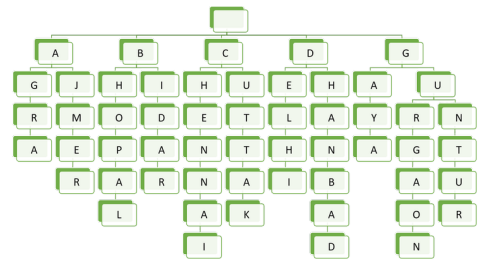


AULA 15

Tries (árvores digitais)



Fonte: Building an autocomplete system using Trie

Referências: Tries (árvores digitais) (PF); Tries (S&W); slides (S&W); Vídeo (S&W); TAOCP, vol 3, cap. 6.3

R-way tries

Uma **trie** (=R-way trie) é um tipo de árvore usado para implementar STs de strings sobre um alfabeto com R símbolos.

Tries também são conhecidas como **árvores digitais** e como **árvores de prefixos**.

Com Tries em vez de o método de busca ser baseado em comparações entre chaves, é utilizada a representação das chaves como caracteres de um alfabeto.

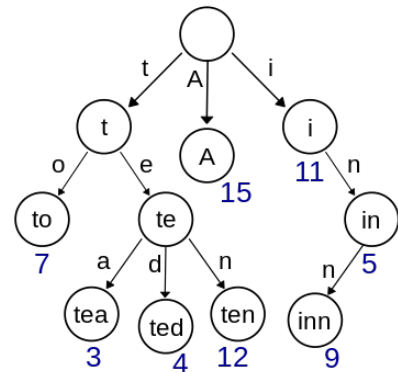
Considere, por exemplo, a busca de uma palavra no dicionário: a primeira letra indica as páginas que devemos olhar; a segunda letra restringe o espaço de busca;

Métodos específicos

A API de uma trie inclui, além dos métodos usuais como put(), get(), delete(),..., 3 métodos específicos:

- ▶ `keysWithPrefix(String s)`: todas as chaves que têm prefixo **s**
- ▶ `keysThatMatch(String s)`: todas as chaves que **casam** com **s** quando '.' é usado como **curinga**
- ▶ `longestPrefixOf(String s)` a chave mais longa que é prefixo de **s**

Ilustração



Fonte: Wikipedia

Métodos específicos

Exemplos para o conjunto de chaves

she sells sea shells by the sea shore:

`keysWithPrefix("she")` devolve "she" e "shells"

`keysWithPrefix("se")` devolve "sells" e "sea"

`keysThatMatch(".he")` devolve "she" e "the"

`keysThatMatch("s..")` devolve "she" e "sea"

`longestPrefixOf("shell")` devolve "she"

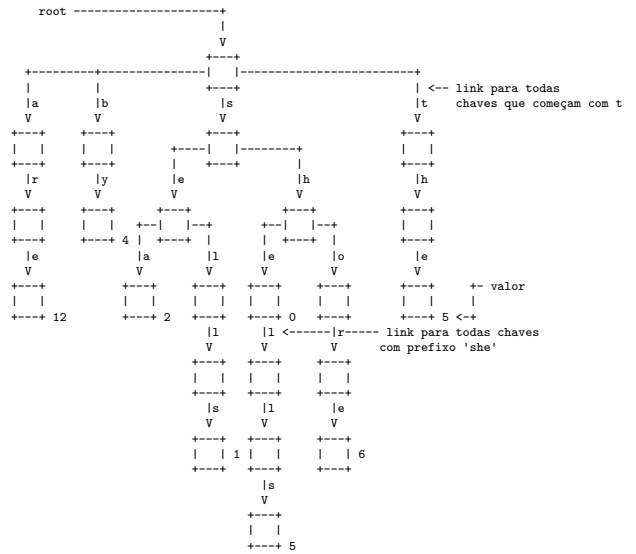
`longestPrefixOf("shellsort")` devolve "shells"

Outra ilustração

Para os pares **key-val**

key	val
are	12
by	4
sea	2
sells	1
she	0
shells	3
the	5
shore	6

temos a **trie** a seguir

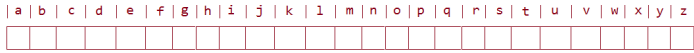


Estrutura do nó de uma trie

Os **links** correspondem a **caracteres** e não a chaves.

Tries são compostas por nós do tipo **Node**.

```
private static class Node {
    private Value val;
    private Node[] next = new Node[R];
}
```

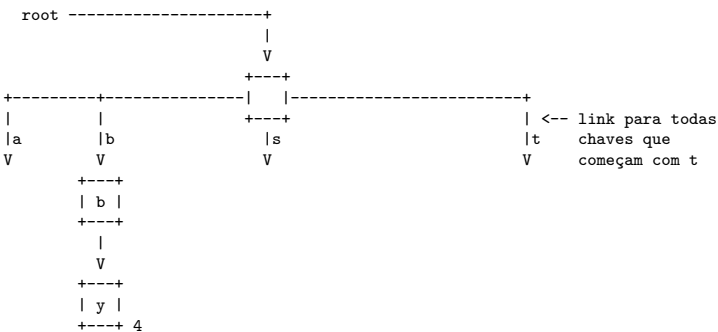


Fonte: [JavaByPatel](#)

Muitos dos **R** ponteiros podem ser **null**.

Ilustração

Se a **trie** é para o **alfabeto** 'a', 'b', ..., 'z' temos



Fonte: [JavaByPatel](#)

Ilustração

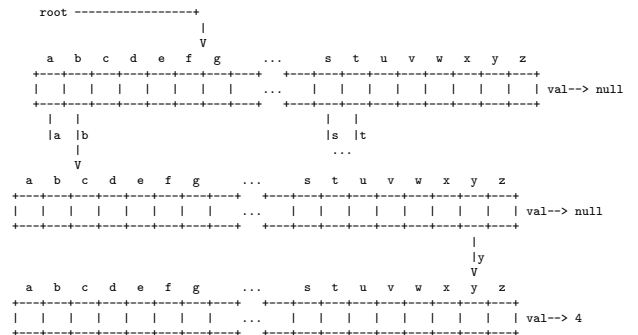
Se a **trie** é para o **alfabeto** 'a', 'b', ..., 'z' temos



Fonte: [JavaByPatel](#)

Outra ilustração

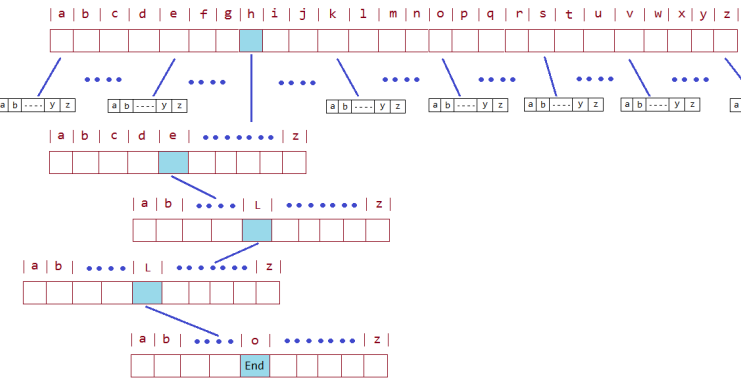
Se a **trie** é para o **alfabeto** 'a', 'b', ..., 'z' temos



as **posições vazias** representam **null**.

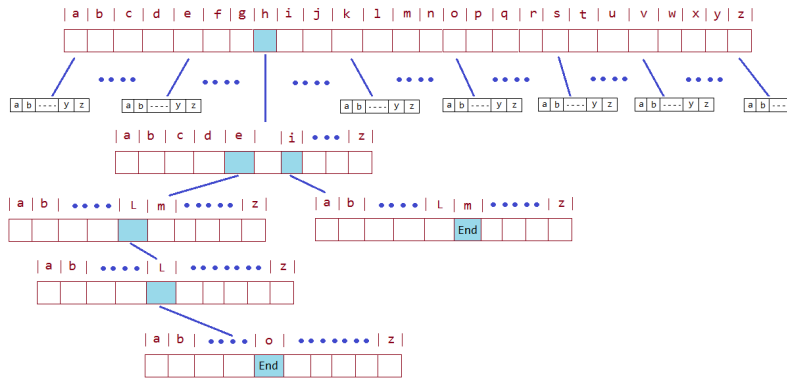
Fonte: [JavaByPatel](#)

Trie para "hello"



Fonte: [JavaByPatel](#)

Trie para "hello" e "him"

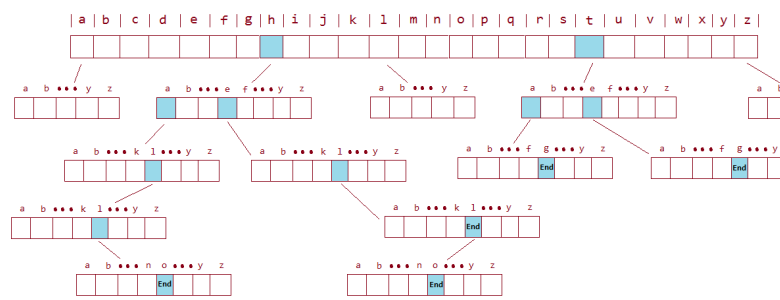


Fonte: [JavaByPatel](#)

Trie para ...

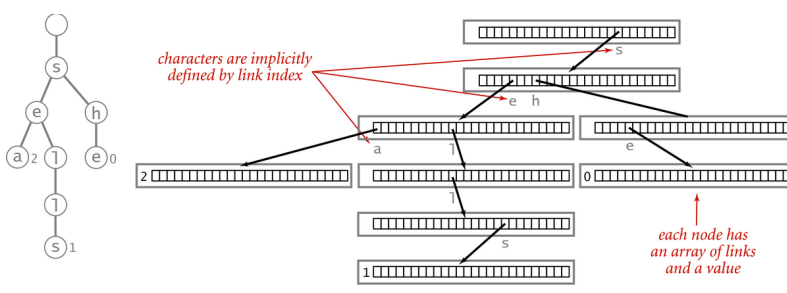
TRIE Datastructure Representation

Store Words: hello, hallo, hell, teg, tag



Fonte: [JavaByPatel](#)

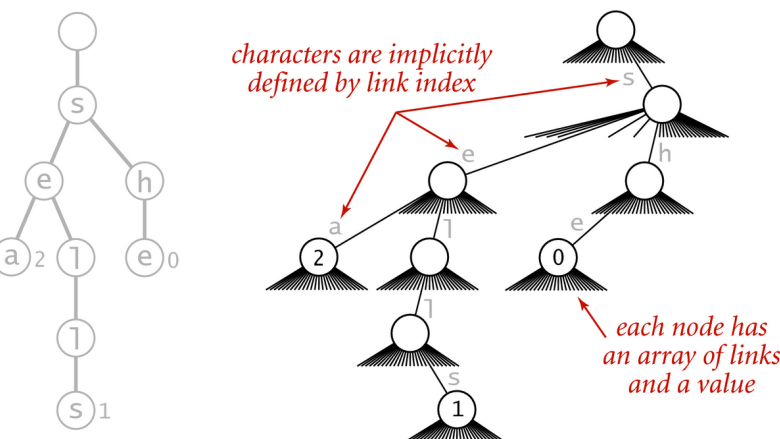
Trie para "sea", "sells" e "he"



Trie representation (R = 26)

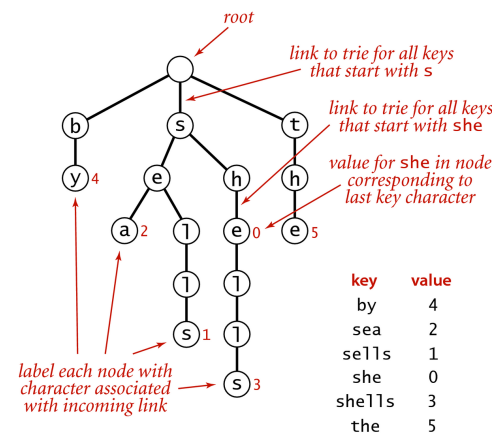
Fonte: [algs4](#)

Outra representação da mesma trie



Trie representation

Anatomia de uma Trie



key	value
by	4
sea	2
sells	1
she	0
shell's	3
the	5

Anatomy of a trie

Fonte: [algs4](#)

Observações

Duas observações importantes sobre tries:

- ▶ **chaves** ficam codificadas nos caminhos que começam na raiz;
- ▶ **prefixos de chaves**, que nem sempre são chaves, estão representados na trie.

Ao descer da raiz até um nó **x**, **soletramos** uma string, digamos **s**. Dizemos que **s** leva ao nó **x**.

Dizemos também que o nó **x** é localizado pela string **s**.

A string que leva a um nó **x** é uma chave se e somente se `x.val != null`.

◀ ▶ ⏪ ⏩ 🔍 🔄

Alphabet API

<code>public class</code>	<code>Alphabet</code>	
	<code>Alphabet(String s)</code>	cria uma alfabeto com caracteres em <code>s</code>
<code>int</code>	<code>toIndex(char c)</code>	converte <code>c</code> em um índice em $0..R-1$
<code>char</code>	<code>toChar(int i)</code>	converte <code>i</code> para o caractere correspondente
<code>boolean</code>	<code>contains(char c)</code>	<code>c</code> está no alfabeto?
<code>int</code>	<code>R()</code>	base do alfabeto
<code>int</code>	<code>lgR()</code>	número de bits de um índice

◀ ▶ ⏪ ⏩ 🔍 🔄

Alfabeto ASCII

Para o alfabeto ASCII temos simplesmente

- ▶ `toIndex(c) == c` para todo `c`
- ▶ `toChar(i) == i` para todo `i`.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	NUL	SOH	STX	ETX	EOT	ENQ	ACK	BEL	BS	HT	LF	VT	FF	CR	SO	SI
1	DLE	DC1	DC2	DC3	DC4	NAK	SYN	ETB	CAN	EM	SUB	ESC	FS	GS	RS	US
2		!	"	#	\$	%	&	'	()	*	+	,	-	.	/
3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	:	;	<	=	>	?
4	@	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
5	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	[\]	^	_
6	`	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
7	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	{		}	~	DEL

Fonte: [Wikipedia](#)

◀ ▶ ⏪ ⏩ 🔍 🔄

Alfabeto

A implementação utiliza a classe `Alphabet`

Um **alfabeto** é um conjunto de **caracteres** ou **símbolos**.

Em Java, cada **caractere** é um número entre `0` e `65535`.

A classe `Alphabet` permite definir um alfabeto personalizado com `R` caracteres numerados de `0` a `R-1`.

`R` é a **base** do alfabeto.

Veja a página [Alfabetos e a classe Alphabet \(PF\)](#)

◀ ▶ ⏪ ⏩ 🔍 🔄

Alfabeto do DNA

`Alphabet("ACTG")`

	<code>c</code>	A	C	T	G
<code>toIndex(c)</code>		0	1	2	3
	<code>i</code>	0	1	2	3
<code>toChar(i)</code>		A	C	T	G

◀ ▶ ⏪ ⏩ 🔍 🔄

Implementação (ASCII estendido)

```
public class TrieST<Value> {
    // tamanho do alfabeto
    private static int R = 256;
    // número de pares chave-valor
    private int n;
    private Node r; // raiz da trie
    private static class Node {...}
    public Value get(String key) {...}
    private Node get(Node x, String key, int d) {...}
    public void put(String key, Value val) {...}
    private Node put(Node x, String key, Value val, int d) {...}
    public void delete(String k) {...}
    public Iterable<String> keys() {...}
}
```

◀ ▶ ⏪ ⏩ 🔍 🔄

get(key): método clássico

Seguimos os ponteiros **soletrando** a string **key**.

```
public Value get(String key) {
    Node x = get(r, key, 0);
    if (x == null) return null;
    return x.val;
}
```

Navigation icons

get(key): método clássico

Seguimos os ponteiros **soletrando** a string **key**.

```
private Node get(Node x, String key,
                 int d) {
    if (x == null) return;
    if (d == key.length()) return x;
    char c = key.charAt(d);
    return get(x.next[c], key, d+1);
}
```

Navigation icons

put(key, val): método clássico

É feita uma **busca**.

Se a **key** é encontrada o valor **val** é **substituído**.

Caso contrário chegamos a um **null** e devemos **continuar a inserção** ou chegamos no último caractere de **key**.

```
public void put(String key, Value val) {
    r = put(r, key, val, 0);
}
```

Navigation icons

put(key, val): método clássico

```
private Node put(Node x, String key,
                 Value val, int d) {
    if (x == null) x = new Node();
    if (d == key.length()) {
        if (x.val == null) n++;
        x.val = val;
        return x;
    }
    char c = key.charAt(d);
    x.next[c] = put(x.next[c], key, val, d+1);
    return x;
}
```

Navigation icons

delete(key): método clássico

delete(key) remove a chave **key** do conjunto de chaves da trie.

Em princípio, a implementação de **delete()** é fácil: basta encontrar o nó **x** localizado por **key** e fazer

```
x.val = null;
```

Infelizmente, a **trie** resultante dessa operação **pode não ser limpa**.

Para manter a **trie** limpa, é preciso fazer algo mais complexo.

Navigation icons

delete(key): método clássico

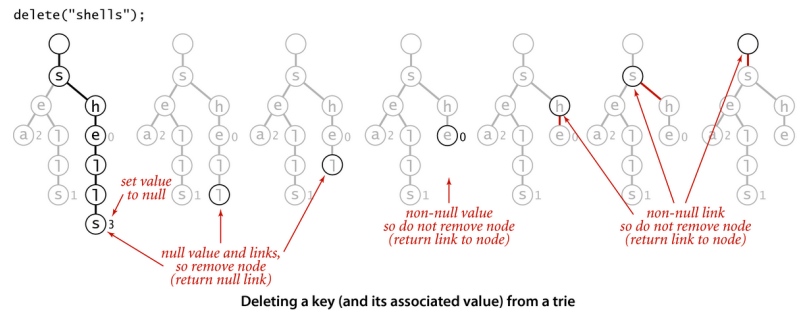
```
public void delete(String key) {
    r = delete(r, key, 0);
}
```

Navigation icons

delete(key): método clássico

```
private Node delete(Node x, String key,
                    int d) {
    if (x == null) return null;
    if (d == key.length()) x.val = null;
    else {
        char c = key.charAt(d);
        x.next[c] = delete(x.next[c], key, d+1);
    }
    if (x.val != null) return x;
    for (char c = 0; c < R; c++)
        if (x.next[c] != null) return x;
    return null;
}
```

delete(key): ilustração



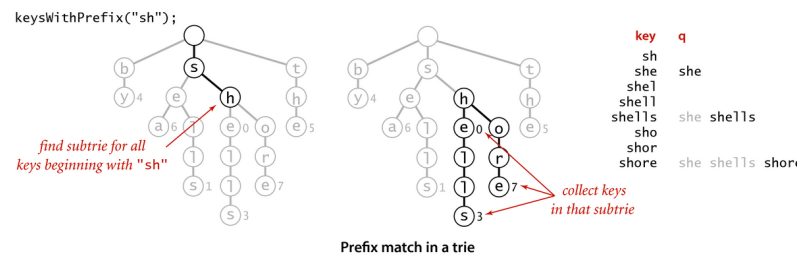
Fonte: [algs4](#)

keysWithPrefix(pre): método especial

Devolve todas as chaves na ST que têm prefixo pre.

```
public Iterable<String>
    keysWithPrefix(String pre) {
    Queue<String> q = new Queue<String>();
    Node x = get(r, pre, 0);
    collect(x, pre, q);
    return q;
}
```

keysWithPrefix(pre): ilustração



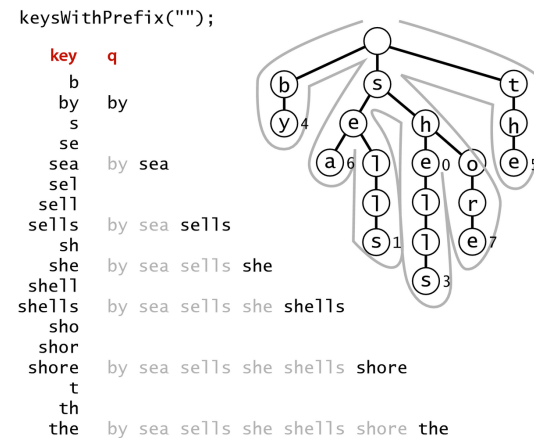
Fonte: [algs4](#)

collect(): método auxiliar

O método coloca na fila q todas as chaves da subtrie cuja raiz é x depois de acrescentar o prefixo pre a todas essas chaves.

```
private void collect(Node x, String pre,
                    Queue<String> q) {
    if (x == null) return;
    if (x.val != null) q.enqueue(pre);
    for (char c = 0; c < R; c++)
        collect(x.next[c], pre+c, q);
}
```

collect(): ilustração



Fonte: [algs4](#)

keys(): método clássico

```
public Iterable<String> keys() {
    return keysWithPrefix("");
}
```

Navigation icons

keysThatMatch(): método especial

Devolve todas as chaves que casam com o padrão `pat`.

Todos os caracteres `'.'` em `pat` são curingas.

```
public Iterable<String>
keysThatMatch(String pat) {
    Queue<String> q = new Queue<String>();
    collect(r, "", pat, q);
    return q;
}
```

Navigation icons

Consumo de espaço e tempo

A estrutura de uma `trie` não depende da ordem em que as chaves são inseridas ou removidas.

O consumo de tempo das operações sobre uma `trie` não depende do número `n` de itens.

O número de nós visitados por `get(key)` é no máximo $1 + w$, onde $w = \text{key.length}()$.

O número de links em uma `trie` é entre Rn e Rnw onde w é o comprimento médio de uma chave.

Navigation icons

longestPrefixOf(s): método especial

Devolve a maior chave que é prefixo de `s`.

```
public String longestPrefixOf(String s) {
    int max = -1;
    Node x = r;
    for (int d = 0; x != null; d++) {
        if (x.val != null) max = d;
        if (d == s.length()) break;
        x = x.next[s.charAt(d)];
    }
    if (max == -1) return null;
    return s.substring(0, max);
}
```

Navigation icons

Mais um collect()

Coloca em `q` todas as chaves da trie que têm prefixo `pre` e casam com o padrão `pat`.

```
private void collect(Node x, String pre,
    String pat, Queue<String> q) {
    if (x == null) return;
    if (pre.length() == pat.length()
        && x.val != null)
        q.enqueue(pre);
    if (pre.length() == pat.length()) return;
    char c_next = pat.charAt(pre.length());
    for (int c = 0; c < R; c++)
        if (c_next == '.' || c_next == c)
            collect(x.next[c], pre+c, pat, q);
}
```

Navigation icons

Consumo de espaço e tempo

O número esperado de nós visitados durante uma busca malsucedida em uma `trie` com `n` chaves aleatórias sobre um alfabeto de tamanho `R` é aproximadamente $\log_R n$.

Navigation icons

Tries ternárias



Fonte: *The Little Prince*, Antoine de Saint-Exupéry

Referências: Tries (árvores digitais) (PF); Tries (S&W); slides (S&W); Vídeo (S&W); TAOCP, vol 3, cap. 6.3

Alphabet

nome	R()	lg(R)	conjunto de caracteres
BINARY	2	1	'01'
DNA	4	2	'ACTG'
OCTAL	8	3	'01234567'
DECIMAL	10	4	'0123456789'
HEXADECIMAL	16	4	'0123456789ABCDEF'
PROTEIN	20	5	'ACDEFGHIKLMNPQRSTVM'
LOWERCASE	26	5	'abcd...wxyz'
UPPERCASE	26	5	'ABCD...WXYZ'
ASCII	128	7	alfabeto ASCII
EXTENDED_ASCII	256	8	alfabeto ASCII estendido
UNICODE16	65536	16	alfabeto Unicode

Tries ternárias

O maior problema das **tries** é possivelmente o **espaço**, já que cada nó contém **R** referências.

Assim, cada nó utiliza pelo menos $8 \times R$ bytes.

Veja alguns valores de **R** para de alguns alfabeto na classe **Alphabet** na página **Alfabetos e a classe Alphabet** (PF).

Para **evitar o custo excessivo de espaço** associamos de uma **R-trie**, consideramos uma representação como uma **ternary search trie** (TST).

Outra ilustração

Para os pares **key-val**

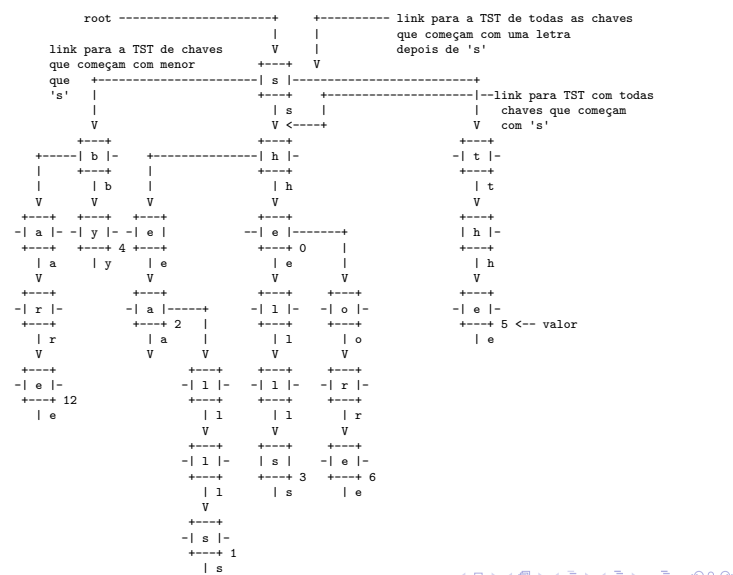
key	val
are	12
by	4
sea	2
sells	1
she	0
shells	3
the	5
shore	6

temos a **TST** a seguir

TSTs

De **maneira semelhante** ao que ocorre com **tries**, nas **tries** ternárias:

- ▶ **chaves** ficam codificadas nos caminhos que começam na raiz;
- ▶ **prefixos** de chaves, que nem sempre são chaves, estão representados na **TST**.



Estrutura de uma trie ternária

Os links da estrutura correspondem a caracteres. Nas figuras, o caractere escrito dentro de um nó é o caractere do link que sai pelo meio do nó. TSTs são compostas por nós do tipo Node.

```
private static class Node {
    private char c; // caractere
    private Value val;
    private Node left; // < c
    private Node mid; // == c
    private Node right; // > c
}
```

Ilustração

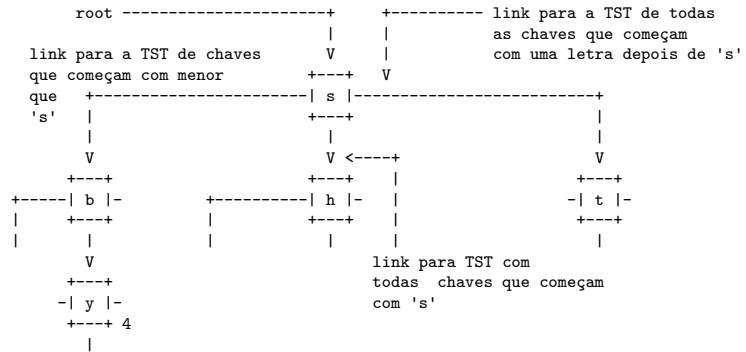
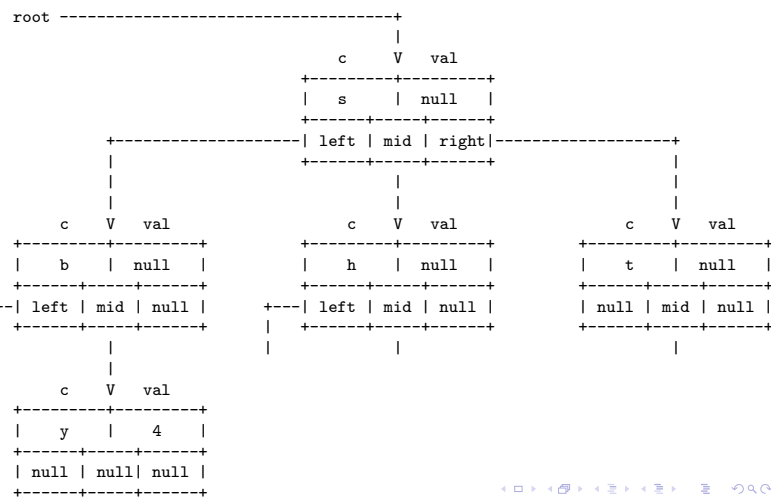
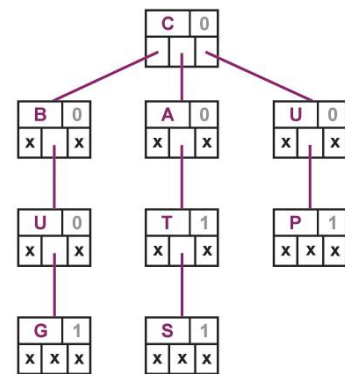


Ilustração com zoom



Outra ilustração



Ternary Search Tree for CAT, BUG, CATS, UP

Fonte: Ternary search trees for autocompletion and spell checking

Implementação (ASCII extendido)

```
public class TST<Value> {
    private int n;
    private Node r; // raiz da tst
    private static class Node {...}
    public Value get(String key) {...}
    private Node get(Node x, String key, int d) {...}
    public void put(String key, Value val) {...}
    private Node put(Node x, String key, Value val, int d) {...}
    public Iterable<String> keys() {...}
}
```

get(key): método clássico

A string que leva a um nó x é uma chave se e somente se x.c é o último caractere da chave e x.val != null.

```
// TrieST e TST
public Value get(String key) {
    Node x = get(r, key, 0);
    if (x == null) return null;
    return x.val;
}
```

get(key): método clássico

```
private Node get(Node x, String key,
                int d) {
    char c = key.charAt(d);
    if (x == null) return null;
    if (c < x.c)
        return get(x.left, key, d);
    if (c > x.c)
        return get(x.right, key, d);
    if (d < key.length()-1)
        return get(x.mid, key, d+1);
    return x;
}
```

< > < > < > < > < > < > < > < >

put(key, val): método clássico

```
private Node put(Node x, String key,
                Value val, int d) {
    char c = s.charAt(d);
    if (x == null)
        { x = new Node(); x.c = c; }
    if (c < x.c)
        x.left = put(x.left, s, val, d);
    else if (c > x.c)
        x.right = put(x.right, s, val, d);
    else if (d < s.length()-1)
        x.mid = put(x.mid, s, val, d+1);
    else x.val = val;
    return x;
}
```

< > < > < > < > < > < > < > < >

keys(): método clássico

```
public Iterable<String> keys() {
    Queue<String> q = new Queue<String>();
    collect(r, "", q);
    return q;
}
```

< > < > < > < > < > < > < > < >

put(key, val): método clássico

É feita uma busca.

Se a **key** é encontrada o valor **val** é substituído. Caso contrário chegamos a um **null** e devemos continuar a inserção ou chegamos no último caractere de **key**.

```
// TrieST e TST
public void put(String key, Value val) {
    r = put(r, key, val, 0);
}
```

< > < > < > < > < > < > < > < >

collect(): método auxiliar

O método coloca na fila **q** todas as chaves da subtrie cuja raiz é **x** depois de acrescentar o prefixo **pre** a todas essas chaves.

```
private void collect(Node x, String pre,
                    Queue<String> q) {
    if (x == null) return;
    collect(x.left, pre, q);
    // ordem lexicográfica
    if (x.val != null) q.enqueue(pre+x.c);
    collect(x.mid, pre+x.c, q);
    collect(x.right, pre, q);
}
```

< > < > < > < > < > < > < > < >

keysWithPrefix(): método especial

Devolve todas as chaves na **ST** que têm prefixo **pre**.

```
public Iterable<String>
    keysWithPrefix(String pre) {
    Queue<String> q = new Queue<String>();
    Node x = get(r, pre, 0);
    if (x == null) return q;
    if (x.val != null) q.enqueue(pre);
    collect(x.mid, pre, q);
    return q;
}
```

< > < > < > < > < > < > < > < >

longestPrefixOf(): método especial

Devolve a maior chave que é prefixo de s .

```
public String longestPrefixOf(String s) {
    if (s == null || s.length() == 0)
        return null;
    int max = 0;
    Node x = r;
    int i = 0;
```

keysThatMatch(): método especial

Devolve todas as chaves que casam com o padrão pat . Todos os caracteres '.' em pat são curingas.

```
public Iterable<String>
keysThatMatch(String pat) {
    Queue<String> q = new Queue<String>();
    collect(r, "", 0, pat, q);
    return q;
}
```

Mais um collect()

```
if (c == '.' || c == x.c) {
    if (i == pat.length() - 1
        && x.val != null)
        q.enqueue(pre+x.c);
    else if (i < pat.length() - 1)
        collect(x.mid, pre+x.c, i+1, pat, q);
}
if (c == '.' || c > x.c)
    collect(x.right, pre, i, pat, q);
}
```

longestPrefixOf(): método especial

```
while (x != null && i < s.length()) {
    char c = s.charAt(i);
    if (c < x.c) x = x.left;
    else if (c > x.c) x = x.right;
    else {
        i++;
        if (x.val != null) max = i;
        x = x.mid;
    }
}
return s.substring(0, max);
}
```

Mais um collect()

Coloca em q todas as chaves da trie que têm prefixo pre e casam com o padrão pat .

```
private void collect(Node x, String pre,
    int i, String pat, Queue<String> q) {
    if (x == null) return;
    char c = pat.charAt(i);
    if (c == '.' || c < x.c)
        collect(x.left, pre, i, pat, q);
```

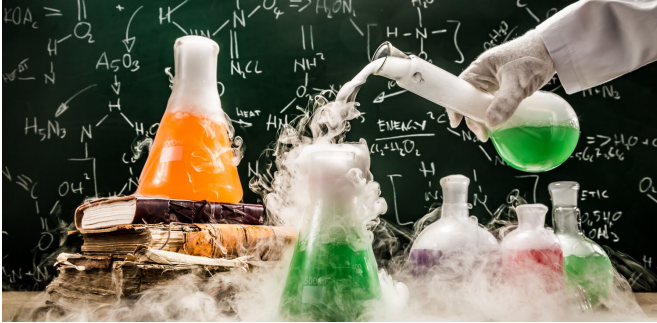
Consumo de espaço e tempo

Espaço. A propriedade mais importante de uma TST é que ela tem apenas três links por nó.

Proposição J: O número de links em uma TST com n chaves de comprimento médio w é entre $3n$ e $3nw$.

Proposição K: O número esperado de nós visitados durante uma busca malsucedida em uma TST com n chaves aleatórias é aproximadamente $\lg n$.

Alguns experimentos



Fonte: <https://singularityhub.com/>

Experimentos: les_miserables.txt

ST com 26764 itens

```
% wc les-miserables.txt
```

```
68116 568531 3322649 les-miserables.txt
```

ST	criada (s)
BST	0.626
Red-Black	0.577
Separate chain	0.495 (4096, 18, $\alpha = 6$)
Linear probing	0.411 (65536, 67, $\alpha = 0.40$)
Tries	0.574
TST	0.497

Experimentos: actors.list

ST com 1482495 itens

```
% wc actors.list
```

```
16612200 124796815 932688622 actors.list
```

ST	criada (s)
BST	141.968
Red-Black	168.723
Separate Chain	110.035 (262144, 19, $\alpha = 5$)
Linear Probing	73.123 (4194304, 4787, $\alpha = 0.35$)
Tries	OutOfMemoryError
TST	107.223