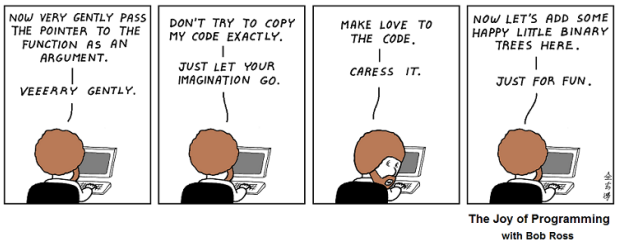
AULA 11

Árvores 2-3



Fonte: https://br.pinterest.com/

Referências: Árvores 2-3 (PF); Balanced Search Trees (S&W); slides (S&W)

Árvores 2-3

Como implementar uma tabela de símbolos em uma BST de modo que a árvore permaneça aproximadamente balanceada?

Desejamos que a BST tenha altura próxima de $\lg n$, sendo n o número de nós, qualquer que seja a sequência de buscas e inserções aplicada à árvore.

Veremos árvores 2-3 que resolvem o problema em princípio.

A implementação da ideia, usando **árvores rubro-negras**, ainda será discutida.

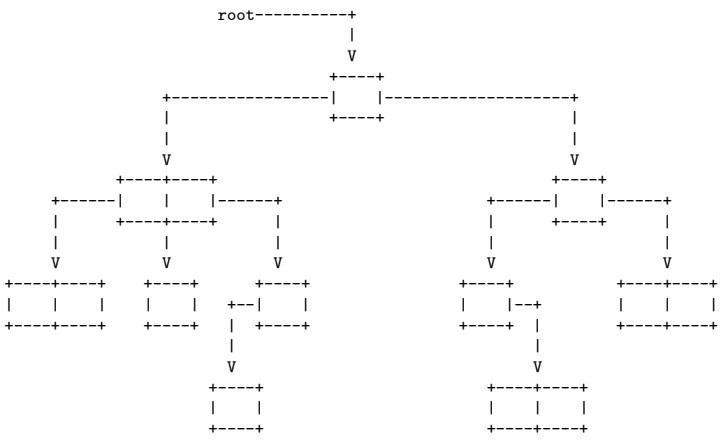
Árvore 2-3

Uma **árvore 2-3** é:

- uma árvore vazia;
- ou um nó simples com **2 links**:
  - um link `left` para uma árvore 2-3;
  - um link `right` para uma árvore 2-3;
- ou um nó duplo com **3 links**:
  - um link `left` para uma árvore 2-3;
  - um link `mid` para uma árvore 2-3; e
  - um link `right` para uma árvore 2-3.

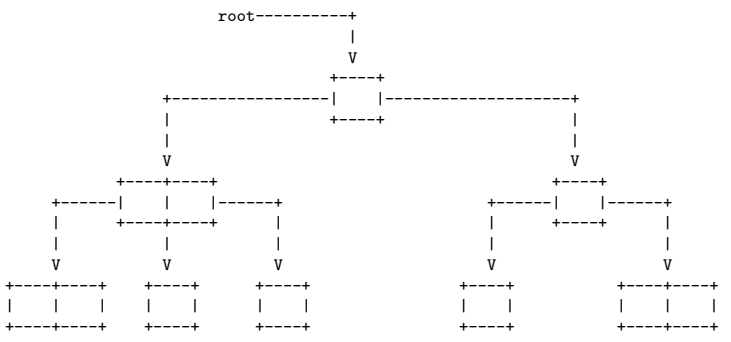
Árvores 2-3 têm esse nome porque cada nó tem **2 ou 3 links**.

Ilustração de árvore 2-3



Árvore 2-3 perfeitamente balanceadas

Nossas árvores 2-3 são **perfeitamente balanceada**: todos links `null` estão no mesmo nível.



Estrutura

Importante. Para nós árvore 2-3 é sinônimo de árvore 2-3 **perfeitamente balanceada**.

Fato. Toda árvore 2-3 de altura `h` tem no mínimo $2^{h+1}-1$ nós e no máximo $3^{h+1}-1$ nós.

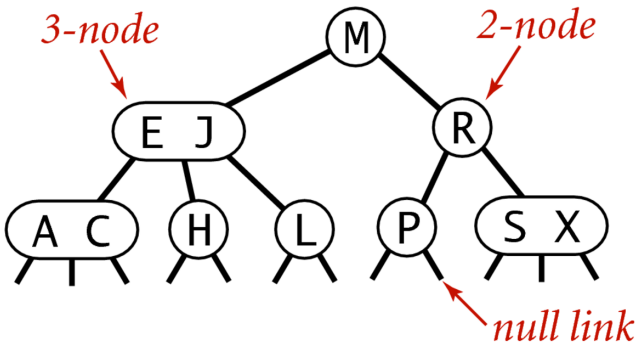
Consequência. Toda árvore 2-3 com `n` nós tem altura não superior a $\lg(n+1)-1$ e não inferior a $\log_3(n+1)-1$.

Árvore 2-3 de busca

Uma árvore 2-3 de **busca** (*2-3 search tree*) é:

- uma árvore vazia;
- ou um nó simples com uma chave e **2 links**:
  - um link `left` para uma árvore 2-3 que tem chaves menores que a chave do nó e
  - um link `right` para uma árvore 2-3 que tem chaves maiores;
- ou um nó duplo com duas chave e **3 links**:
  - um link `left` para uma árvore 2-3 que tem chaves menores;
  - um link `mid` para uma árvore 2-3 que tem chaves entre as duas chaves do nó; e
  - um link `right` para uma árvore 2-3 que tem chaves maiores.

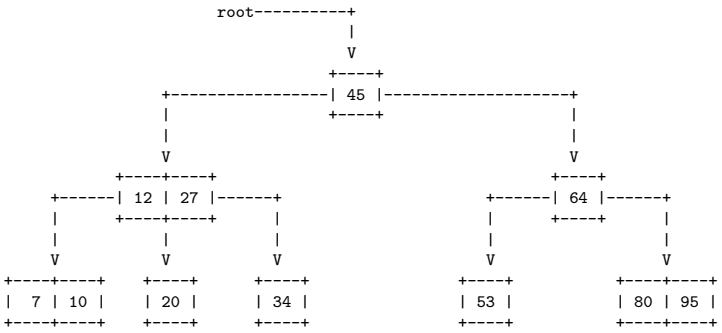
Anatomia de uma árvore 2-3 de busca



Anatomy of a 2-3 search tree

Fonte: `algs4`

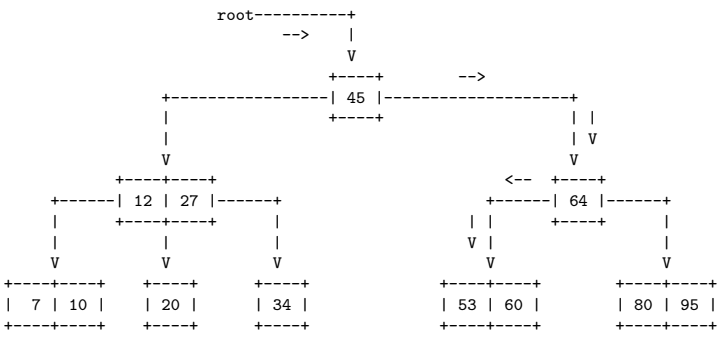
Exemplo de árvore 2-3 de busca



Missão

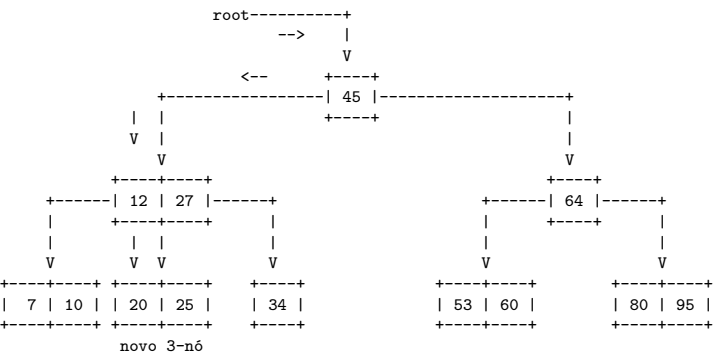
Missão. Manter uma árvore 2-3 de busca sujeita a operações de atualização como `put`(), `deleteMin`(), `delete`(), ...

put(60)



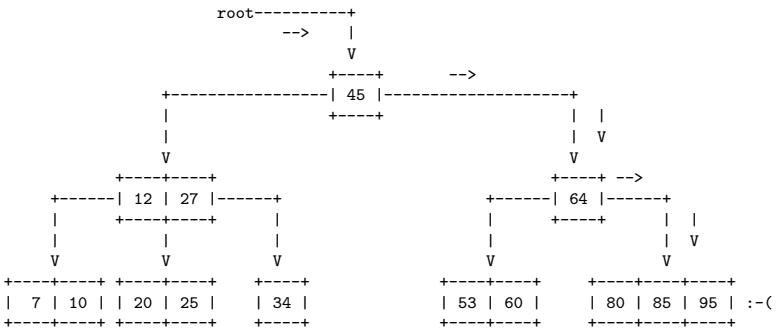
Inserção em um nó simples (**não** estraga estrutura): Procura 60 e transforma um 2-nó em 3-nó.

put(25)



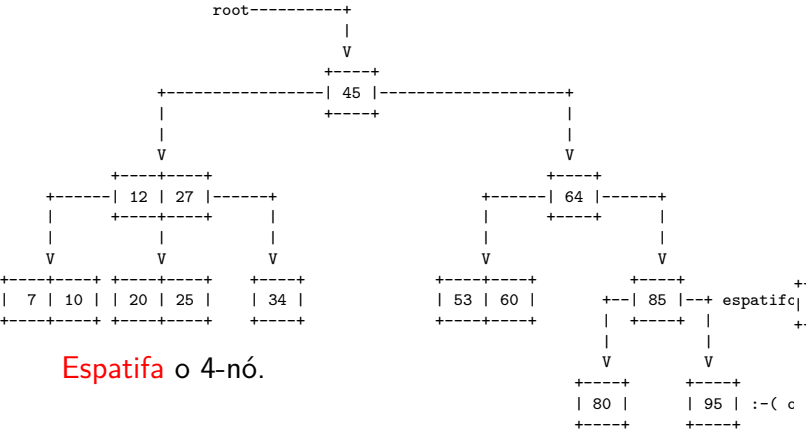
Procura 25 e transforma um 2-nó em 3-nó.

put(85)



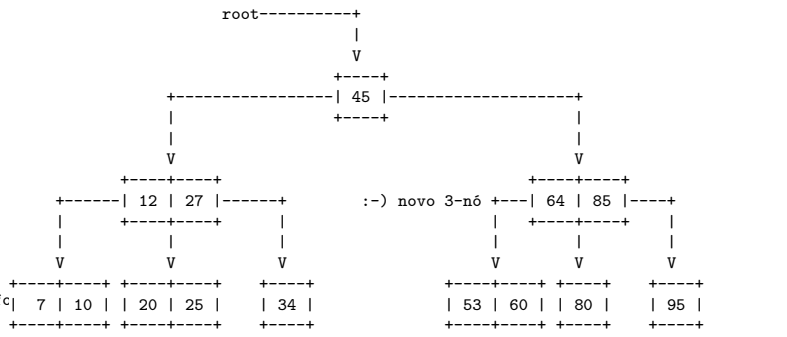
Inserção em um nó duplo (**estraga** estrutura):
procura 85 e transforma um 3-nó em 4-nó.

put(85)



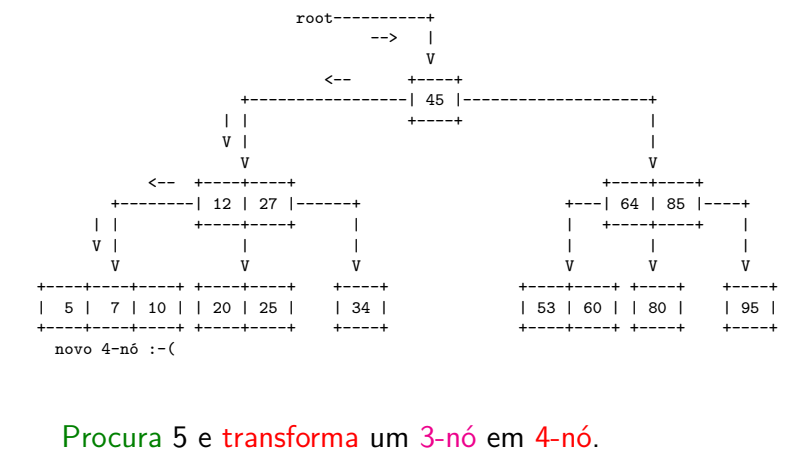
Espatifa o 4-nó.

put(85)



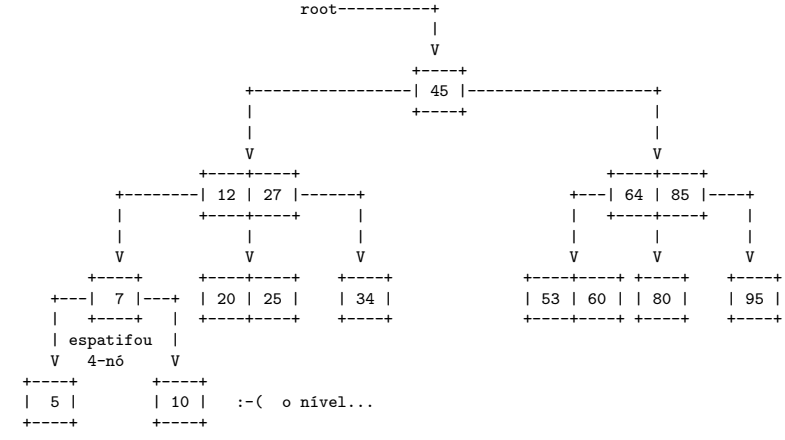
Transforma o 2-nó pai em 3-nó.

put(5)



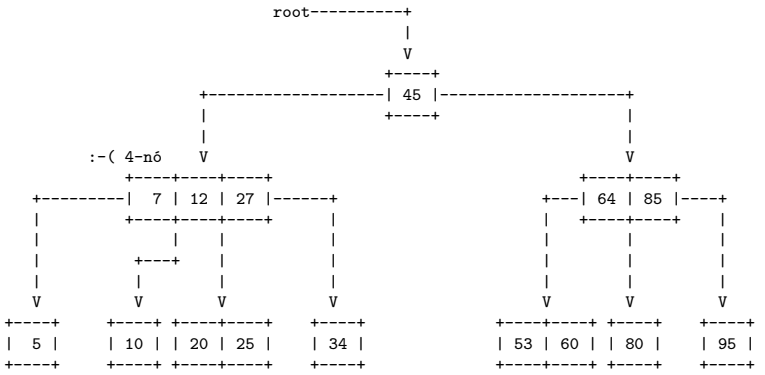
Procura 5 e transforma um 3-nó em 4-nó.

put(5)



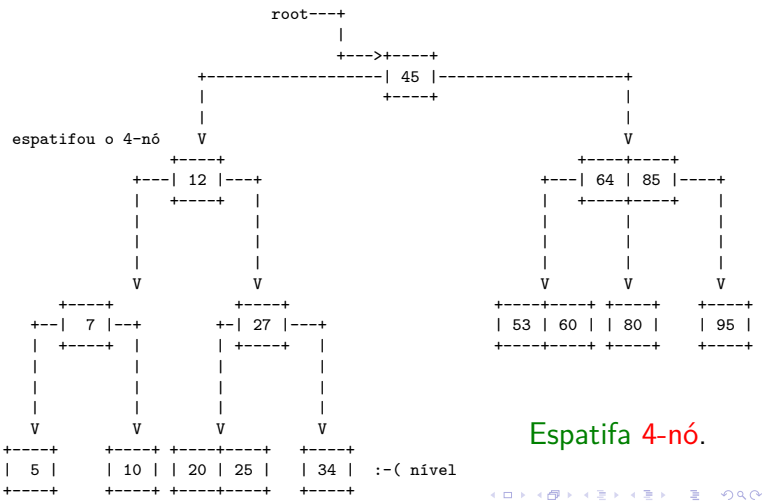
Espatifa o 4-nó.

put(5)



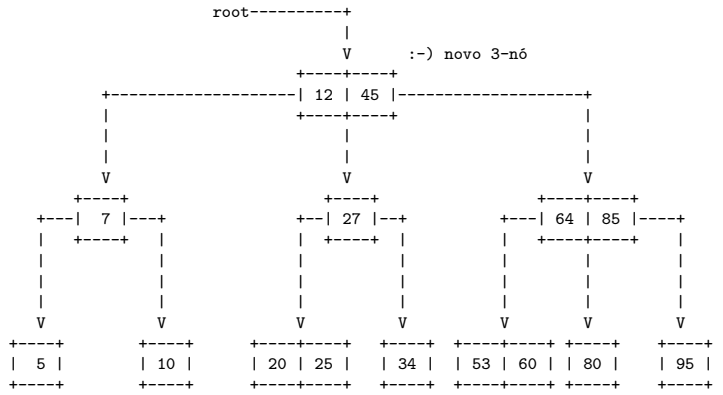
Transforma o 3-nó pai em 4-nó.

put(5)



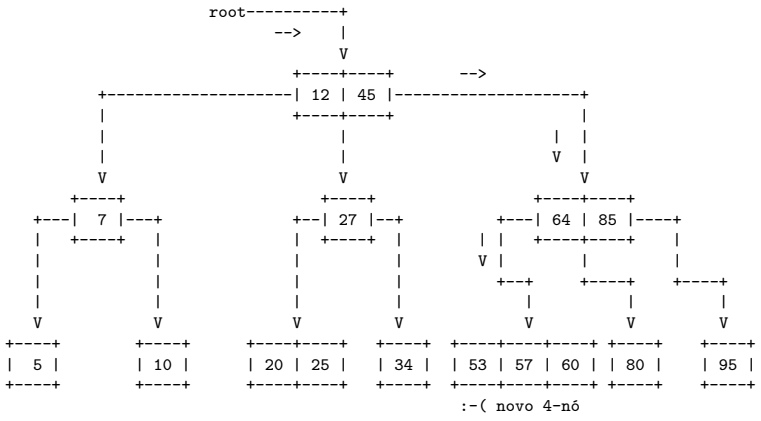
Espatifa 4-nó.

put(5)



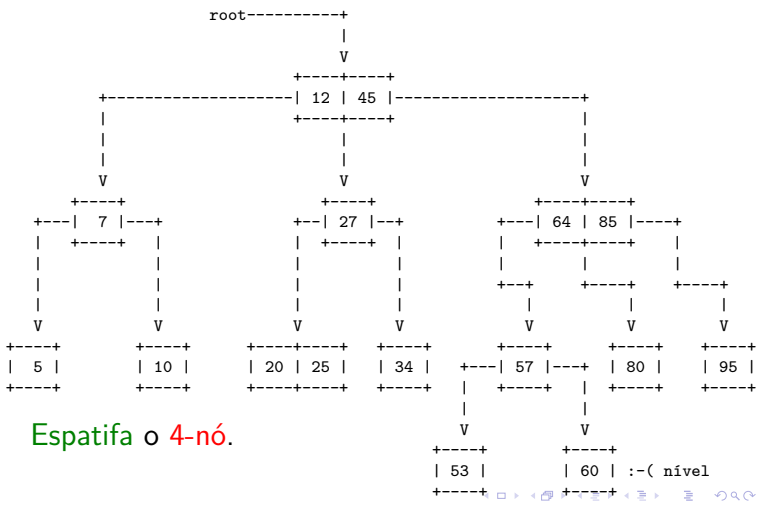
Transforma o 2-nó pai em 3-nó.

put(57)



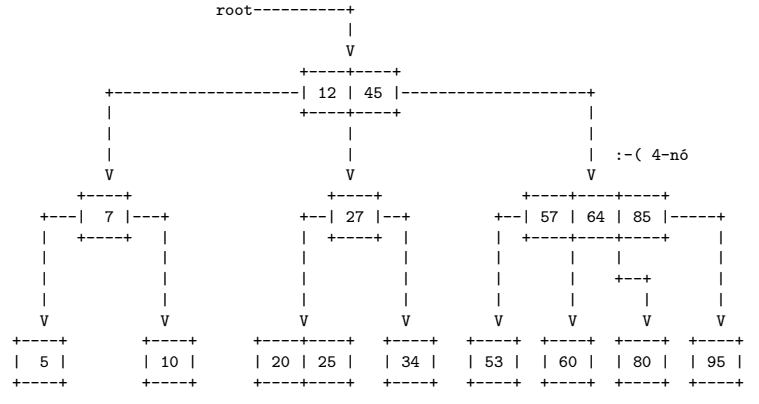
Procura 57 e transforma o 3-nó em 4-nó.

put(57)



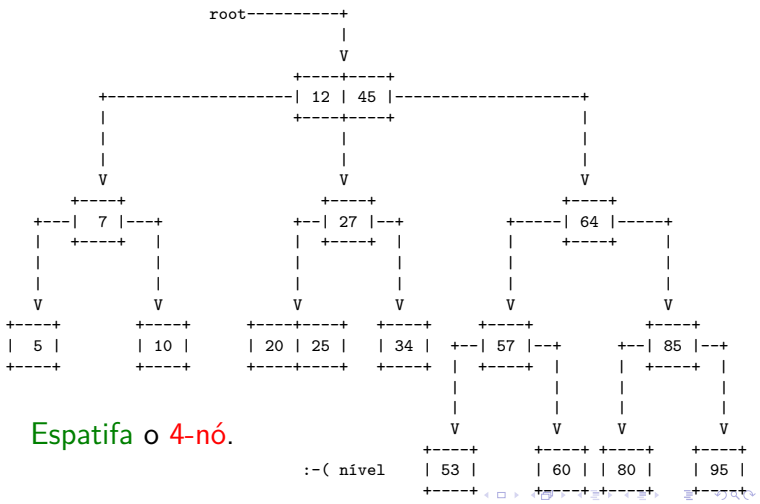
Espatifa o 4-nó.

put(57)



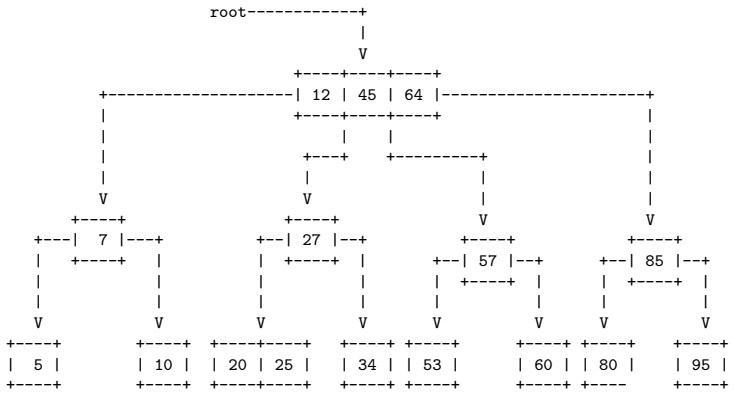
Transforma o 3-nó pai em 4-nó.

put(57)



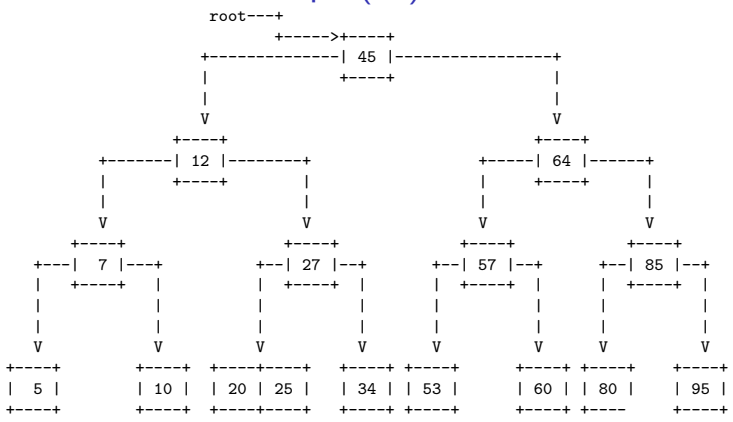
Espatifa o 4-nó.

put(57)



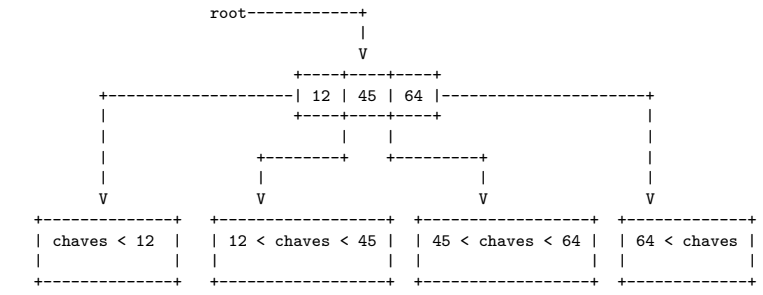
Tranforma o 3-nó pai em um 4-nó.

put(57)

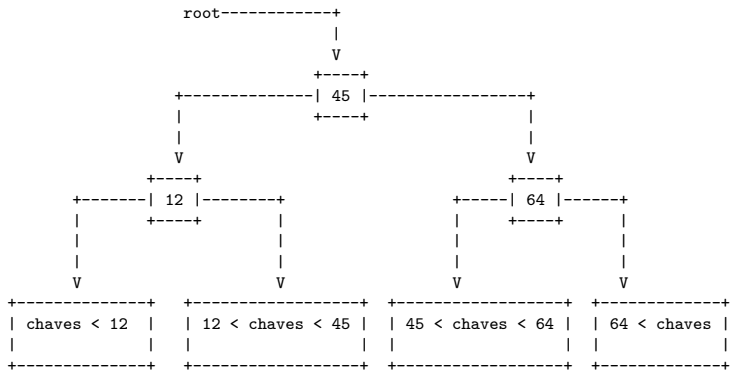


Espatifa o 4-nó. **Altura foi incrementada!**

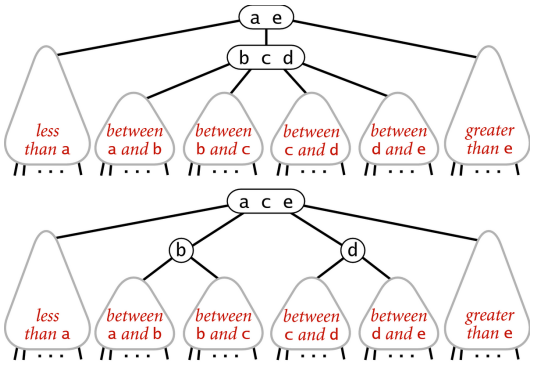
Tranformações preservam propriedades



Tranformações preservam propriedades



Tranformações preservam propriedades



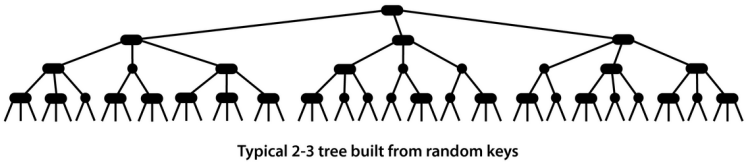
Splitting a 4-node is a local transformation that preserves order and perfect balance

Fonte: algs4

Consumo de tempo

Numa árvore 2-3 com n nós, busca e inserção nunca visitam mais que $\lg(n+1)$. Cada visita faz no máximo 2 comparações de chaves.

Árvore 2-3 aleatória



Typical 2-3 tree built from random keys

Fonte: algs4

Implementação

Usaremos BSTs (árvores binária de busca) para simultar árvores 2-3.

BSTs rubro-negras

Fonte: http://scottlobdell.me/

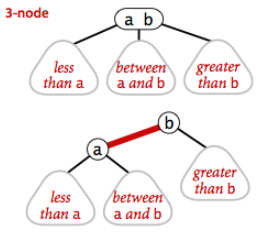
Referências: BSTs rubro-negras (PF); Balanced Search Trees (S&W); slides (S&W)

BSTs rubro-negras

Uma BST rubro-negra (*red-black BST*) é uma BST que simula uma árvores 2-3.

Cada 3-nó da árvore 2-3 é representado por dois 2-nós ligados por um link rubro.

Nossas BSTs são esquerdistas (*left-leaning*), pois os links rubros são **sempre** inclinados para a esquerda.



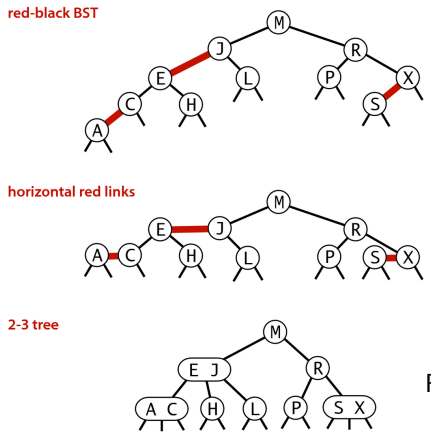
BSTs rubro-negras

Uma **BST rubro-negra** é uma BST cujos links são negros e rubros e:

- links rubros se inclinam para a esquerda;
- nenhum nó incide em dois links rubros;
- **balanceamento negro perfeito**: todo caminho da raiz até um link `null` tem o mesmo número de links negros.

Se os links rubros forem desenhados horizontalmente e depois contraídos, teremos uma árvore 2-3

Anatomia de uma árvore rubro-negra

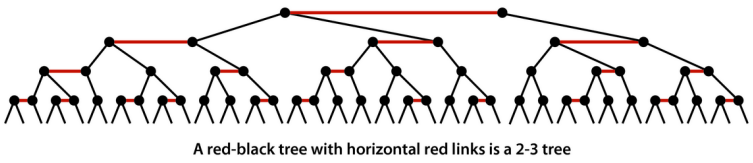


Fonte: algs4

1-1 correspondence between red-black BSTs and 2-3 trees

Árvore 2-3 para rubro-negra

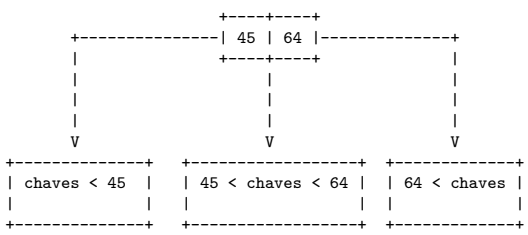
Se os links rubros forem desenhados horizontalmente e depois contraídos, teremos uma árvore 2-3:



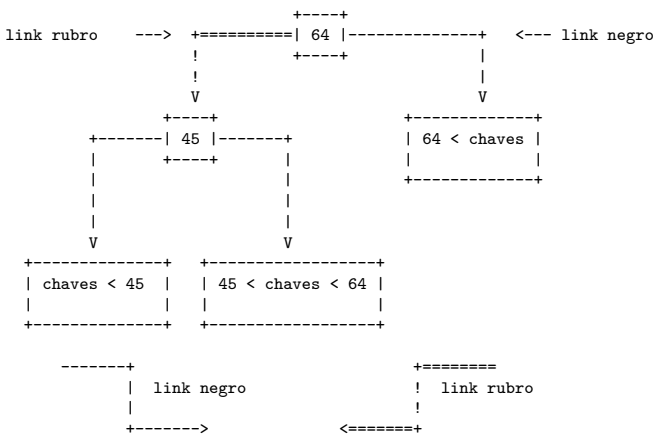
A red-black tree with horizontal red links is a 2-3 tree

Fonte: algs4

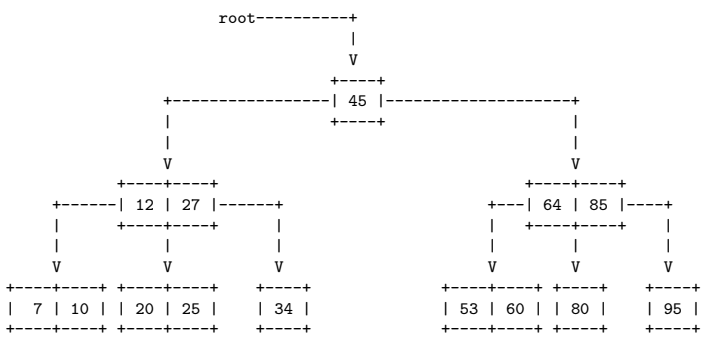
Árvore 2-3 para rubro-negra



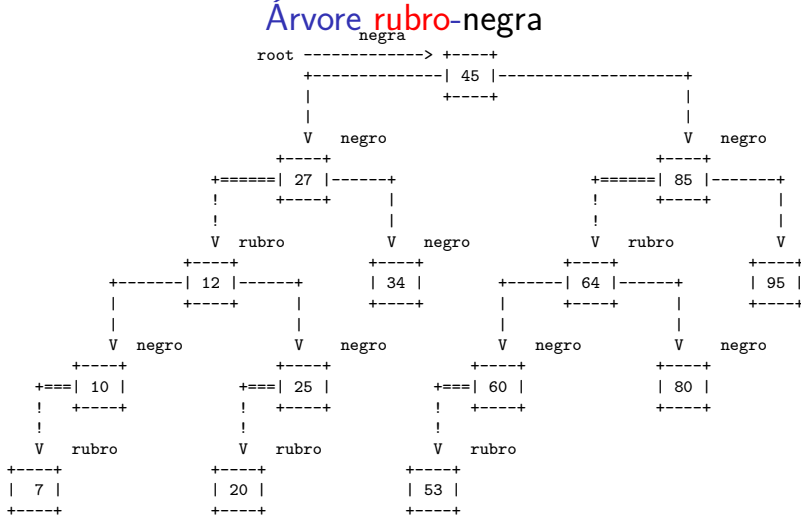
Árvore 2-3 para rubro-negra



Árvore 2-3



Árvore rubro-negra



Balanço e profundidade

O **balanço negro perfeito** vem do fato de que os links negros correspondem aos links da árvore 2-3.
Nota. No CLRS as árvores rubro-negras têm nós rubros e negros:

- nós rubros são os referenciados por links rubros.
- **nós negros** são os referenciados por **links negros**.

A **profundidade negra** de um nó `x` é o número de **links negros** no caminho da raiz até `x`.

A **altura negra** da árvore é o máximo da **profundidade negra** de todos os nós.

Nós de uma BST rubro-negra

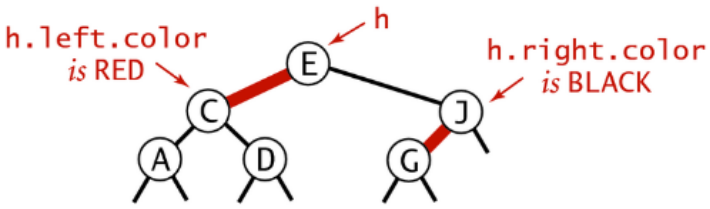
É inconveniente armazenar a cor de um link na estrutura de dados; é mais simples armazenar essa informação nos nós.

A cor de um nó é a cor do único link que entra nele.

A raiz é considerada **negra**.

```
private static final boolean RED = true;
private static final boolean BLACK = false;
```

Nós de uma BST rubro-negra



Nós de uma BST rubro-negra

```
private class Node{
   Key key; Value val;
   Node left, right;
   int n; // número de nós nesta subárvore
   boolean color; // cor do link para este nó
   Node(Key key Value val, int n,
                              boolean color) {
      this.key = key;  this.val = val;
      this.n = n;  this.color = color;
   } }
private boolean isRed(Node x) {
   if (x == null) return false;
   return x.color == RED;
}
```

get(key)

O código de busca (= `get()`) para BSTs rubro-**negras** é exatamente igual ao das BSTs comuns!

```
public Value get(Key key) {
   Node x = get(r, key);
   if (x == null) return null;
   return x.val;
}
```

get(key)

O código de busca (= `get()`) para BSTs rubro-**negras** é exatamente igual ao das BSTs comuns!

```
private Node get(Node x, Key key) {
   // Considera subárvore que tem raiz x
   if (x == null) return null;
   int cmp = key.compareTo(x.key);
   if (cmp < 0)
      return get(x.left, key);
   else if (cmp > 0)
      return get(x.right, key);
   else return x;
}
```

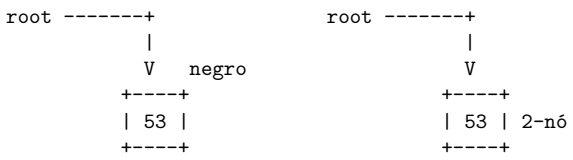
get(key) versão iterativa

Recebe uma chave `key` e retorna o valor `val` associado `key`; se `key` não está na BST, retorna `null`.

```
private Node get(Node x, Key key) {
   if (x == null) return null;
   while (x != null && !x.key.equals(key))
       int cmp = key.compareTo(x.key);
       if (cmp > k)
           x = x.left;
       else
           x = x.right;
   if (x != null) return x.val;
   return null;
}
```

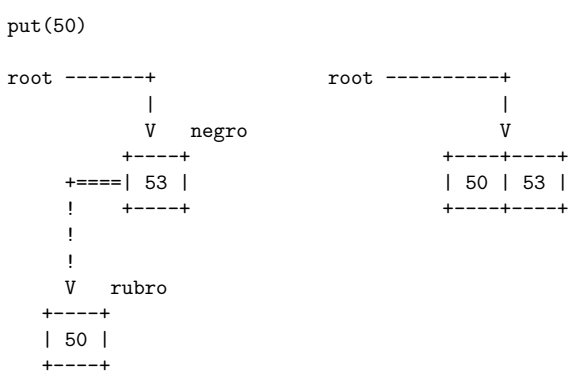
Inserção em um 2-nó

Árvore formada por apenas um 2-nó



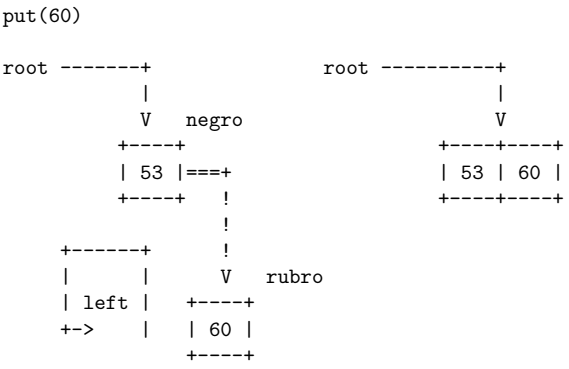
Inserção em um 2-nó

Árvore formada por apenas um 2-nó



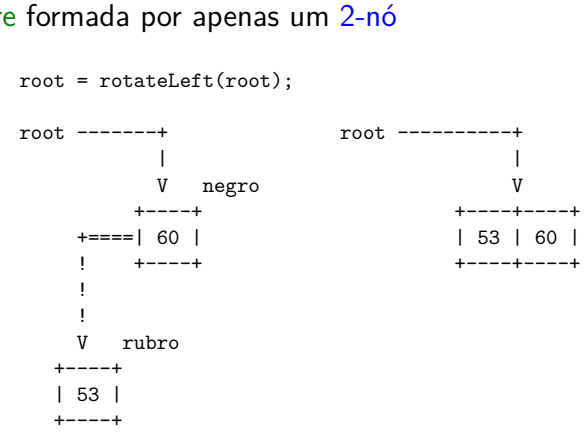
Inserção em um 2-nó

Árvore formada por apenas um 2-nó

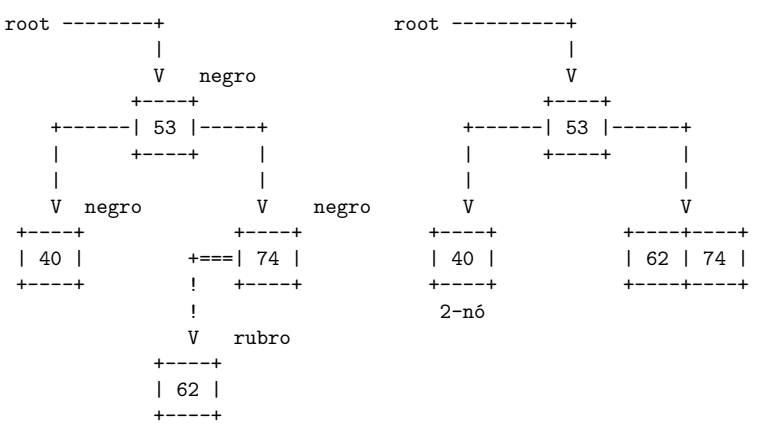


Inserção em um 2-nó

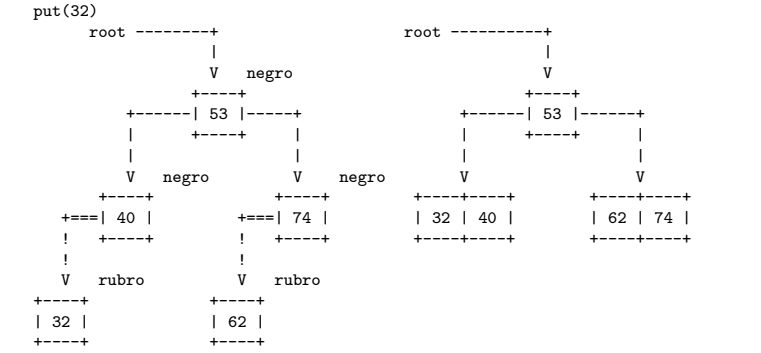
Árvore formada por apenas um 2-nó



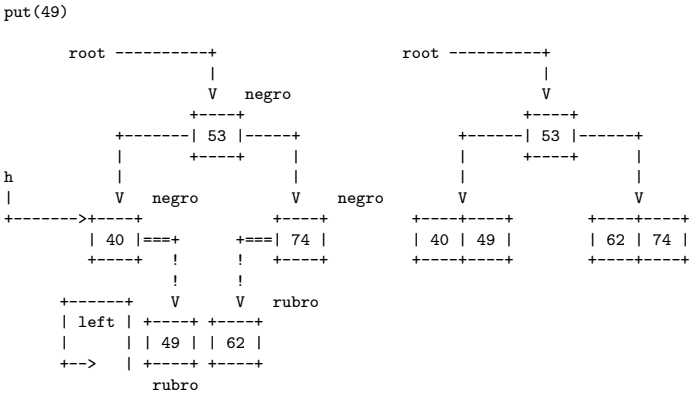
Inserção em um 2-nó qualquer



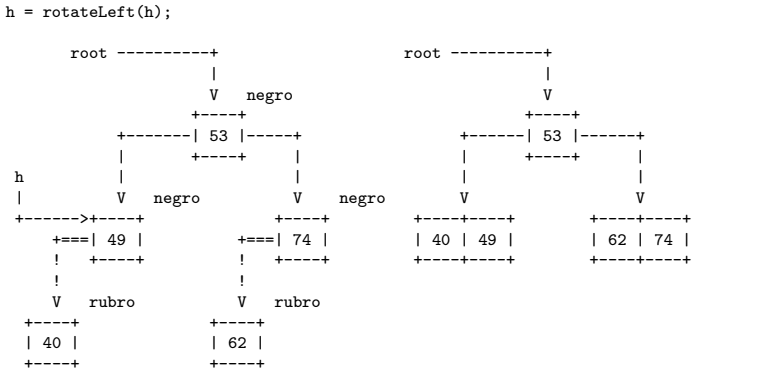
Inserção em um 2-nó qualquer



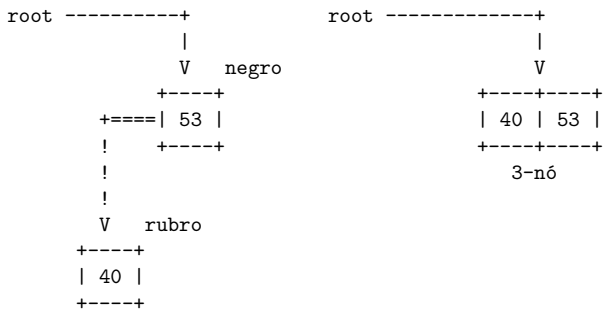
Inserção em um 2-nó qualquer



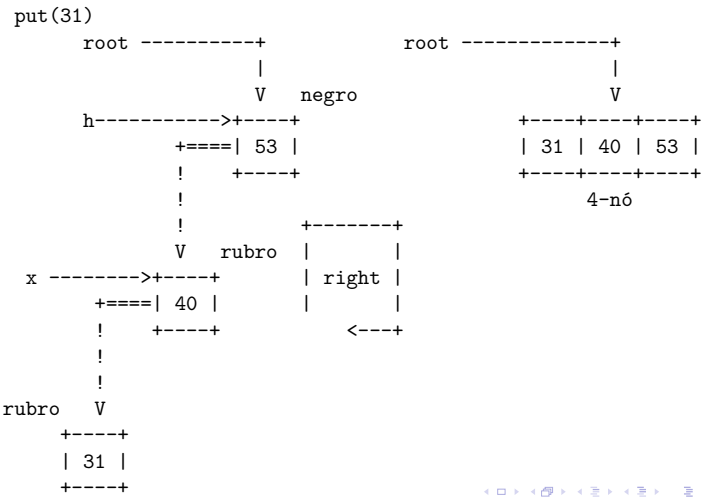
Inserção em um 2-nó qualquer



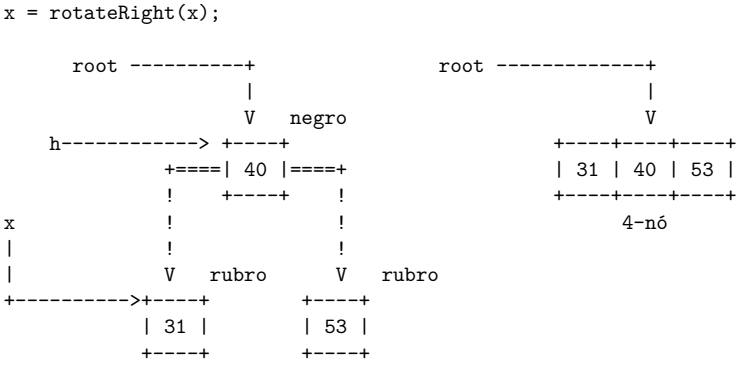
Inserção em um 3-nó



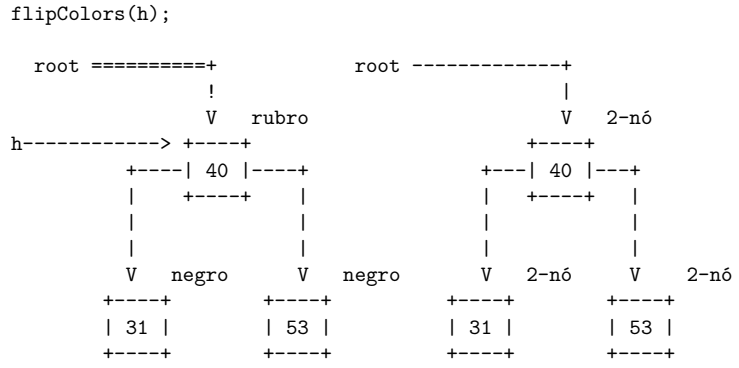
chave é inserida é menor do 3-nó



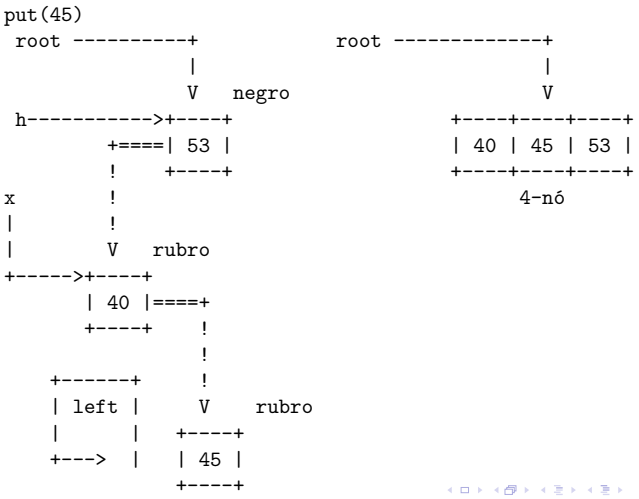
chave é inserida é menor do 3-nó



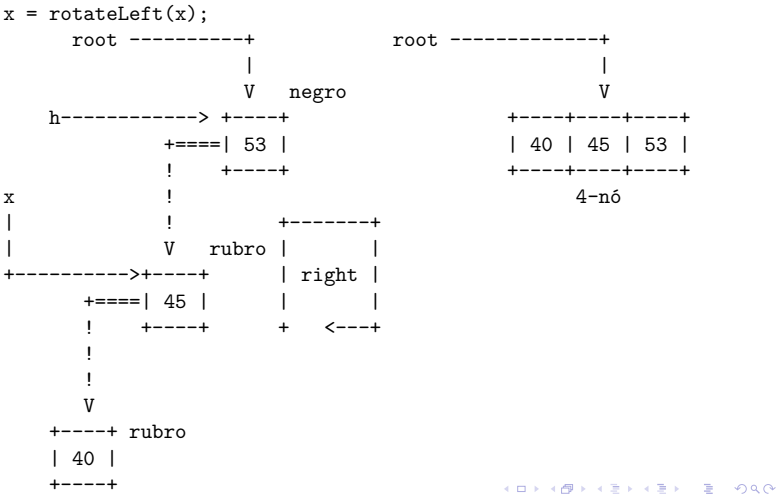
chave é inserida é menor do 3-nó



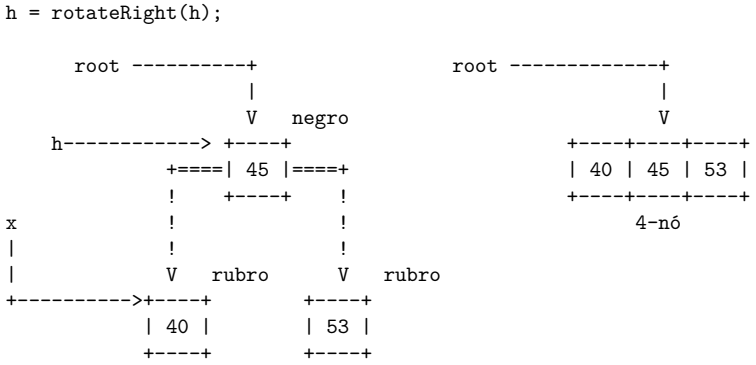
chave é inserida entre as chaves do 3-nó



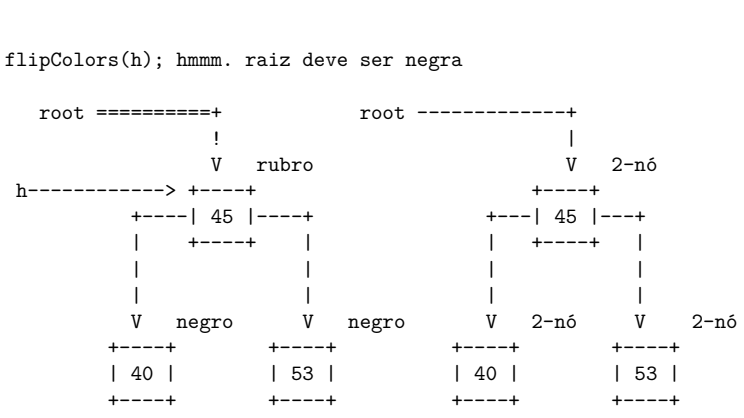
chave é inserida entre as chaves do 3-nó



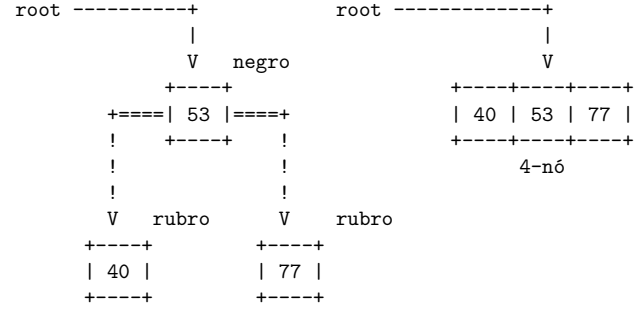
chave é inserida entre as chaves do 3-nó



chave é inserida entre as chaves do 3-nó



chave inserida é maior que todas do 3-nó



chave inserida é maior que todas do 3-nó

```
flipColors(root);  hmmm. raiz deve ser negra

root ==========+            root -------------+
               !                              |
               V   rubro                      V   2-nó
             +----+                         +----+
        +----| 53 |----+                +---| 53 |---+
        |    +----+    |                |   +----+   |
        |              |                |            |
        |              |                |            |
        V   negro      V    negro       V   2-nó     V    2-nó
      +----+         +----+          +----+        +----+
      | 40 |         | 77 |          | 40 |        | 77 |
      +----+         +----+          +----+        +----+
```