Compacto dos melhores momentos

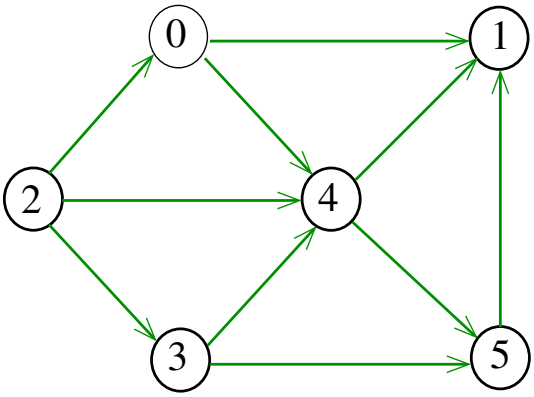
AULA 20

Busca ou varredura

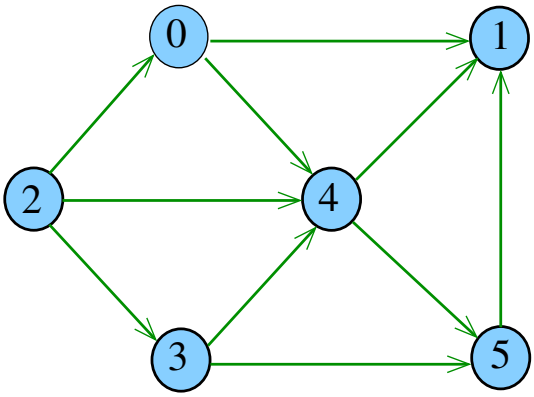
Um algoritimo de **busca** (ou **varredura**) examina, sistematicamente, todos os vértices e todos os arcos de um digrafo.

Cada arco é examinado **uma só vez**.
Despois de visitar sua ponta inicial o algoritmo percorre o arco e visita sua ponta final.

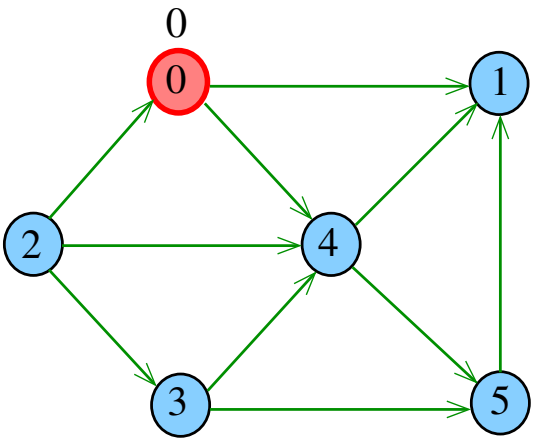
DFS(G)



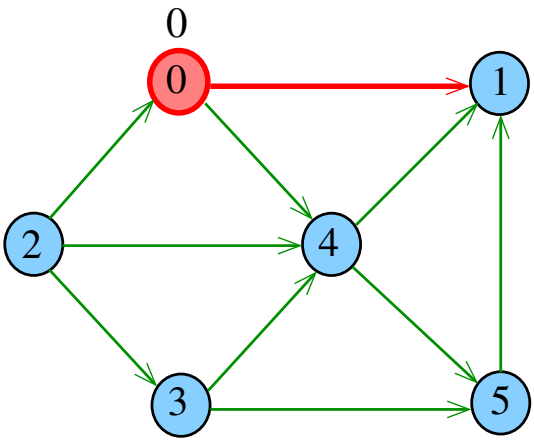
DFS(G)



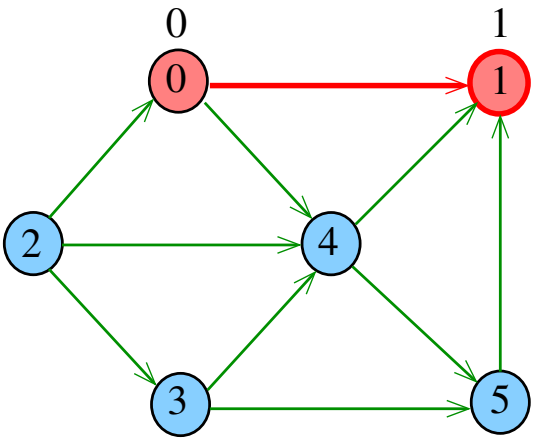
dfs(G,0)



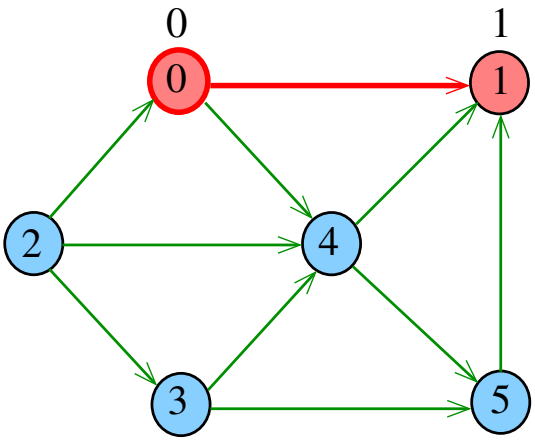
dfs(G,0)



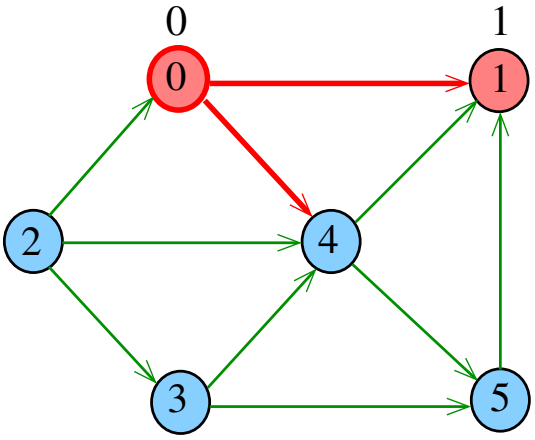
dfs(G,1)



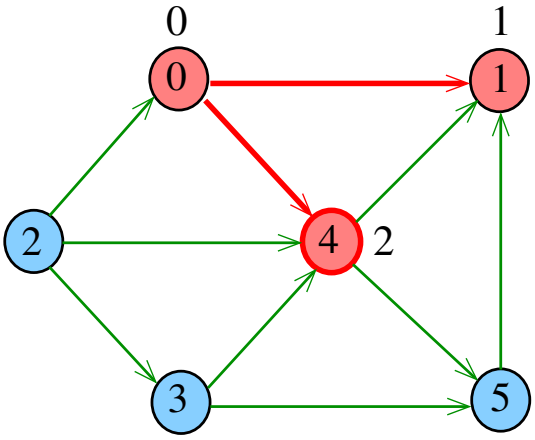
dfs(G,0)



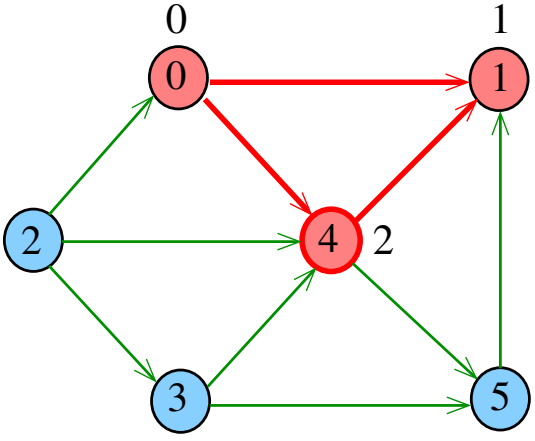
dfs(G,0)



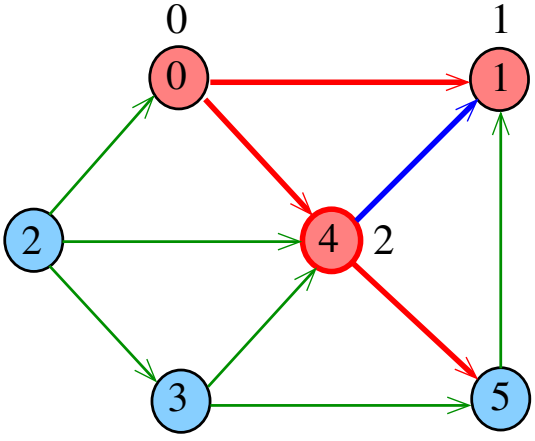
dfs(G,4)



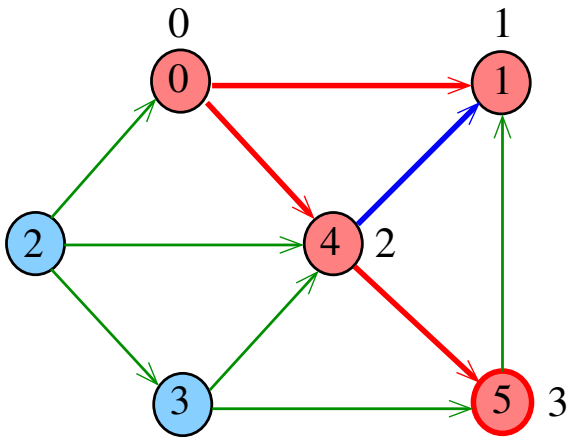
dfs(G,4)



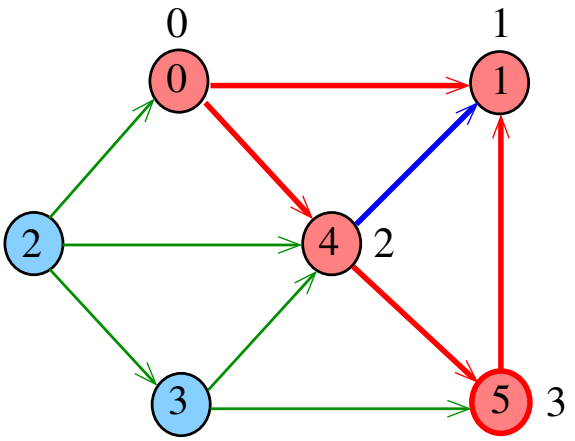
dfs(G,4)



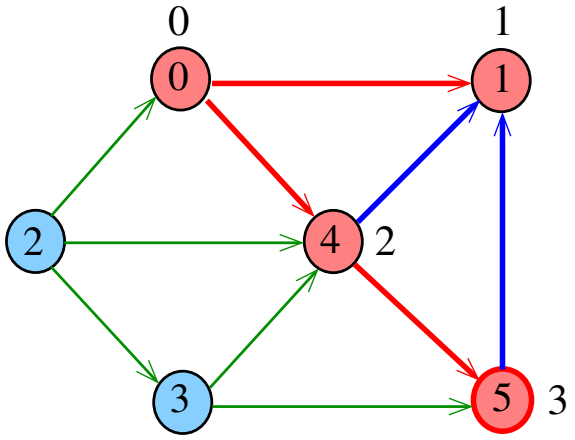
dfs(G,5)



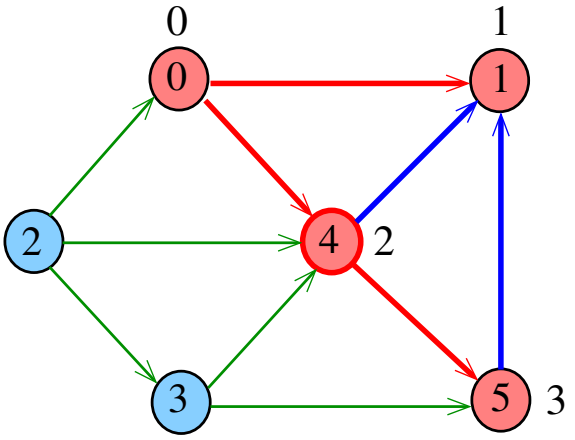
dfs(G,5)



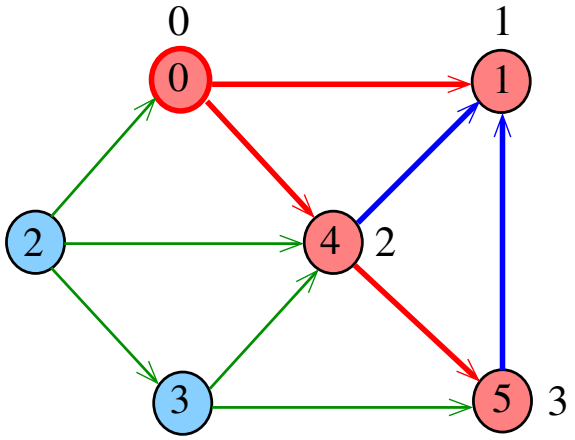
dfs(G,5)



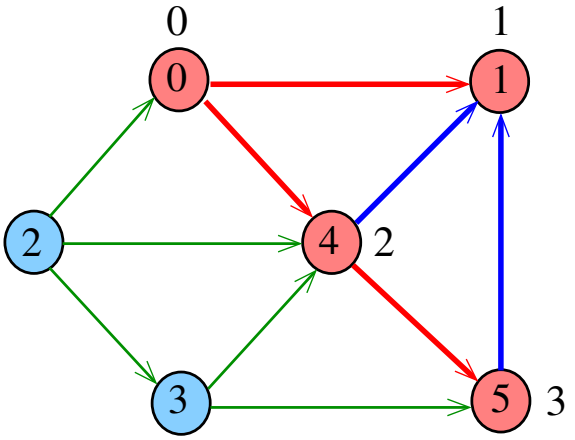
dfs(G,4)



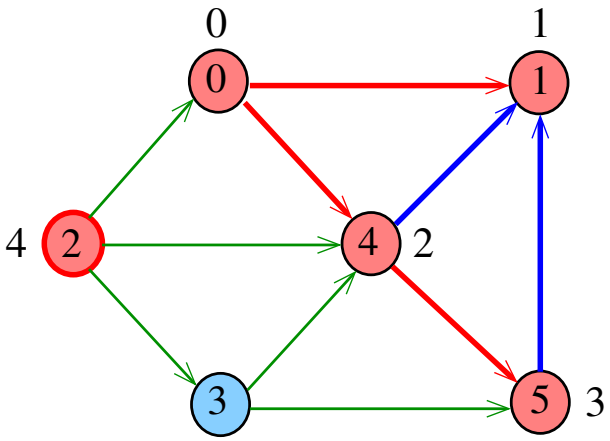
dfs(G,0)



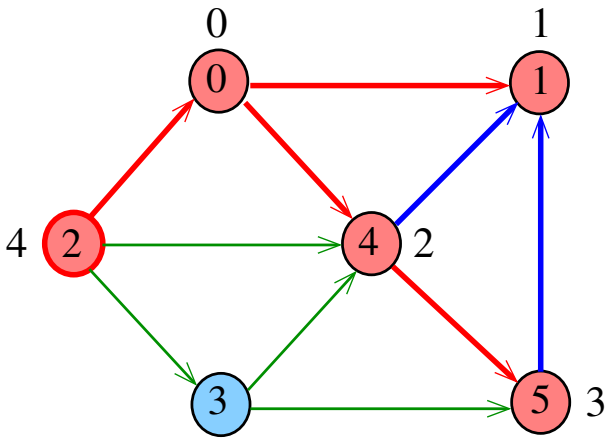
DFS(G)



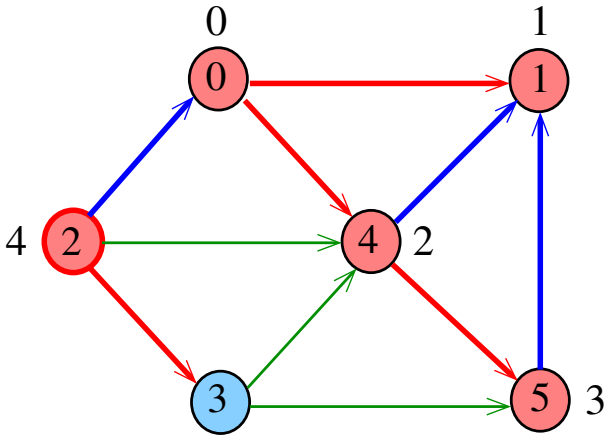
dfs(G,2)



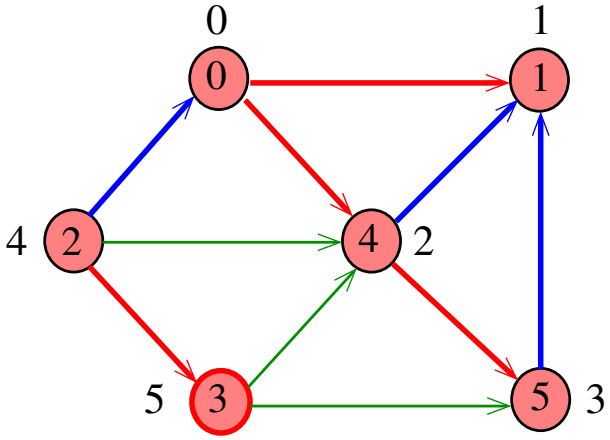
dfs(G,2)



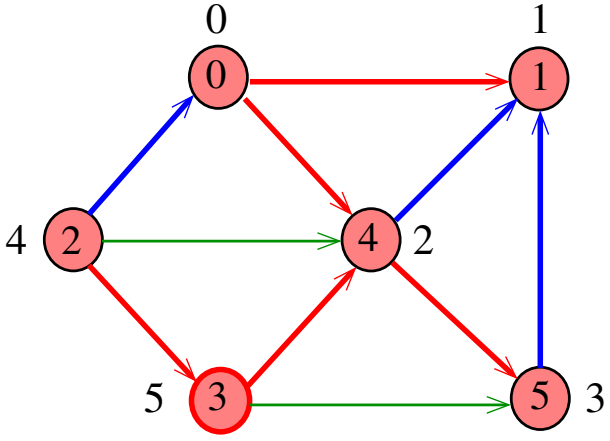
dfs(G,2)



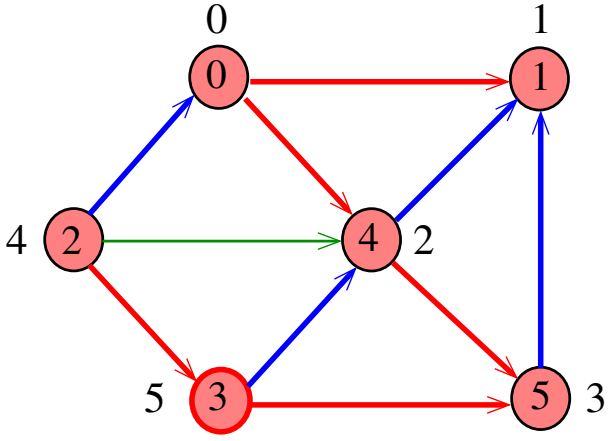
dfs(G,3)



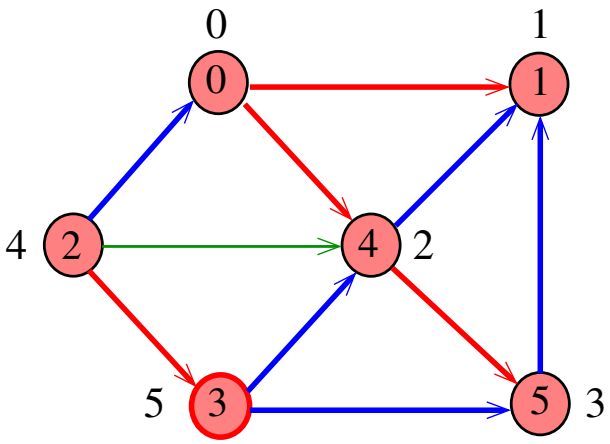
dfs(G,3)



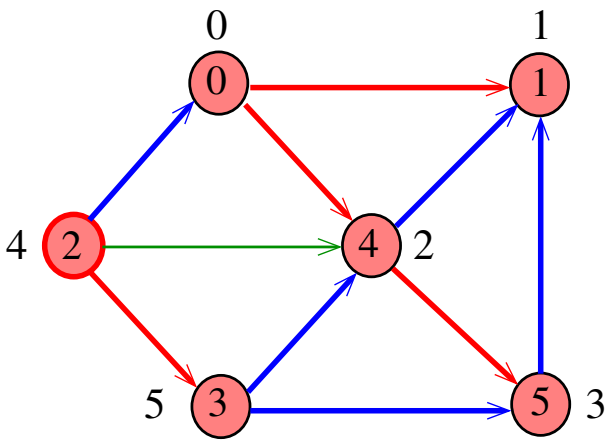
dfs(G,3)



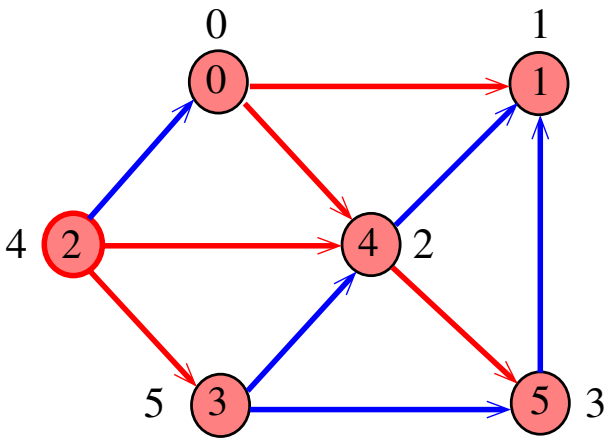
dfs(G,3)



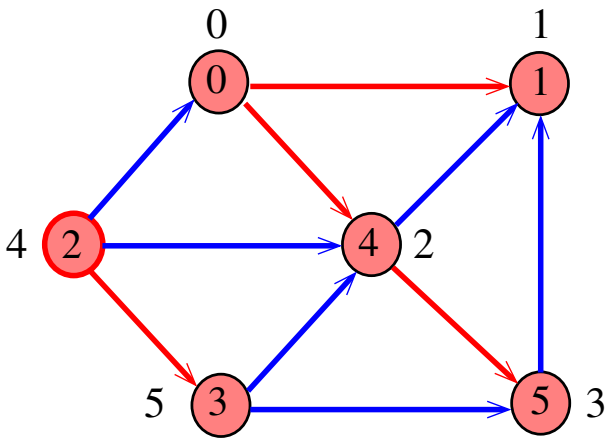
dfs(G,2)



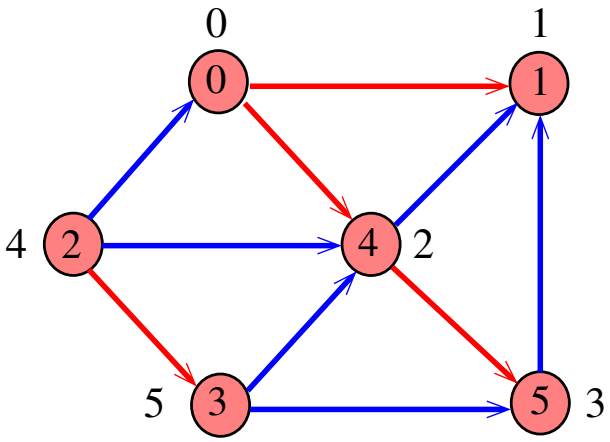
dfs(G,2)



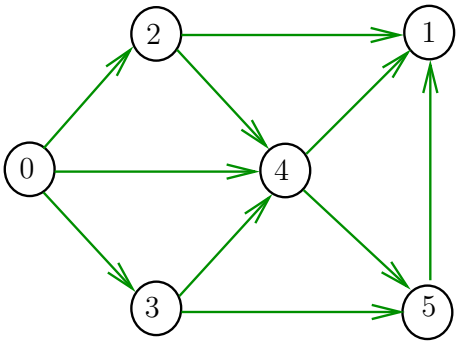
dfs(G,2)



DFS(G)

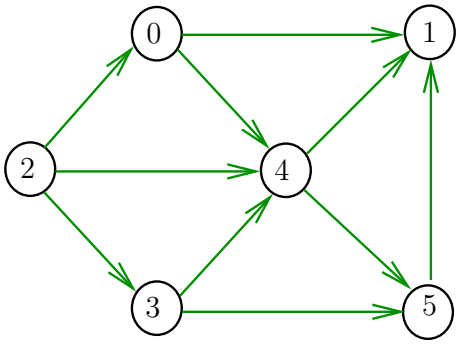


DFS(G)




```
dfs(G, 0)
  0-2 dfs(G,2)
    2-1 dfs(G,1)
    2-4 dfs(G,4)
      4-1
      4-5 dfs(G,5)
        5-1
  0-3 dfs(G,3)
    3-4
    3-5
  0-4
```

DFS(G)




```
dfs(G, 0)
  0-1 dfs(G, 1)
  0-4 dfs(G, 4)
    4-1
    4-5 dfs(G, 5)
      5-1
dfs(G, 2)
  2-0
  2-3 dfs(G, 3)
    3-4
    3-5
  2-4
```

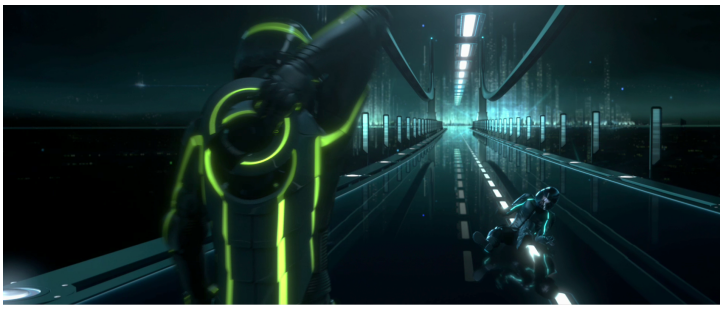
Consumo de tempo

O consumo de tempo de DFS para vetor de listas de adjacência é $\Theta(V + E)$.

O consumo de tempo de DFS para matriz de adjacência é $\Theta(V^2)$.

AULA 21

Caminhos no computador



Fonte: Tron Legacy Light Cycle Riders wallpaper

Caminhos no computador

Como representar caminhos no computador?

Caminhos no computador

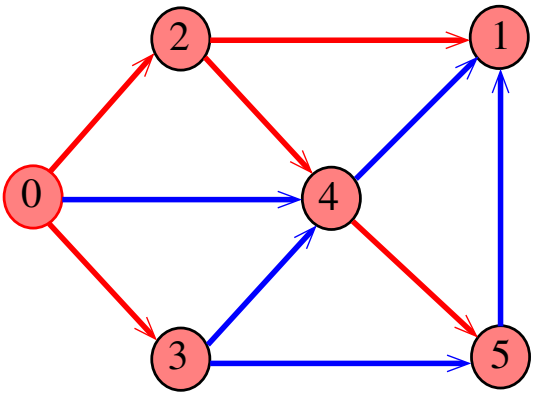
Uma maneira **compacta** de representar caminhos de um vértice a outros é uma arborescência

Uma **arborescência** é um digrafo em que

- existe exatamente um vértice com grau de entrada 0, a **raiz** da arborescência
- não existem vértices com grau de entrada maior que 1,
- cada um dos vértices é término de um caminho com origem no vértice **raiz**.

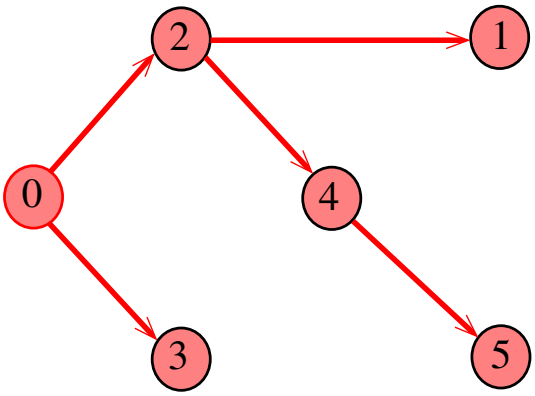
Arborescências

Exemplo: a raiz da arborescência é 0



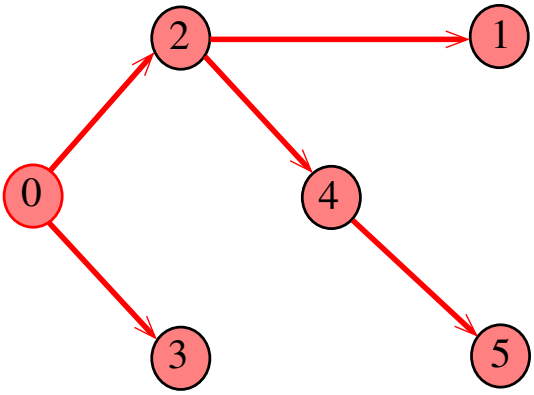
Arborescências

Exemplo: a raiz da arborescência é 0



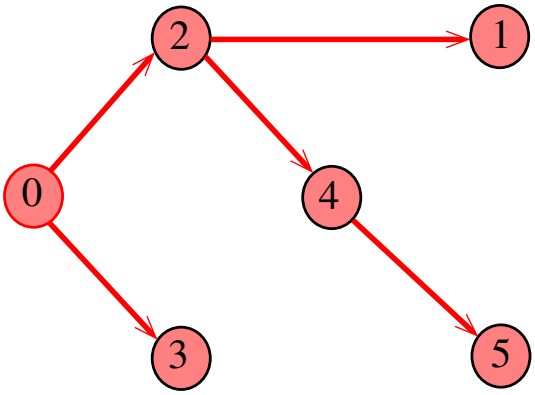
Arborescências

Propriedade: para todo vértice `v`, existe exatamente um caminho da raiz a `v`



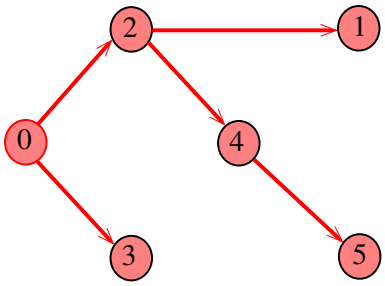
Arborescências

Todo vértice `w`, exceto a raiz, tem uma **pai**: o **único** vértice `v` tal que `v-w` é um arco



Arborescências no computador

Um arborescência pode ser representada através de um **vetor de pais**: `edgeTo[w]` é o pai de `w`
Se `r` é a raiz, então `edgeTo[r]=r`



vértice	edgeTo
0	0
1	2
2	0
3	0
4	2
5	4

Caminho

Dado o vetor de pais, `edgeTo`, de uma arborescência, é fácil determinar o caminho que leva da raiz a um dado vértice `v`: basta inverter a sequência impressa pelo seguinte fragmento de código:

Caminho

Dado o vetor de pais, edgeTo, de uma arborescência, é fácil determinar o caminho que leva da raiz a um dado vértice v: basta inverter a sequência impressa pelo seguinte fragmento de código:

```
for (int x=v; edgeTo[x]!=x; x=edgeTo[x])
  StdOut.printf("%d-", x);
StdOut.printf("%d", x);
```

DFSpaths: esqueleto

```
public class DFSpaths {
  private final int s;
  private boolean[] marked;
  private int[] edgeTo;
  public DFSpaths(Digraph G, int s) {}
  private void dfs(Digraph G, int v) {}
  public boolean hasPath(int v) {}
  public Iterable<Integer> pathTo(int v)
}
```

DFSpaths: construtor

Encontra um caminho de s a todo vértice alcançável a partir de s.

```
public DFSpaths(Digraph G, int s) {
  marked = new boolean[G.V()];
  edgeTo = new int[G.V()];
  this.s = s;
  dfs(G, s);
}
```

DFSpaths: dfs()

```
private void dfs(Digraph G, int v) {
  marked[v] = true;
  for (int w :  G.adj(v)) {
      if (!marked[w]) {
          edgeTo[w] = v;
          dfs(G, w);
      }
  }
}
```

DFSpaths: pathTo()

Retorna um caminho de s a v ou null se um tal caminho não existe.

```
public Iterable<Integer> pathTo(int v) {
  if (!hasPath(v)) return null;
  Stack<Integer> path =
         new Stack<Integer>();
  for (int x = v; x != s; x = edgeTo[x])
     path.push(x);
  path.push(s);
  return path;
}
```

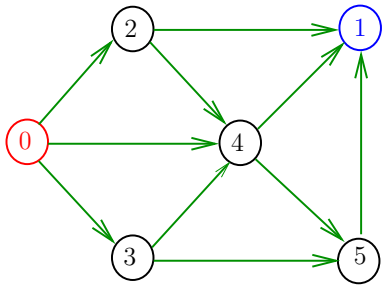
Certificados

Fonte: Free Printable Computer Achievement Award Certificates

Procurando um caminho

Problema: dados um digrafo G e dois vértices s e t decidir se existe um caminho de s a t

Exemplo: para s = 0 e t = 1 a resposta é SIM



Certificados

Como é possível 'verificar' a resposta?

Como é possível 'verificar' que existe caminho?

Como é possível 'verificar' que não existe caminho?

Certificados

Como é possível 'verificar' a resposta?

Como é possível 'verificar' que existe caminho?

Como é possível 'verificar' que não existe caminho?

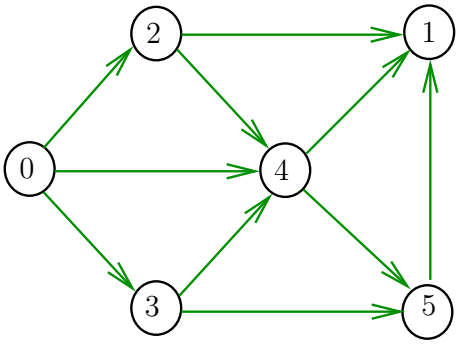
Veremos questões deste tipo freqüentemente

Elas terão um papel **suuupeeer** importante no final de MAC0338 Análise de Algoritmos e em MAC0414 Autômatos, Computabilidade e Complexidade

Elas estão relacionadas com o Teorema da Dualidade visto em MAC0315 Otimização Linear

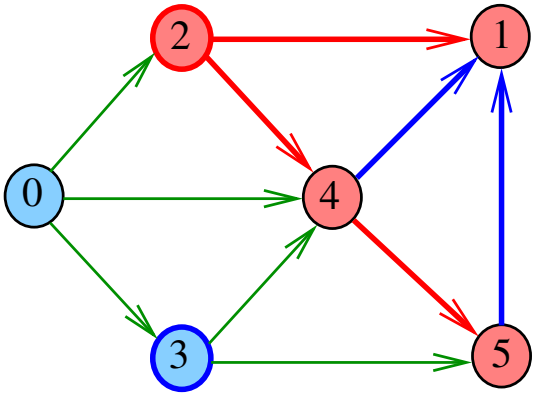
Certificado de inexistência

Como é possível demonstrar que o problema não tem solução?




```
dfs(G,2)
  2-1 dfs(G,1)
  2-4 dfs(G,4)
    4-1
    4-5 dfs(G,5)
      5-1
nao existe caminho
```

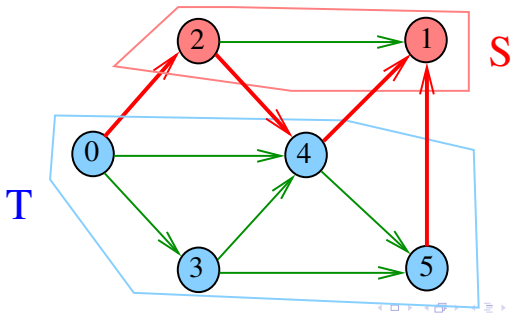
DFSpath(G,2,3)



Cortes (= *cuts*)

Um **corte** é uma bipartição do conjunto de vértices
Um arco **pertence** ou **atravessa** um corte (S, T) se tiver uma ponta em S e outra em T

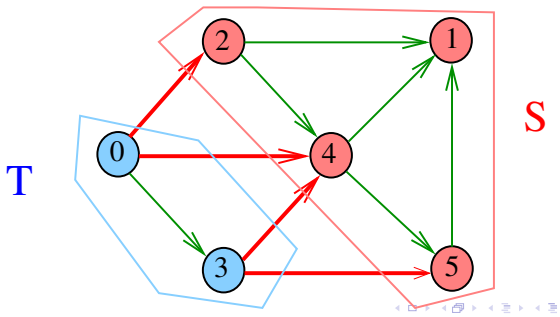
Exemplo 1: arcos em vermelho estão no corte (S, T)



Cortes (= *cuts*)

Um **corte** é uma bipartição do conjunto de vértices
Um arco **pertence** ou **atravessa** um corte (S, T) se tiver uma ponta em S e outra em T

Exemplo 2: arcos em vermelho estão no corte (S, T)

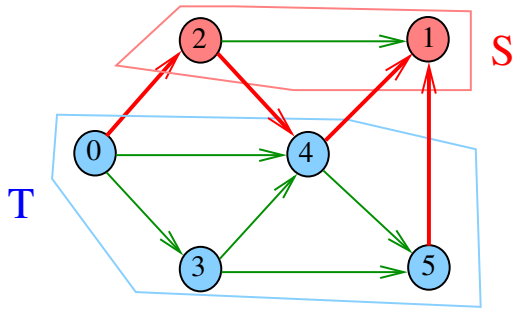


st-Cortes (= st-*cuts*)

Um corte (S, T) é um **st-corte** se

s está em S e t está em T

Exemplo: (S, T) é um 1-3-corte um 2-5-corte ...



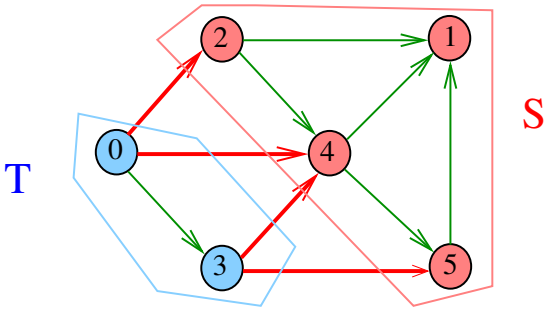
Certificado de inexistência

Para demonstrarmos que **não existe** um caminho de s a t basta exibirmos um st-corte (S, T) em que

todo arco *no corte tem ponta inicial em T e ponta final em S*

Certificado de inexistência

Exemplo: certificado de que não há caminho de 2 a 3



Conclusão

Para quaisquer vértices s e t de um digrafo, vale uma e apenas umas das seguintes afirmações:

- existe um caminho de s a t
- existe st-corte (S, T) em que todo arco no corte tem ponta inicial em T e ponta final em S.

Fonte: Yin and yang (Wikipedia)

E DFSpaths com isso?

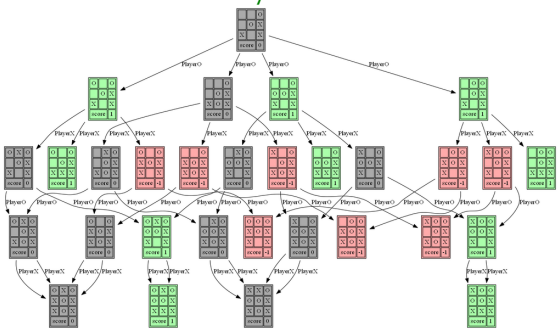
No código da classe DFSpaths se existe um caminho de s a t ele esta representado no vetor edgeTo[].

No código da classe DFSpaths se não existe um caminho de s a t um st-corte separando s de t está representado no vetor marked[].

Em ambos os casos podemos fazer um trecho de código que verifica a resposta em tempo proporcional a $V + E$.

Anatomia de busca em profundidade

Classificação dos arcos



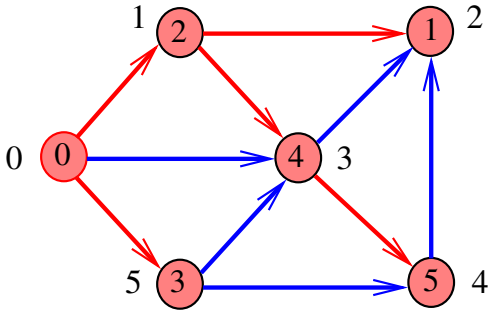
Fonte: `Using Minimax (with the full game tree) to implement the machine players ...`

Referências: CLRS 22

Arcos da arborescência

Arcos da arborescência são os arcos `v-w` que `dfsR` percorre para visitar `w` pela primeira vez Exemplo:

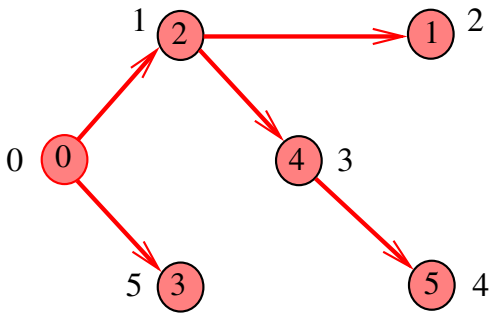
arcos em vermelho são arcos da arborescência



Arcos da arborescência

Arcos da arborescência são os arcos `v-w` que `dfsR` percorre para visitar `w` pela primeira vez Exemplo:

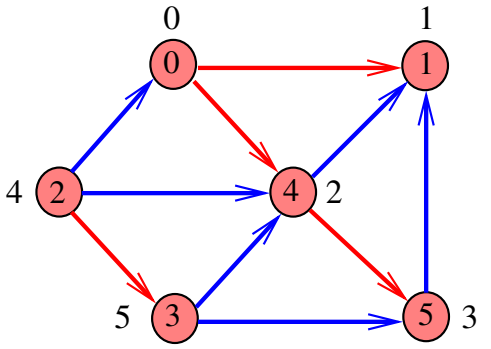
arcos em vermelho são arcos da arborescência



Floresta DFS

Conjunto de arborescências é a **floresta da busca em profundidade** (= *DFS forest*)

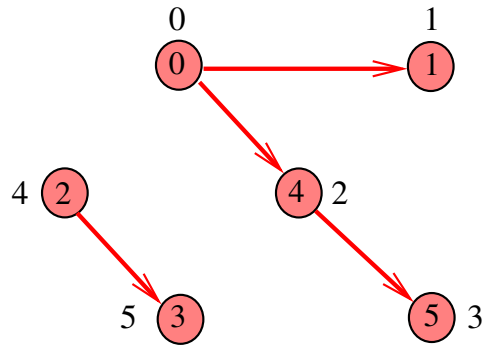
Exemplo: arcos em vermelho formam a floresta DFS



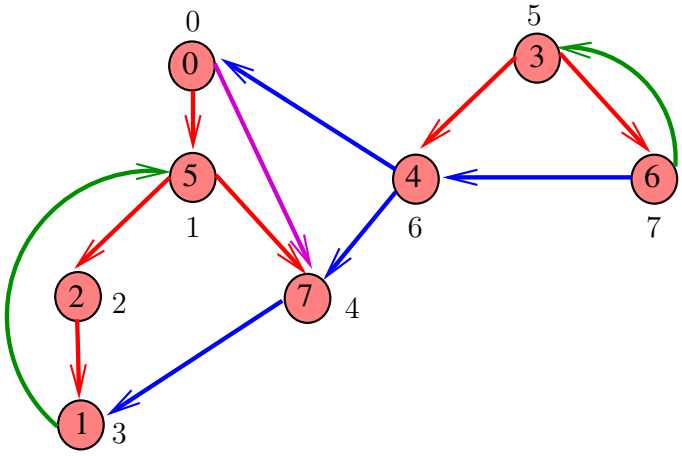
Floresta DFS

Conjunto de arborescências é a **floresta da busca em profundidade** (= *DFS forest*)

Exemplo: arcos em vermelho formam a floresta DFS

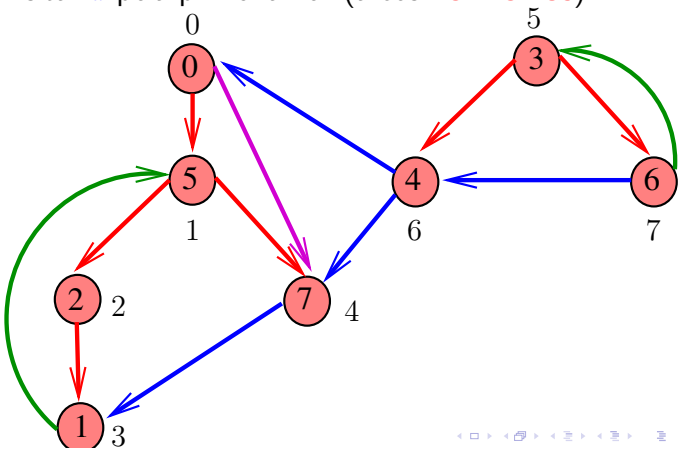


Classificação dos arcos



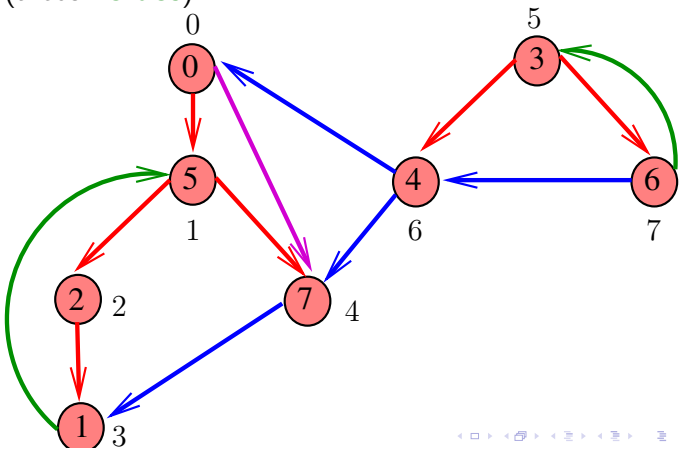
Arcos de arborescência

v-w é **arco de arborescência** se foi usado para visitar w pela primeira vez (arcos **vermelhos**)



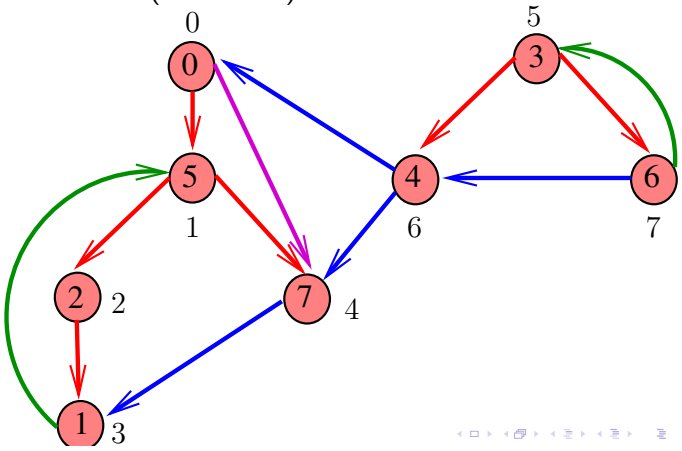
Arcos de retorno

v-w é **arco de retorno** se w é ancestral de v (arcos **verdes**)



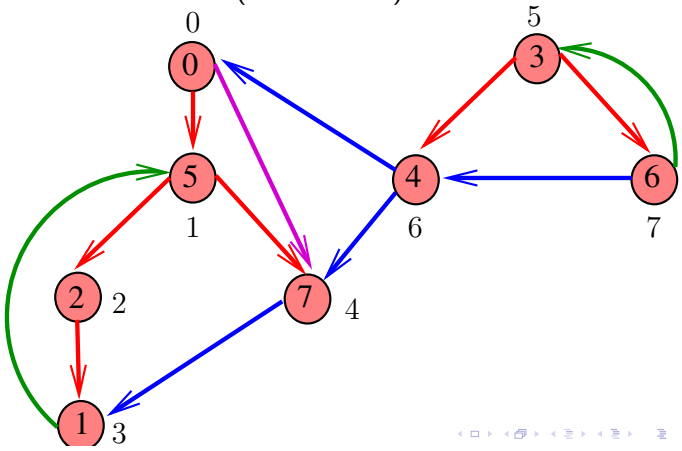
Arcos descendentes

v-w é **descendente** se w é descendente de v, mas não é filho (arco **roxo**)



Arcos cruzados

v-w é **arco cruzado** se w não é ancestral nem descendente de v (arcos **azuis**)



Busca DFSanatomia (CLRS)

Vamos supor que nossos digrafos têm no máximo maxV vértices

```
private int time;
private int[] d = new int[G.V()];
private int[] f = new int[G.V()];
```

DFSanatomia visita todos os vértices e arcos do digrafo G.
A função registra em d[v] o 'momento' em que v foi descoberto e em f[v] o momento em que ele foi completamente examinado

DFSanatomia: esqueleto

```
public class DFSanatomia {
  private boolean[] marked;
  private int[] edgeTo;
  private int time;
  private int[] d; // discovered
  private int[] f; // finished
  private Queue<Integer> pre; pré-ordem
  private Queue<Integer> pos; pós-ordem
  // pós-ordem reversa
  private Stack<Integer> revPos;
```

DFSanatomia: esqueleto

```
  // métodos
  public DFSanatomia(Graph G) {...}
  private void dfs(Digraph G, int v){...}
  public Iterable<Integer> pre() {...}
  public Iterable<Integer> pos() {...}
  public Iterable<Integer> revPos() {...}
}
```

DFSanatomia: construtor

```
public DFSanatomia(Graph G) {
  marked = new boolean[G.V()];
  edgeTo = new int[G.V()];
  d = new int[G.V()];
  f = new int[G.V()];
  pre = new Queue<Integer>;
  pos = new Queue<Integer>;
  for (int v = 0; v < G.V(); v++)
      if (!marked(v)) {
          dfs(G,v);
      }
}
```

DFSanatomia: dfs()

```
private void dfs(Digraph G, int v) {
  marked[v] = true;
  d[v] = time++; // descoberto
  pre.enqueue(v); // pré-ordem
  for (int w :  G.adj[v]) {
      if (!marked(w)) {
          edgeTo[w] = v;
          dfs(G, w);
      }
  pos.enqueue(v); // pós-ordem
  revPos.push(v); // pós-ordem reversa
  f[v] = time++; // terminamos
  }
}
```

DFSanatomia: pre(), pos() e revPos()

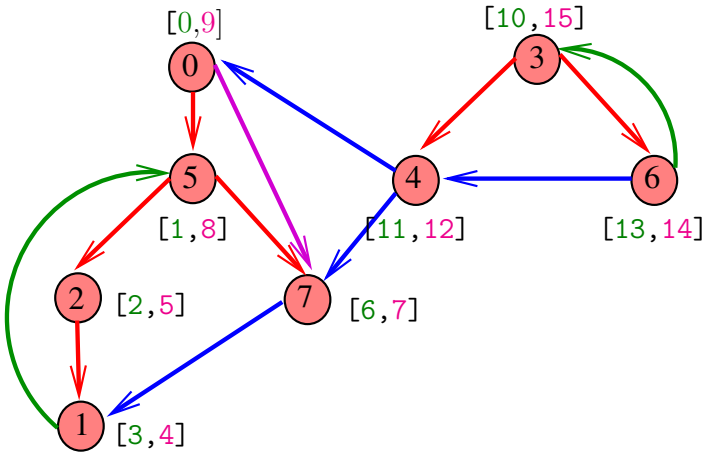
```
public Iterable<Integer> pre() {
  return pre;
}
public Iterable<Integer> pos() {
  return pos;
}
public Iterable<Integer> revPos() {
  return revPos;
}
```

Consumo de tempo

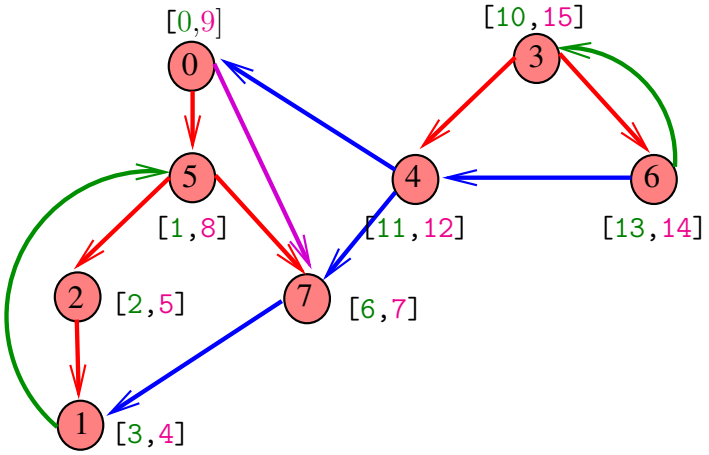
A classe DFSanatomia, para vetor de listas de adjacência, consome tempo $O(V + E)$.

A classe DFSanatomia, para matriz de adjacências, consome tempo $O(V^2)$.

Busca DFS (CLRS)

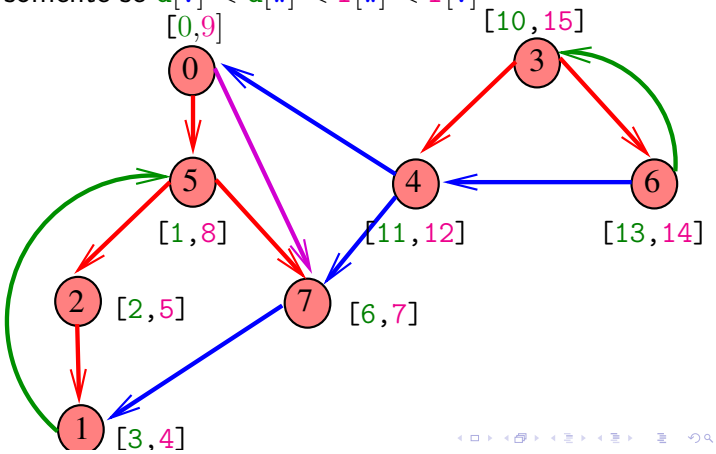


Classificação dos arcos



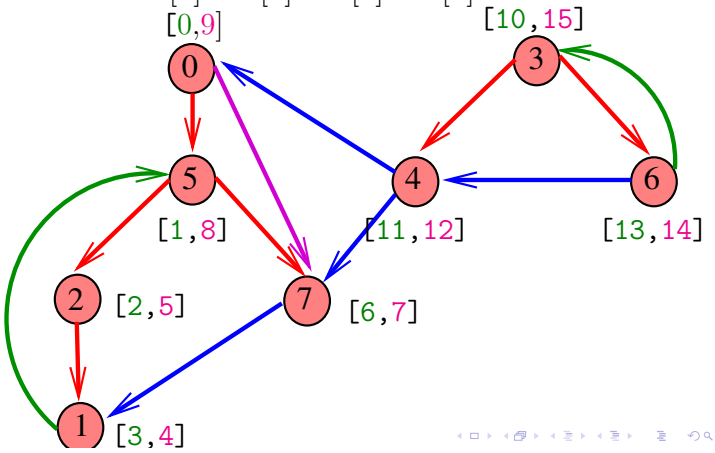
Arcos de arborescência ou descendentes

v-w é **arco de arborescência** ou **descendente** se e somente se $d[v] < d[w] < f[w] < f[v]$



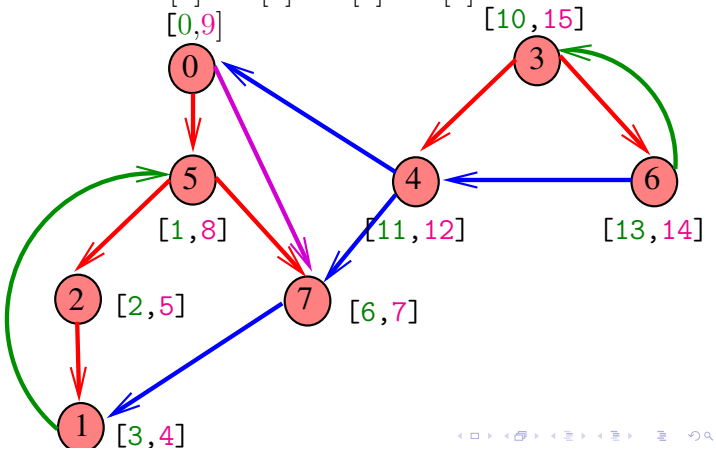
Arcos de retorno

v-w é **arco de retorno** se e somente se $d[w] < d[v] < f[v] < f[w]$



Arcos cruzados

v-w é arco **cruzado** se e somente se $d[w] < f[w] < d[v] < f[v]$

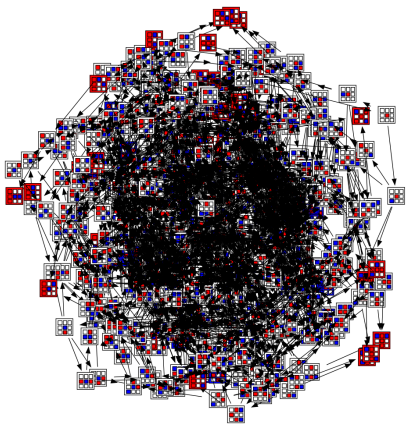


Conclusões

v-w é:

- **arco de arborescência** se e somente se $d[v] < d[w] < f[w] < f[v]$ e edgeTo[w] = v;
- **arco descendente** se e somente se $d[v] < d[w] < f[w] < f[v]$ e edgeTo[w] $\neq$ v;
- **arco de retorno** se e somente se $d[w] < d[v] < f[v] < f[w]$;
- **arco cruzado** se e somente se $d[w] < f[w] < d[v] < f[v]$;

Ciclos em digrafos

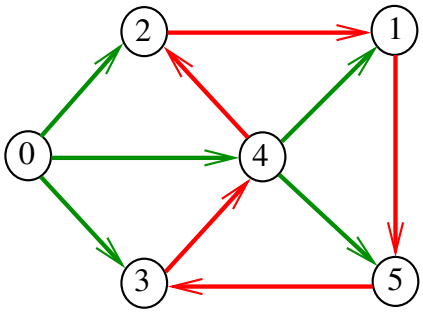


Fonte: laying out a large graph with graphviz

Ciclos

Um **ciclo** num digrafo é qualquer sequência da forma v_0–v_1–v_2–...–v_{k-1}–v_p, onde v_{k-1}-v_k é um arco para $k = 1, \ldots, p$ e $v_0 = v_p$.

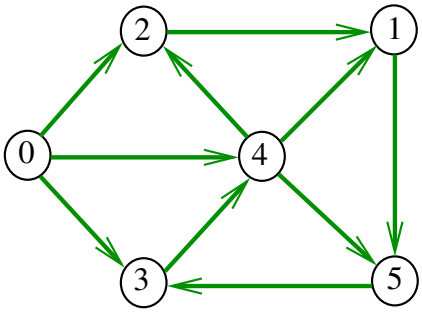
Exemplo: 2-1-5-3-4-2 é um ciclo



Procurando um ciclo

Problema: decidir se dado digrafo G possui um ciclo

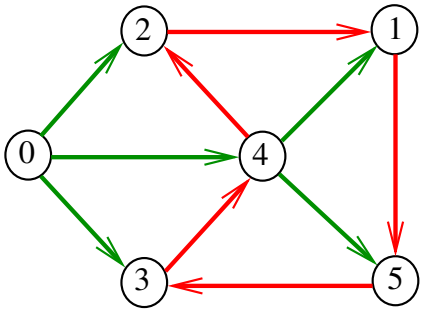
Exemplo: para o grafo a seguir a resposta é **SIM**



Procurando um ciclo

Problema: decidir se dado digrafo G possui um ciclo

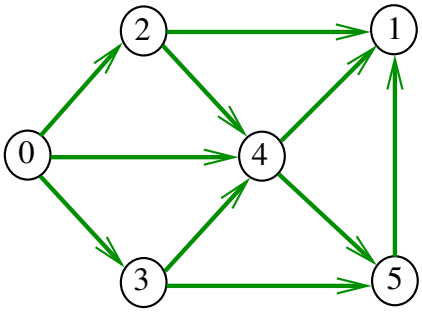
Exemplo: para o grafo a seguir a resposta é **SIM**



Procurando um ciclo

Problema: decidir se dado digrafo G possui um ciclo

Exemplo: para o grafo a seguir a resposta é **NÃO**



DirectedCycle café com leite

Recebe um digrafo G e decide se existe um ciclo.

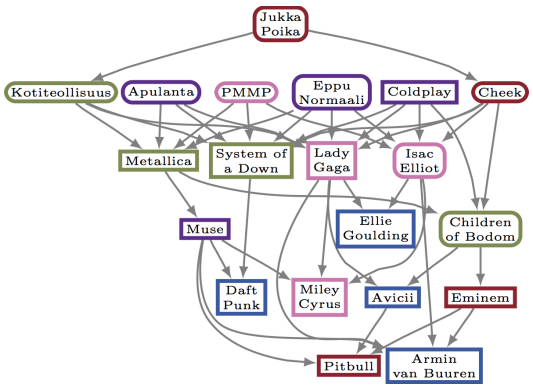
Para cada arco u–v podemos fazer

```
DFSpaths dfs = new DFSpaths(G, v);
```

e verificar se `dfs.hasPath(u)`

O consumo de tempo para vetor de listas de adjacência é $O(E\ (V + E))$.

Digrafos acíclicos (DAGs)

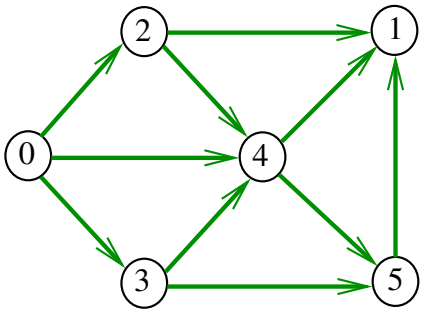


Fonte: Comparing directed acyclic graphs

DAGs

Um digrafo é **acíclico** se não tem ciclos
Digrafos acíclicos também são conhecidos como DAGs (= *directed acyclic graphs*)

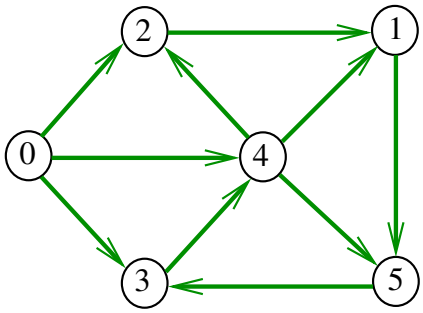
Exemplo: um digrafo acíclico



DAGs

Um digrafo é **acíclico** se não tem ciclos
Digrafos acíclicos também são conhecidos como DAGs (= *directed acyclic graphs*)

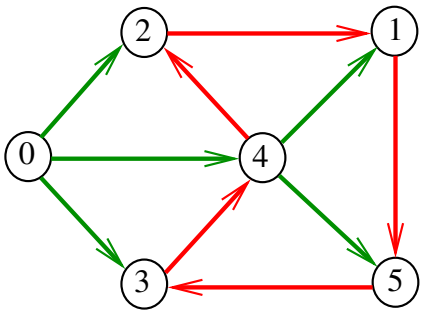
Exemplo: um digrafo que **não** é acíclico



DAGs

Um digrafo é **acíclico** se não tem ciclos
Digrafos acíclicos também são conhecidos como DAGs (= *directed acyclic graphs*)

Exemplo: um digrafo que **não** é acíclico



Ordenaçao topológica

Uma **permutação** dos vértices de um digrafo é uma seqüência em que cada vértice aparece uma e uma só vez

Uma **ordenação topológica** (= *topological sorting*) de um digrafo é uma permutação

`ts[0], ts[1],..., ts[V-1]`

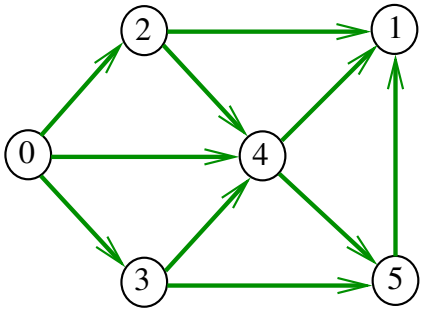
dos seus vértices tal que todo arco tem a forma

`ts[i]-ts[j]` com `i < j`

`ts[0]` é necessariamente uma **fonte**
`ts[V-1]` é necessariamente um **sorvedouro**

Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



DAGs versus ordenação topológica

É evidente que digrafos com ciclos **não** admitem ordenação topológica.

É menos evidente que **todo** DAG admite ordenação topológica.

A prova desse fato é um algoritmo que recebe qualquer digrafo e devolve

- um ciclo;
- uma ordenação topológica do digrafo.

Algoritmos de ordenação topológica

Algoritmo de eliminação de fontes

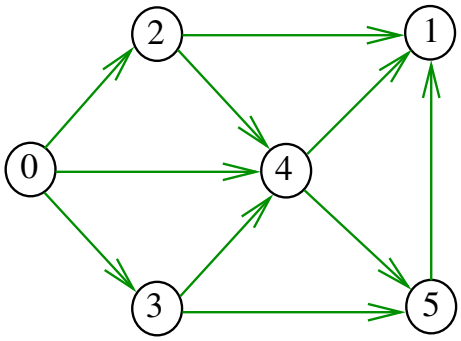
Armazena em `ts[0..i-1]` uma permutação de um subconjunto do conjunto de vértices de `G` e devolve o valor de `i`

Se `i` $=$ `G->V` então `ts[0..i-1]` é uma ordenação topológica de `G`.
Caso contrário, `G` **não** é um DAG

```
int DAGts1 (Digraph G, Vertex ts[]);
```

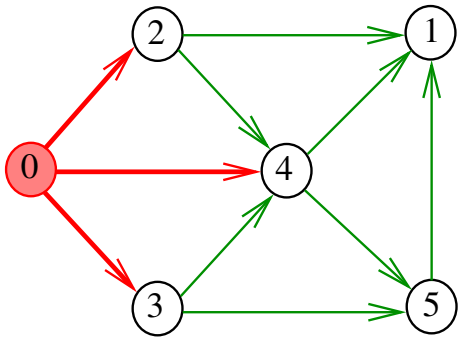
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						



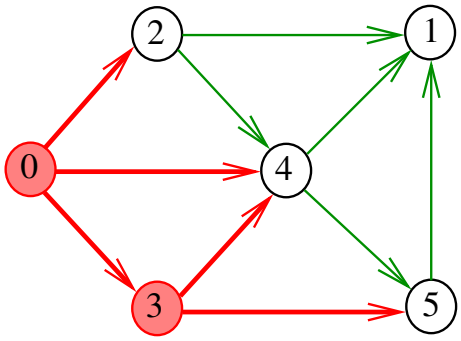
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0					



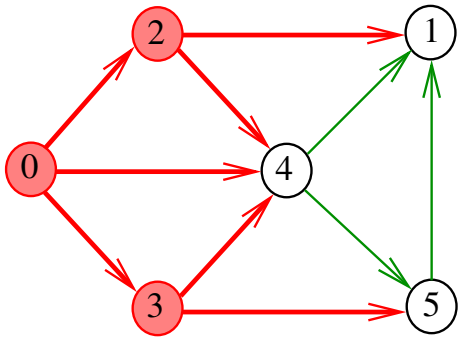
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3				



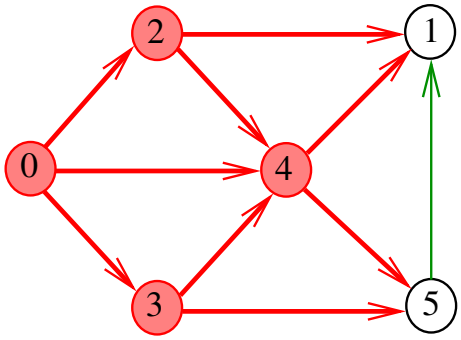
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2			



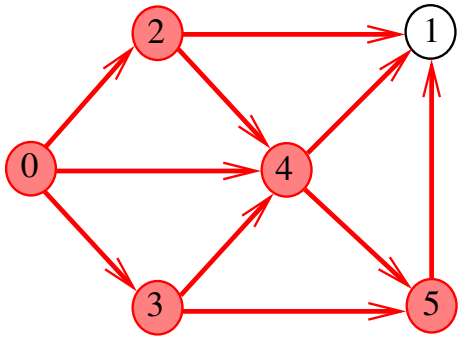
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4		



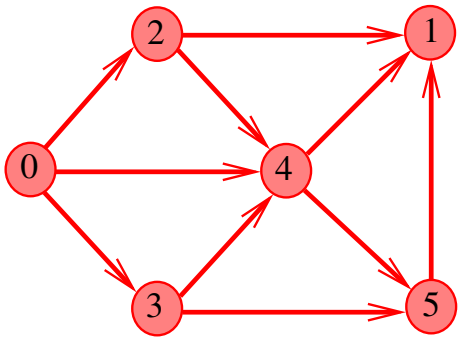
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	



Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



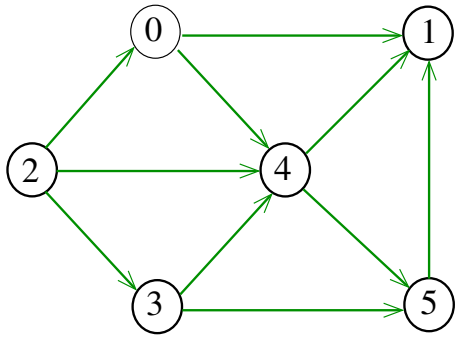
Consumo de tempo

O consumo de tempo desse algoritmo para vetor de listas de adjacência é $O(V + E)$.

O consumo de tempo desse algoritmo para matriz de adjacências é $O(V^2)$.

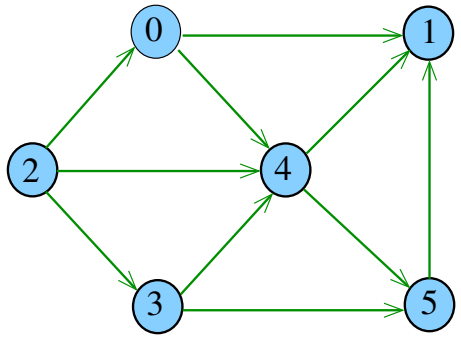
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						



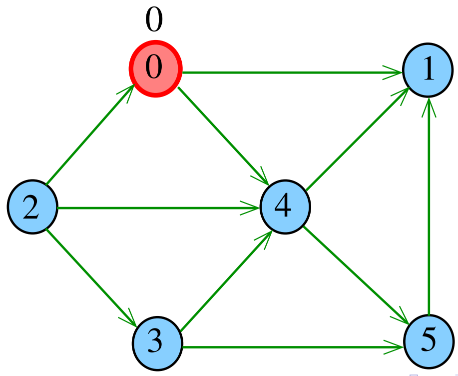
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						



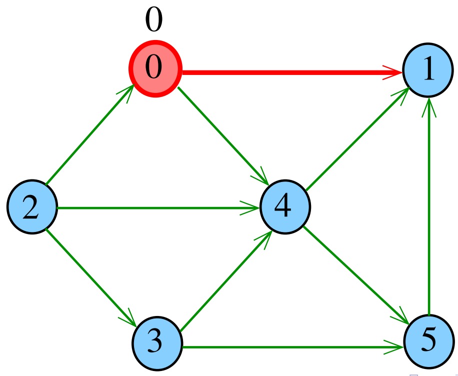
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						



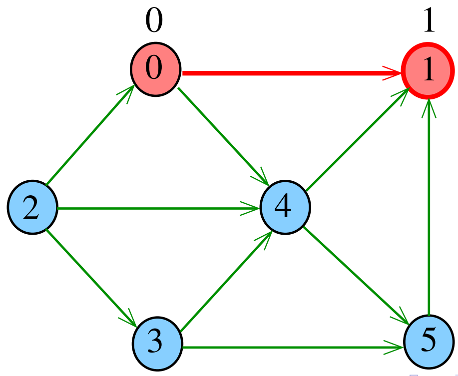
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						



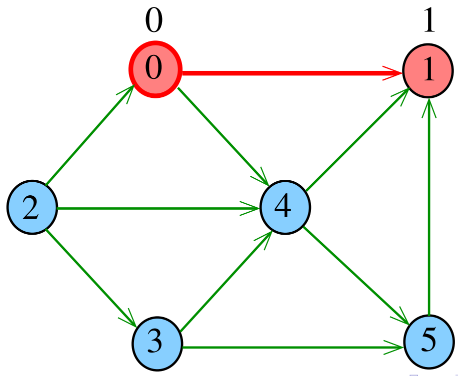
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						



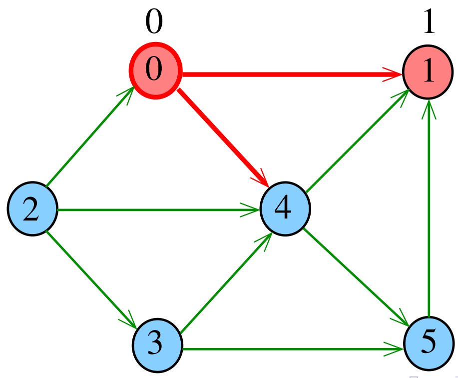
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



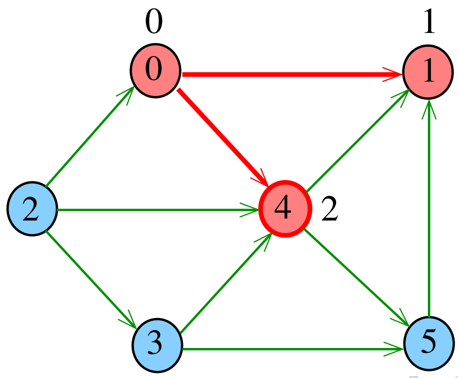
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



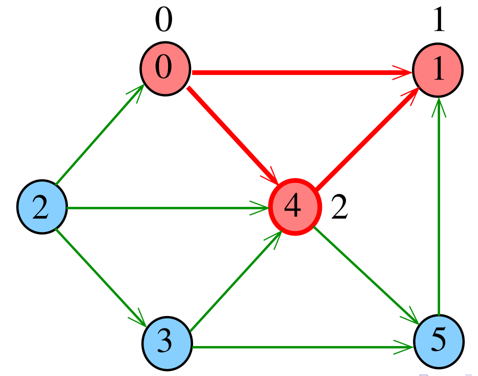
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



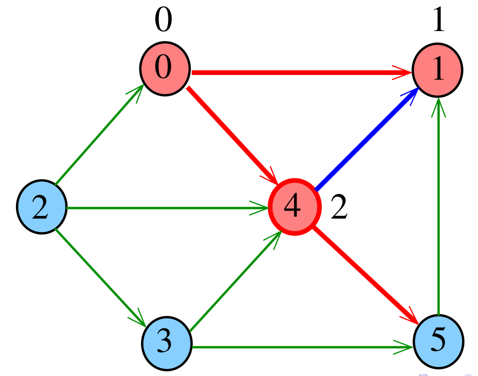
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



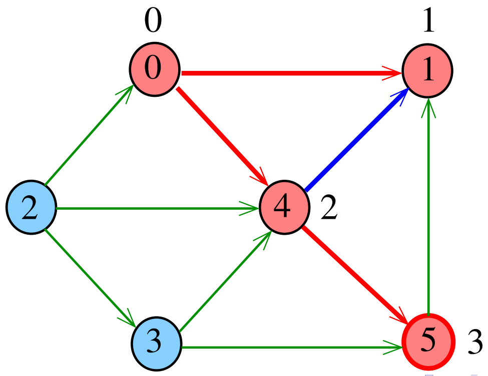
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



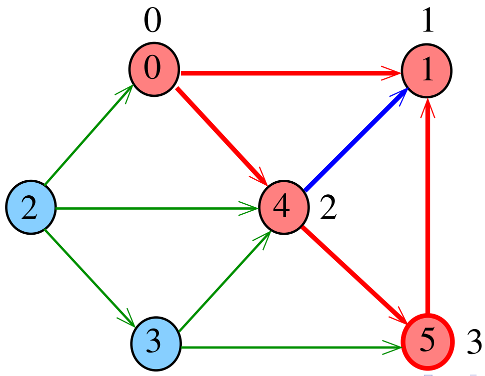
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



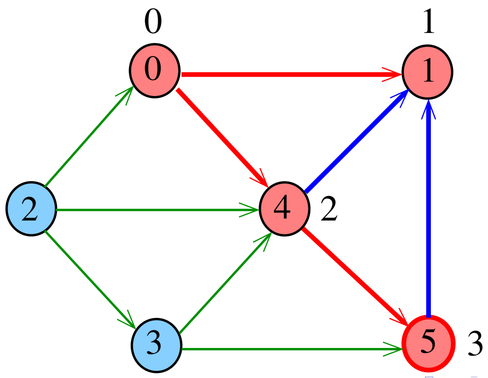
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



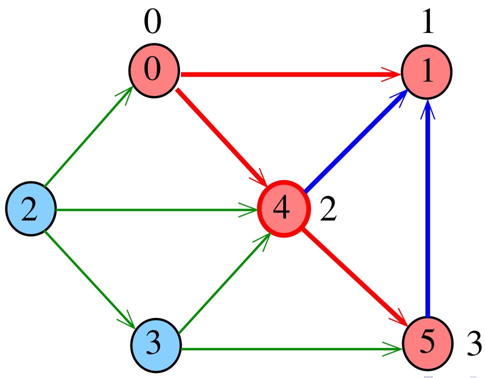
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



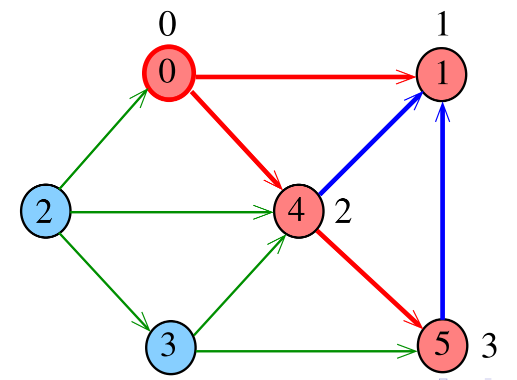
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]					5	1



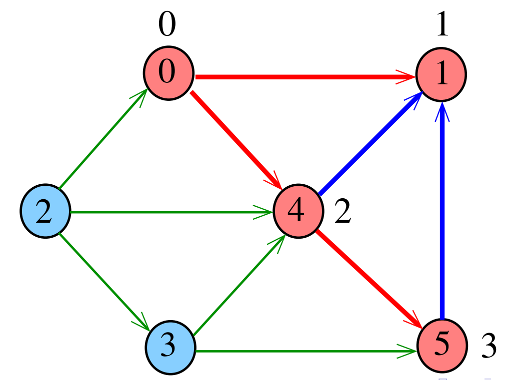
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]				4	5	1



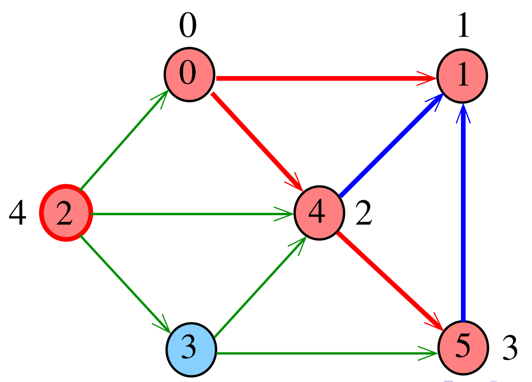
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



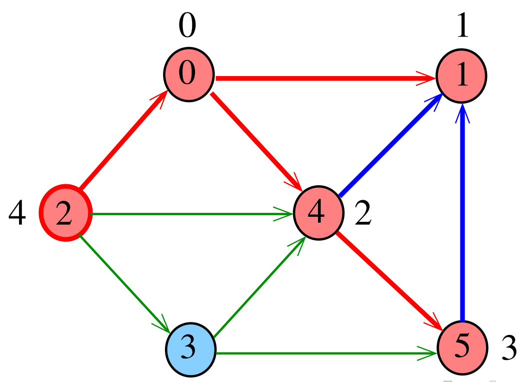
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



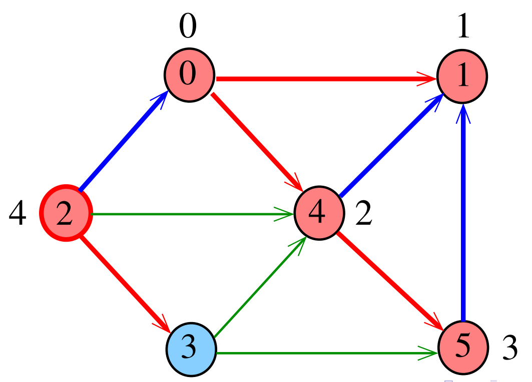
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



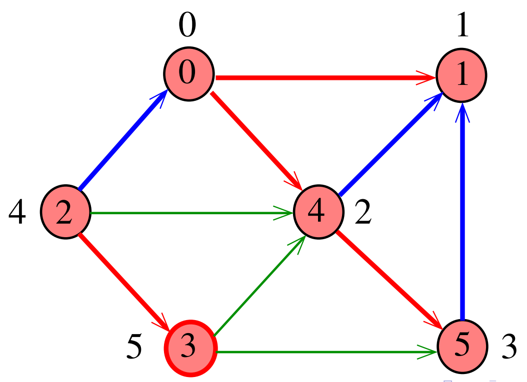
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



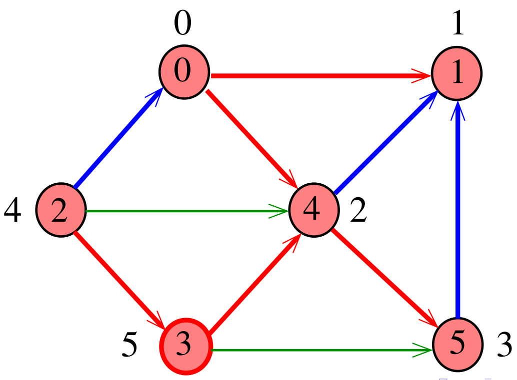
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



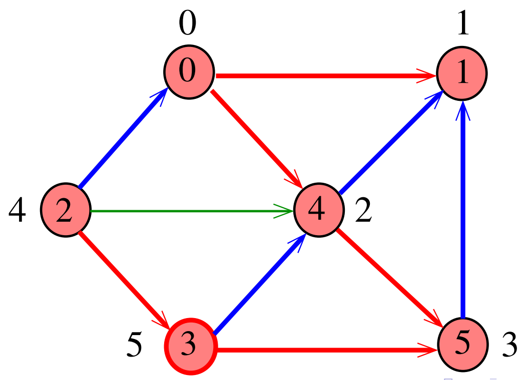
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



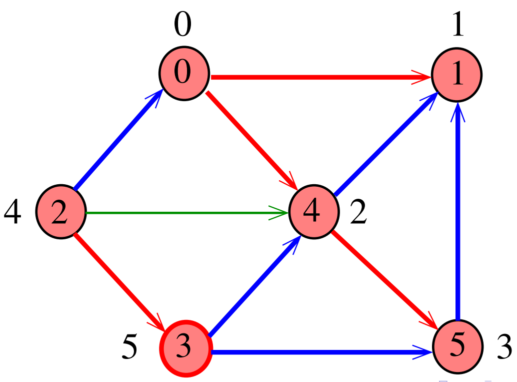
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



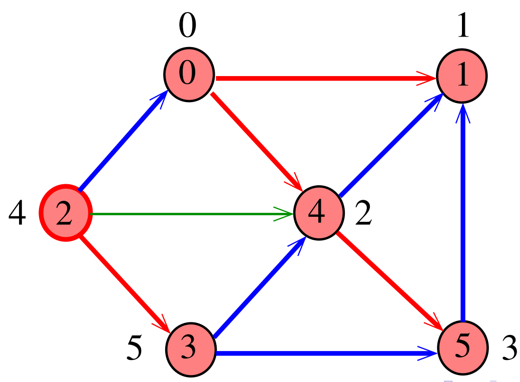
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



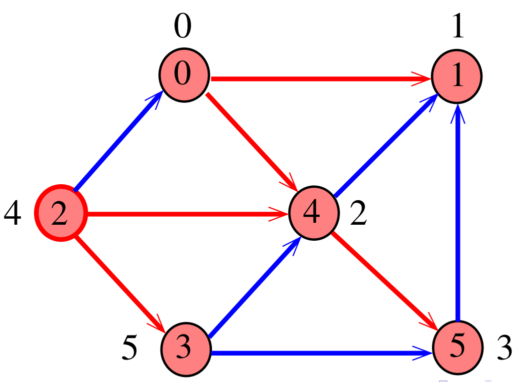
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]		3	0	4	5	1



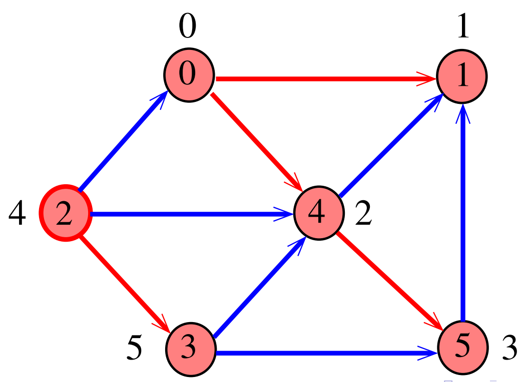
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]		3	0	4	5	1



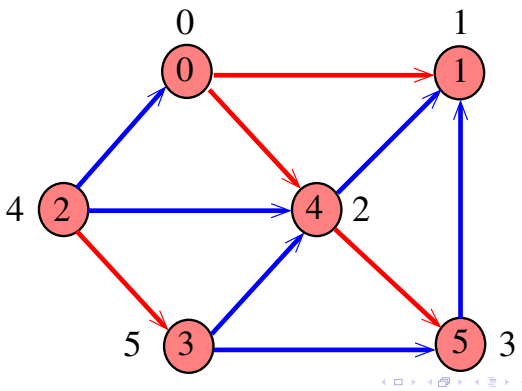
Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]		3	0	4	5	1



Algoritmo DFS

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	2	3	0	4	5	1



Classe DFStopological

A classe DFStopological decide se um dado digrafo G é um DAG.

```
private Stack<Integer> ts
private Stack<Integer> cycle;
private boolean[] onPath;
```

Se G é um DAG uma ordenação topológica de seus vértices é armazenada em ts.

Se G não é um DAG, cycle armazenará um ciclo de G.

onPath[v] é true se o vértice v está no *caminho ativo*.

DFStopological: esqueleto

```
public class DFStopological {
  private boolean[] marked;
  private int[] edgeTo;
  private boolean[] onPath;
  private Stack<Integer> ts;
  private Stack<Integer> cycle;
  private int onCycle= -1;
  public DFStopological(Graph G) {...}
  private void dfs(Digraph G, int v){...}
  public boolean isDag() {...}
  public boolean hasCycle() {...}
  public Iterable<Integer> order() {...}
  public Iterable<Integer> cycle() {...}
}
```

DFStopological: construtor

Determina se um digrafo G é acíclico, e portanto seu vértices tem uma ordem topológica, ou tem um ciclo.

```
public DFStopological(Graph G) {
  marked = new boolean[G.V()];
  edgeTo = new int[G.V()];
  ts = new Stack<Integer>();
  onPath = new boolean[G.V()];
  for (int v = 0; v < G.V(); v++)
     if (!marked[v] && onCycle == -1) {
        dfs(G,v);
     }
}
```

DFStopological: dfs()

```
private void dfs(Digraph G, int v) {
  marked[v] = true; onPath[v] = true;
  for (int w :  G.adj(v)) {
     if (onCycle!= -1) return;
     if (!marked[w]) {
        edgeTo[w] = v;
        dfs(G, w);
     } else if (onPath[w]) {
        onCycle = v;
        edgeTo[v] = w; // fecha o ciclo
     }
  }
  onPath[v] = false; ts.push(v);
}
```

DFStopological: hasCycle(), isDag()

```
// G contém um ciclo ?
public boolean hasCycle() {
  return onCycle != -1;
}

// G é um DAG ?
public boolean isDag() {
  return onCycle == -1;
}
```

DFStopological: cycle()

Retorna um ciclo como iterável se G possui um ciclo ou null em caso contrário.

```
public Iterable<Integer> cycle() {
  if (onCycle == -1) return null;
  if (cycle != null) return cycle;
  cycle = new Stack<Integer>();
  for (int x=edgeTo[onCycle]; x!=onCycle;
            x = edgeTo[x]) {
     cycle.push(x);
  }
  cycle.push(onCycle);
  return cycle;
}
```

DFStopological: order()

Retorna uma ordem topológica dos vértices de Gcomo iterável, se G é um DAG.

```
public Iterable<Integer> order() {
  if (onCycle != -1) return null;
  return ts;
}
```

Consumo de tempo

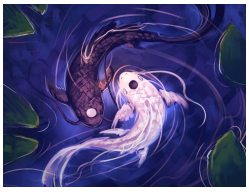
O consumo de tempo da função DFStopological para vetor de listas de adjacência é $O(V + E)$.

A classe DFStopological, para matriz de adjacências, consome tempo $O(V^2)$.

Conclusão

Para digrafo G, vale uma e apenas umas das seguintes afirmações:

- G possui um ciclo
- G é um DAG e, portanto, admite uma ordenação topológica



Fonte: Avatar: The Last Airbender