q != null && q.key.equals(key))
         return q.val;
   }
   return null;
}
```

Operação básica para lista ligada

Aqui usamos a ordenação (compareTo())

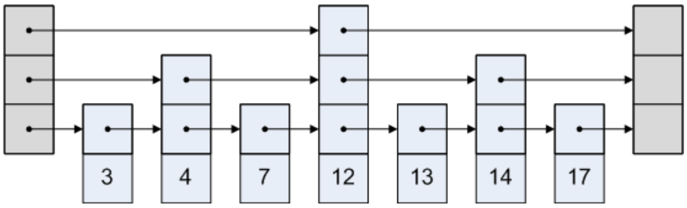
```
private Node prev(Key key) {
   Node p = first;
   Node q = first.next;
   while (q != null
          && q.key.compareTo(key) < 0) {
      p = q;
      q = q.next;
   }
   return p;
}
```

Operação básica para skip list

Aqui usamos a ordenação (compareTo())

```
private Node prev(Key key, Node start,
                             int k) {
   Node p = start;
   Node q = start.next[k];
   while (q != null
          && q.key.compareTo(key) < 0) {
      p = q;
      q = q.next[k];
   }
   return p;
}
```

Skip list “perfeita”

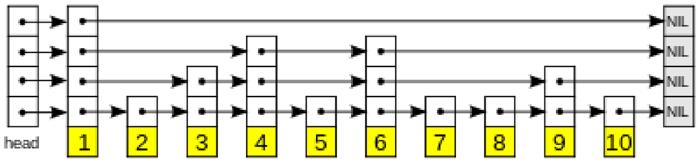


Fonte: Skip lists are fascinating!

Exemplo: **perfeita**

Cada link em um nível “pula” dois links do nível inferior.

Skip list “perfeita”



Fonte: https://www.geeksforgeeks.org/skip-list/

Exemplo: **não-perfeita**

Cada link em um nível “pula” dois links do nível inferior.

Consumo de tempo de `get()`

Supondo a skip list “perfeita”: usando links de um nível superior pulamos um nó do seu nível inferior.

Fato. O número de níveis é proporcional $\leq \lg \mathtt{n}$.

Fato. Em uma busca visitamos no máximo 2 nós por nível, caso contrário usaríamos o nível superior.

Conclusão. Número de comparações é $\leq 2 \lg \mathtt{n}$.

Inserções e remoções

Inserções e remoções podem destruir *perfeição*

Exigência de perfeição pode custar **muito caro**.

Ideia.

- relaxar a exigência de que cada nível tenha metade dos links do anteriors
- estrutura que **esperamos** que cada nível tenha metade dos links do nível anterior bem distribuídos

Skip list é uma estrutura de dados **aleatorizada** (*randomized*): a mesma sequência de inserções e remoções podem produzir estruturas diferentes dependendo de um gerador de números aleatórios.

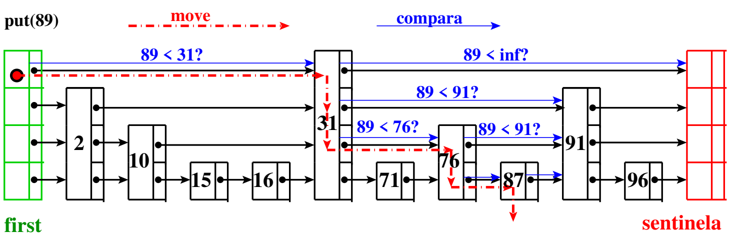
Aleatorização

- permite imperfeição
- comportamento **esperado** é o mesmo que de skip lists perfeitas
- Ideia: cada nó é promovido para o nível superio com probabilidade $1/2$
  - número de nós esperados no nível 1 é $\mathtt{n}/2$ dos nós
  - número de nós esperados no nível 1 é $\mathtt{n}/2^2$ dos nós
  - ...

Número de nós esperados em cada nível é o mesmo de uma skip list perfeita

É esperado que os nós promovidos sejam bem distribuídos.

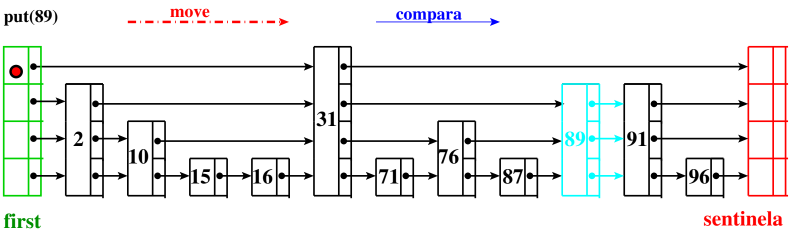
`put(key,val)`




```
procure key
insira item key,val no nível 0
i ← 1
enquanto FLIP() = 
```

```
 faça
   insira item key,val no nível i
   i ← i + 1
```

put(key,val)




```
procure key
insira item key,val no nível 0
i ← 1
enquanto FLIP() = 
```

```
 faça
   insira item key,val no nível i
   i ← i + 1
```

put() para lista ligada

```
public void put(Key key, Value val) {
   if (val == null) {
      delete(key); return;
   }
   Node p = prev(key);
   Node q = p.next;
   // key está na ST?
   if (q != null || q.key.equals(key)) {
      q.val = val; return;
   }
   // key não está na ST
   p.next = new Node(key, val, q);
   n++;
}
```

put() para skip list

```
public void put(Key key, Value val) {
   if (val == null) {
      delete(key); return;
   }
   Node[] s = new Node[MAXLEVELS];
   Node p = first;
   for (int k = lgN-1; k >= 0; k--) {
      Node p = prev(key, p, k);
      Node q = p.next[k];
      if (q != null || q.key.equals(key)){
         q.val = val; return;
      }
      s[k] = p;
   }
```

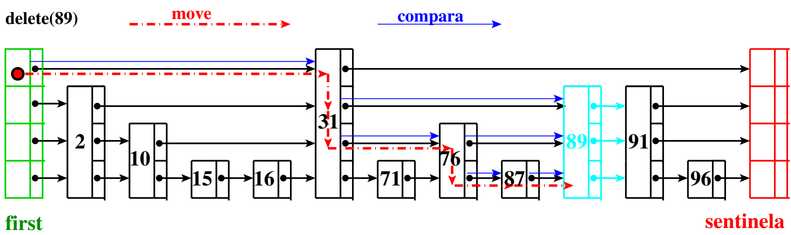
put() para skip list

```
   // key não está na ST
   int levels = randLevel();
   Node novo = new Node(key,val,levels);
   if (levels == lgN+1) {
      s[lgN] = first;
      lgN++; // atualiza o no.  níveis
   }
   for (int k = levels-1; k >= 0; k--) {
      Node t = s[k].next[k];
      s[k].next[k] = novo;
      novo.next[k] = t;
   }
   n++;
}
```

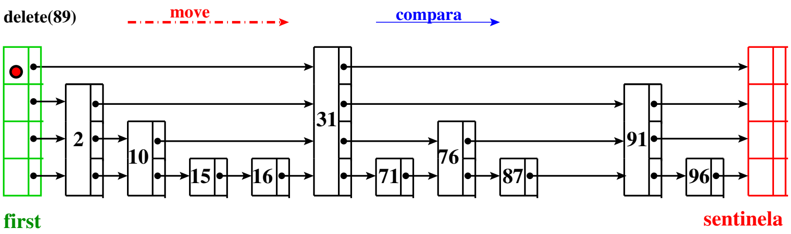
randLevel()

```
private int randLevel() {
   int level= 0;
   int r=StdRandom.uniform((1<<(MAXL-1)));
   while ((r & 1) == 1) {
      if (level== lgN) {
         if(lgN == MAXL) return MAXL;
         else return lgN + 1;
      }
      level++;
      r >>= 1;
   }
   return level+1;
}
```

delete(k)

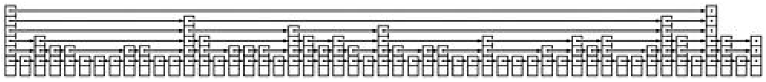


`delete(k)`



Skip list

Estrutura aleatorizada (*randomized*)



Fonte: 13.5 Skip Lists

Fato. O número esperado de níveis é $O(\lg n)$.

Fato. Em uma busca o número esperado de nós visitados por nível é 2.

Conclusão. O consumo de tempo esperado de `get()`, `put()`, `delete()` é $O(\lg n)$.

Rascunho de uma prova ...

Probabilidade de um item ser "promovido" até o nível i é a probabilidade de obtermos $i - 1$  nas primeiras jogadas da moeda ... é $1/2^{i-1}$.

Seja H o número máximo de níveis de um skip list com n itens.

Temos que $\Pr[H \geq i] \leq n/2^{i-1}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\Pr[H \geq i] &= \Pr[\text{nível } i \text{ conter algum item}] \\
&\leq \sum_x \Pr[\text{item } x \text{ está no nível } i] \\
&= n/2^{i-1}
\end{aligned}$$

Conclusão

$$\Pr[H \geq c \lg n] \leq n/2^{c \lg n - 1} < \frac{n}{2^{c \lg n}} = \frac{n}{n^c} = \frac{1}{n^{c-1}}$$

Em palavras, H é $O(\lg n)$ com alta probabilidade.

Se $n = 1000$ e $c = 3$ então a probabilidade de H ser maior que $3 \lg 1000 < 30$ é menor que 1 em um milhão.