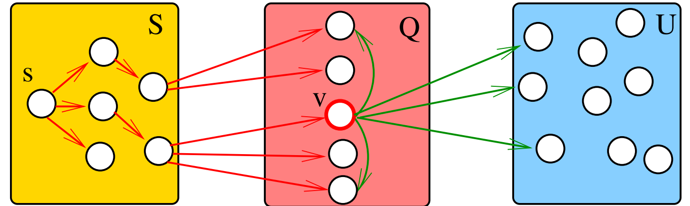
## Compacto dos melhores momentos

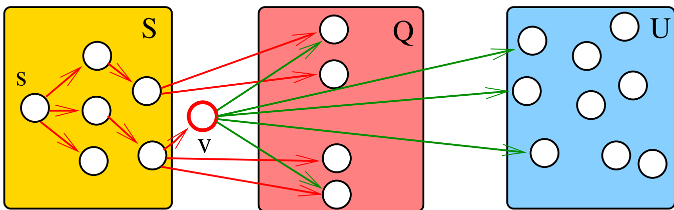
# AULA 22

## Dijkstra: iteração

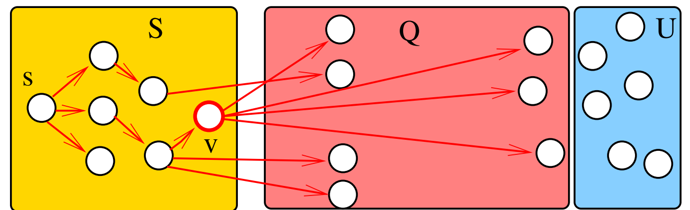





## Dijkstra: iteração

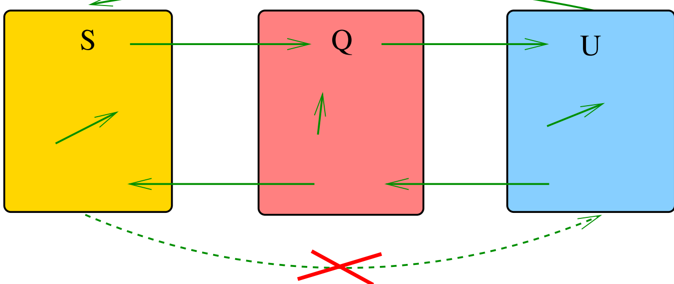



## Dijkstra: iteração




## Dijkstra: relações invariantes

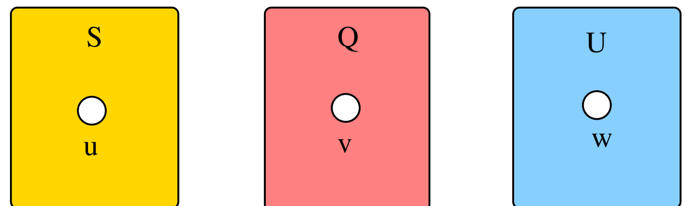
S = vértices examinados
Q = vértices visitados = vértices na fila
U = vértices ainda não visitados
(i0) não existe arco v-w com v em S e w em U




## Dijkstra: relações invariantes

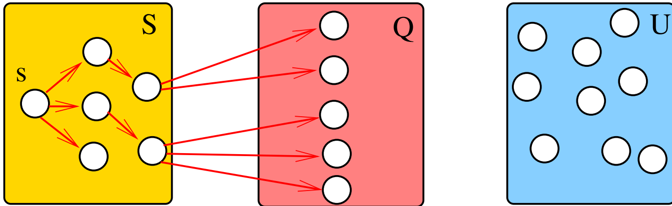
(i1) para cada u em S, v em Q e w em U

distTo[u] $\leq$ distTo[v] $\leq$ distTo[w]



## Dijkstra: relações invariantes

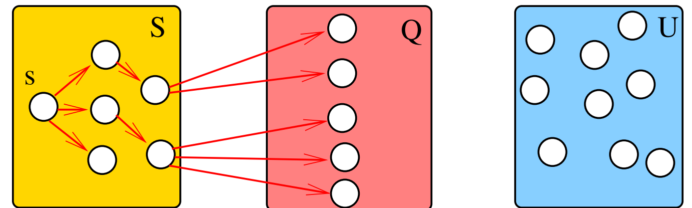
(i2) O vetor edgeTo restrito aos vértices de S e Q determina um árborescência com raiz s




## Dijkstra: relações invariantes

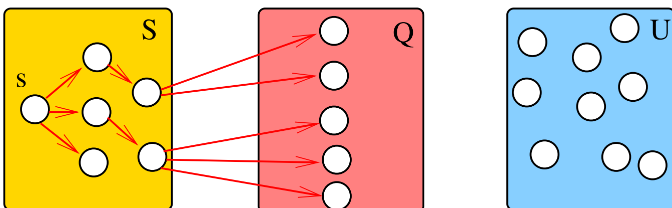
(i3) Para arco v-w na arborescência vale que

$$\text{distTo}[w] = \text{distTo}[v] + \text{custo do arco } vw$$




## Dijkstra: relações invariantes

(i3) Para cada vértice v em S vale que distTo[v] é o custo de um caminho mínimo de s a v.




## Consumo de tempo

O consumo de tempo da função dijkstra é $O(V + E)$ mais o consumo de tempo de

| | | |
|---|---|---|
| $= 1$ | execução de | IndexMinPQ<Double>, |
| $\leq V$ | execuções de | insert(), |
| $\leq V$ | execuções de | isEmpty(), |
| $\leq V$ | execuções de | delMin(), e |
| $\leq E$ | execuções de | contains(), |
| $\leq E$ | execuções de | decreaseKey(). |

## Consumo de tempo Min-Heap

| | |
|---|---|
| IndexMinPQ | $\Theta(V)$ |
| isEmpty | $\Theta(1)$ |
| insert | $\Theta(\lg V)$ |
| delMin | $O(\lg V)$ |
| decreaseKey | $\Theta(\lg V)$ |
| contains | $\Theta(1)$ |

## Conclusão

O consumo de Dijkstra é $O(E \lg V)$.

Para **grafos densos** podemos alcançar consumo de tempo ótimo ... detalhes **MAC0328** Algoritmos em Grafos.

## Consumo de tempo Min-Heap

| | heap | $d$-heap | fibonacci heap |
|---|---|---|---|
| insert | $O(\lg V)$ | $O(\log_D V)$ | $O(1)$ |
| delMin | $O(\lg V)$ | $O(\log_D V)$ | $O(\lg V)$ |
| decreaseKey | $O(\lg V)$ | $O(\log_D V)$ | $O(1)$ |
| Dijkstra | $O(E \lg V)$ | $O(E \log_D V)$ | $O(E + V \lg V)$ |

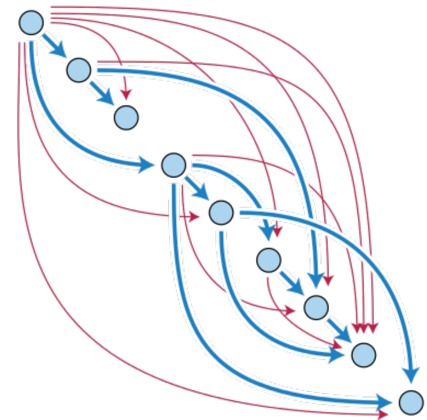
## Consumo de tempo Min-heap

| | bucket heap | radix heap |
|---|---|---|
| insert | $O(1)$ | $O(\lg(VC)$R |
| delMin | $O(C)$ | $O(\lg(VC))$ |
| decreaseKey | $O(1)$ | $O(E + V \lg(VC))$ |
| Dijkstra | $O(E + VC)$ | $O(E + V \lg(VC))$ |

$C =$ maior custo de um arco.

# AULA 24

## Caminhos mínimos em DAGs

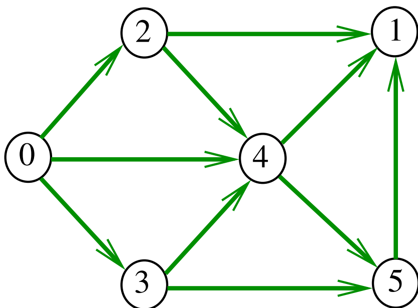


Fonte: Directed acyclic graph

## DAGs

Um digrafo é **acíclico** se não tem ciclos
Digrafos acíclicos também são conhecidos como DAGs (= *directed acyclic graphs*)

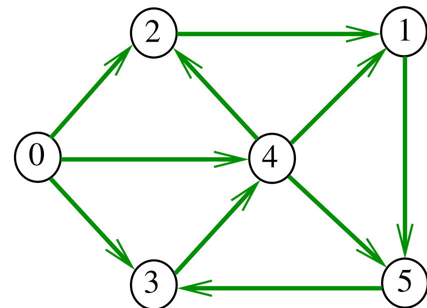
Exemplo: um digrafo acíclico




## DAGs

Um digrafo é **acíclico** se não tem ciclos
Digrafos acíclicos também são conhecidos como DAGs (= *directed acyclic graphs*)

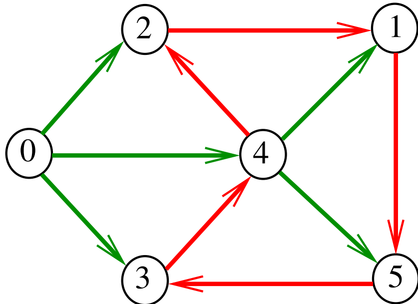
Exemplo: um digrafo que **não** é acíclico



## DAGs

Um digrafo é **acíclico** se não tem ciclos
Digrafos acíclicos também são conhecidos como DAGs (= *directed acyclic graphs*)

Exemplo: um digrafo que **não** é acíclico




## Ordenaçao topológica

Uma **permutação** dos vértices de um digrafo é uma seqüência em que cada vértice aparece uma e uma só vez

Uma **ordenação topológica** (= *topological sorting*) de um digrafo é uma permutação

`ts[0], ts[1], ..., ts[V-1]`

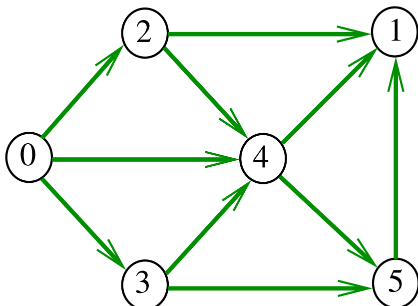
dos seus vértices tal que todo arco tem a forma

`ts[i]-ts[j]` com `i < j`

`ts[0]` é necessariamente uma **fonte**
`ts[V-1]` é necessariamente um **sorvedouro**

## Exemplo

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |




## Fato

Para todo digrafo `G`, vale uma e apenas umas das seguintes afirmações:

- `G` possui um ciclo
- `G` é um DAG e, portanto, admite uma ordenação topológica

Fonte: `Well-Known Powerful Yin Yang Symbol Dates Back To Ancient China`

## Problema

Problema:

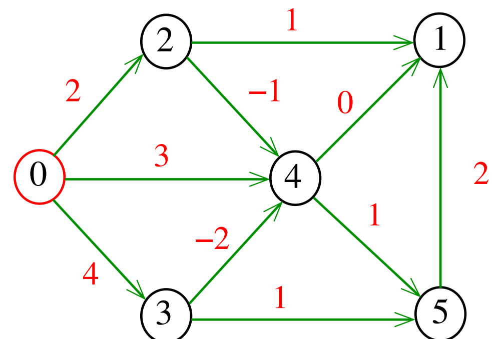
*Dado um vértice s de um DAG com custos **possivelmente negativos** nos arcos, encontrar, para cada vértice t que pode ser alcançado a partir de s, um caminho simples mínimo de s a t*

Problema:

*Dado um vértice s de um DAG com custos **possivelmente negativos** nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s*

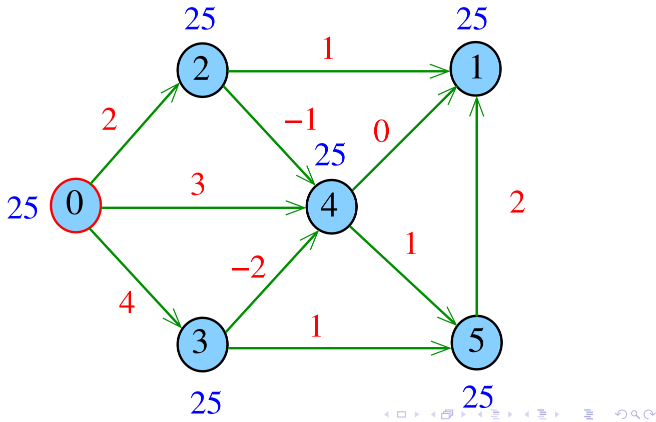
## Simulação

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |



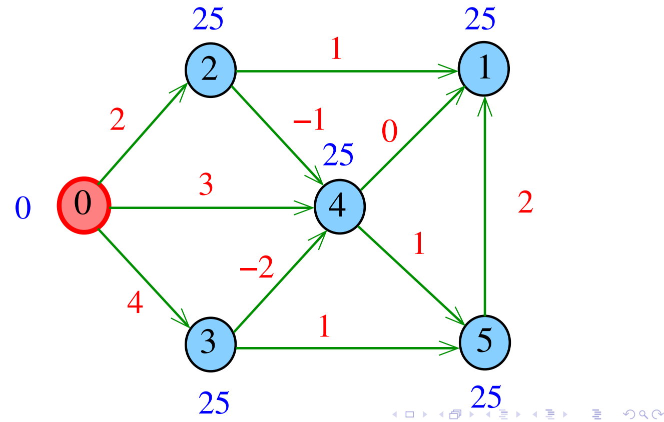
## Simulação

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |



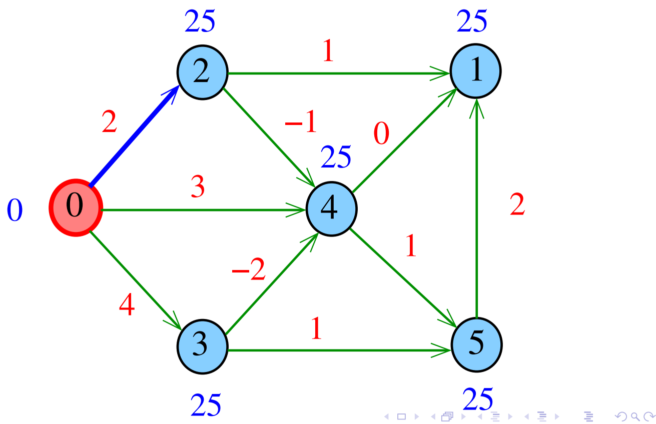

## Simulação

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |



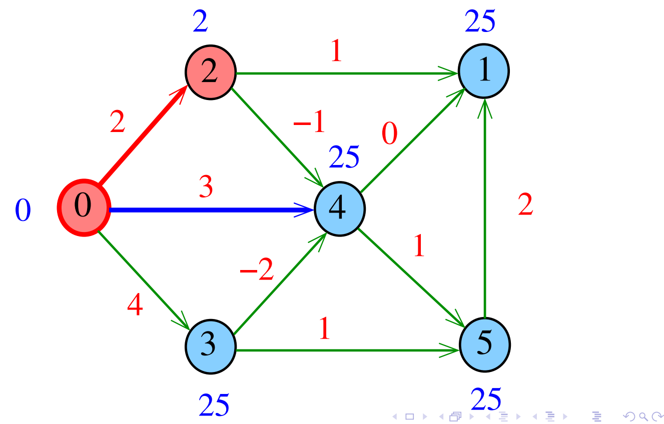

## Simulação

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |



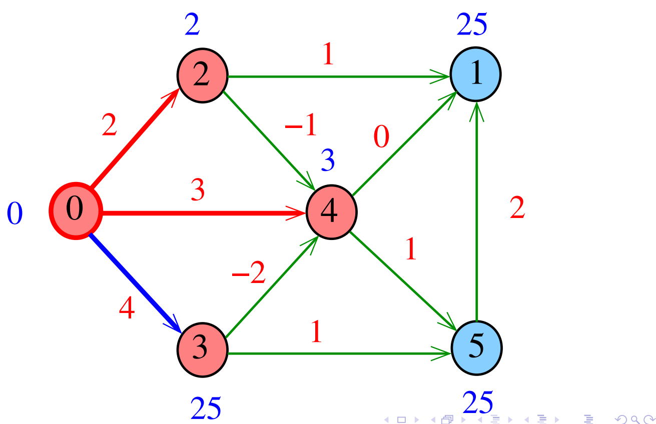

## Simulação

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |



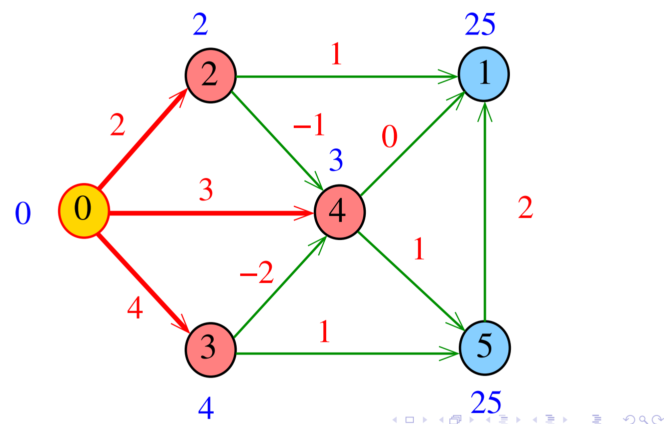

## Simulação

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |



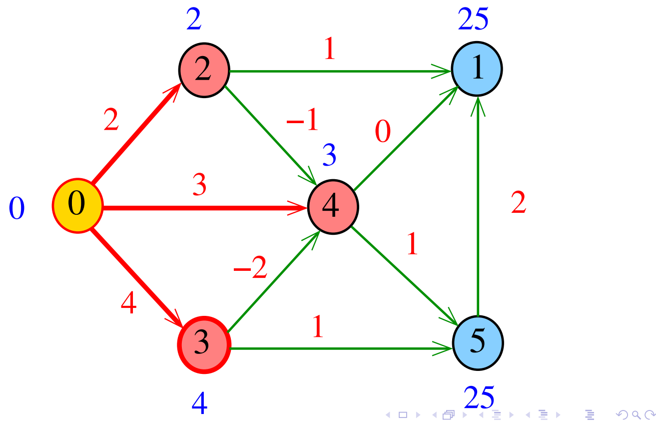

## Simulação

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |



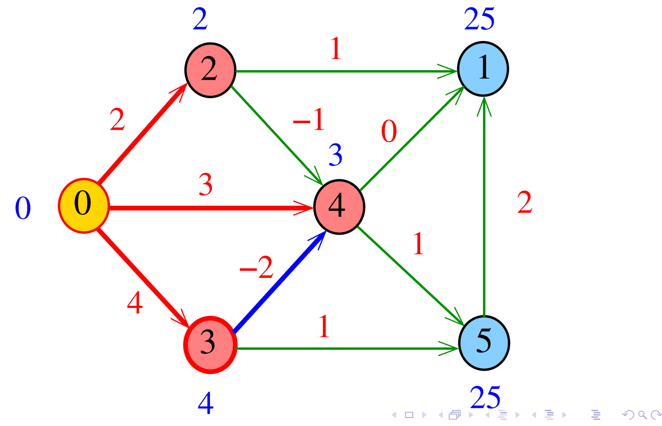
## Simulação

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |



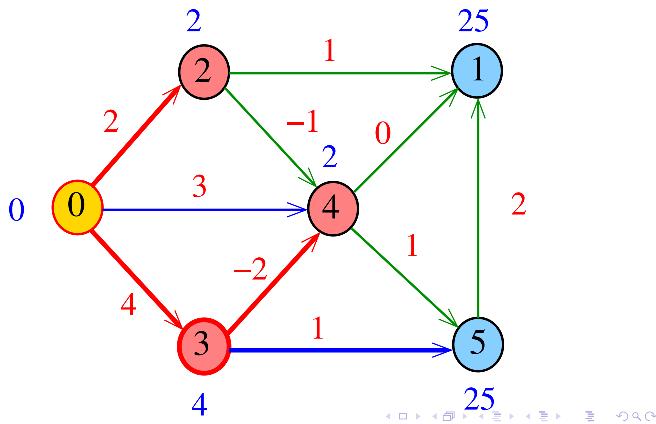

## Simulação

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |



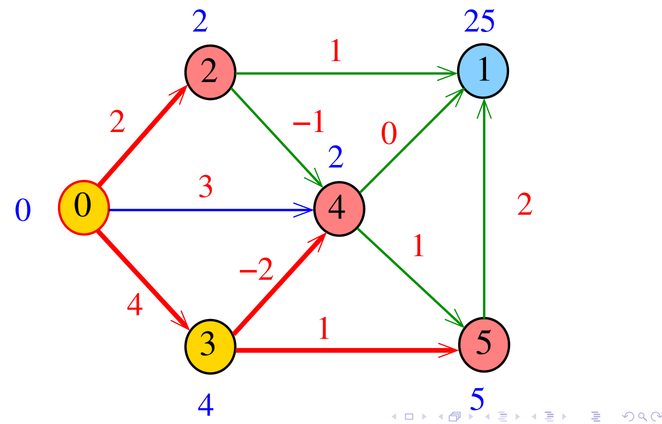

## Simulação

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |



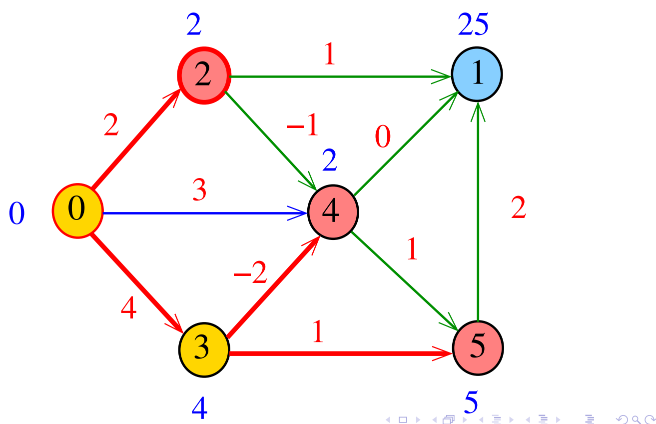

## Simulação

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |



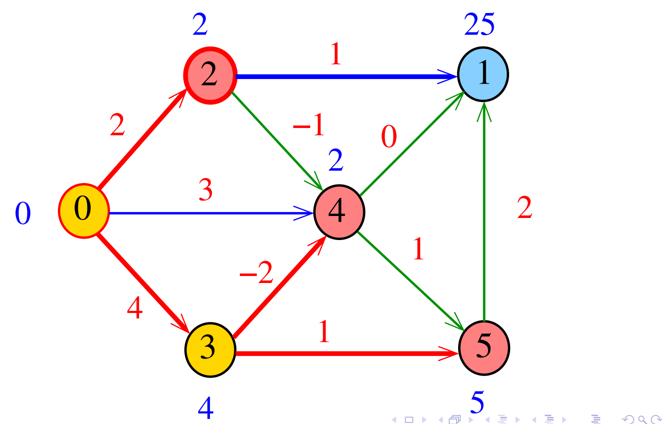

## Simulação

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |



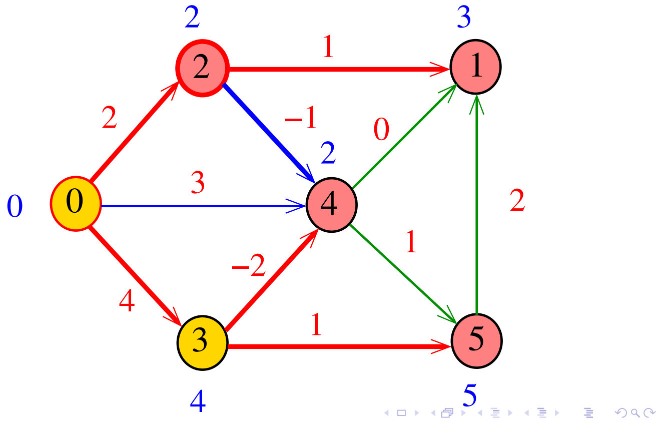

## Simulação

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |



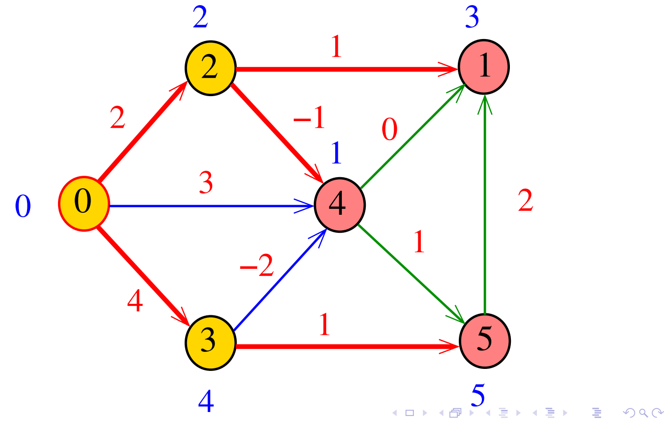
## Simulação

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |



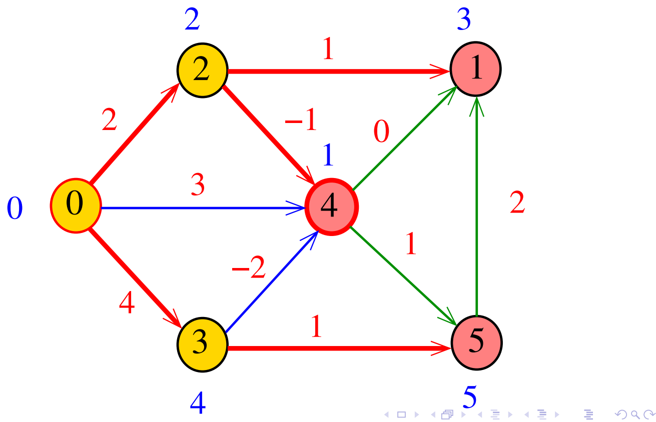
## Simulação

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |



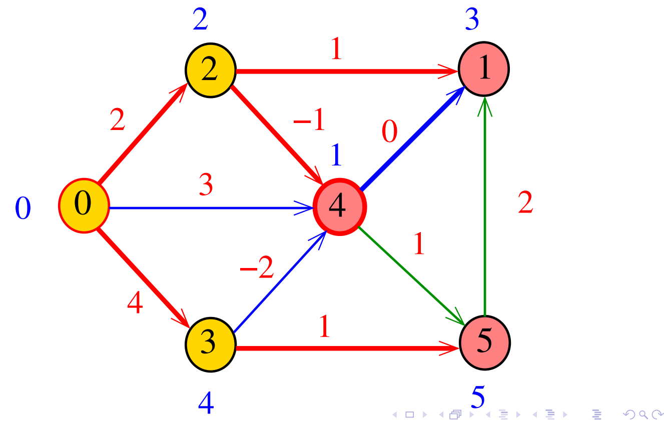
## Simulação

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |



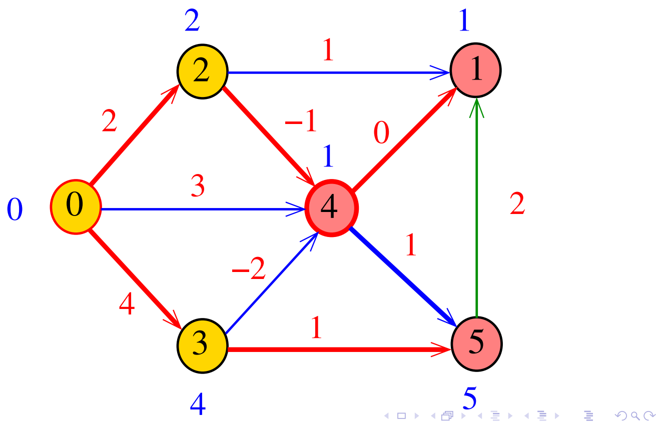
## Simulação

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |



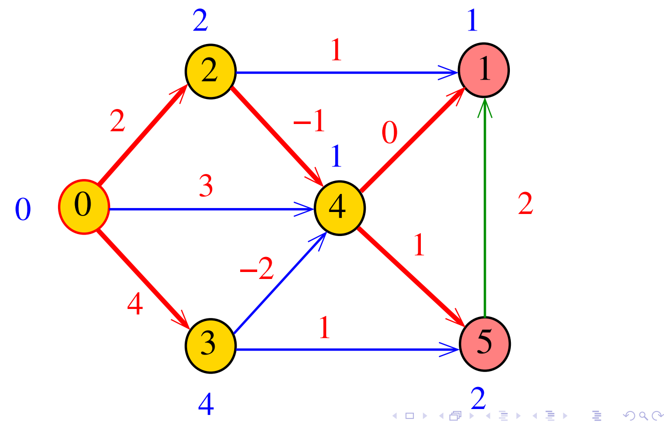
## Simulação

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |



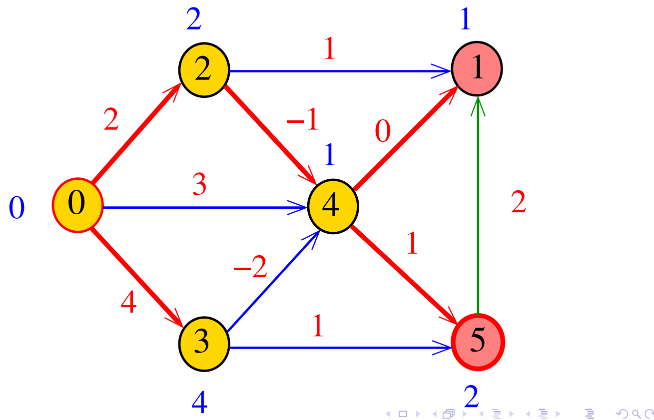
## Simulação

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |



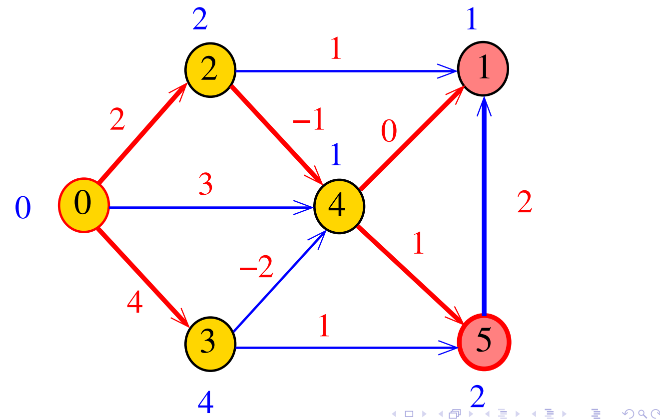
## Simulação

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |



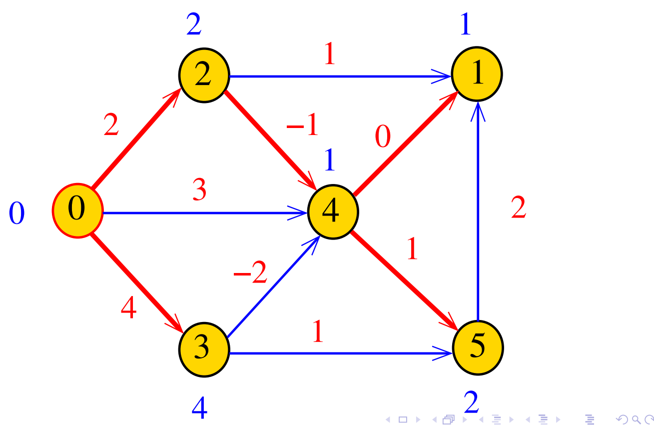
## Simulação

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |



## Simulação

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ts[i] | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 | 1 |



## AcyclicSP

A classe AcyclicSP recebe um DAG G com custos possivelmente negativos. Recebe também um vértice s.

A classe determina uma ordenação topológica dos vértices de Gatravés da classe DFStopological modificada para trabalhar com EWDigraphs.

Para cada vértice t, a função calcula o custo de um caminho de custo mínimo de sa t. Esse número é depositado em distTo[t].

```
public class AcyclicSP(EWDigraph G,
                       int s);
```

## Classe AcyclicSP: esqueleto

```
public class AcyclicSP {
  private static final int INFINITY;
  private final int s;
  private Arc[] edgeTo;
  private double[] distTo;
  public AcyclicSP(EWDigraph G, int s) {}
  private void acyclic(EWDigraph G,
                       int s) {}
  public boolean hasPath(int v) {}
  public boolean distTo(int v) {}
  public Iterable<Arc> pathTo(int v)
}
```

## AcyclicSP

Encontra um caminho de s a todo vértice alcançável a partir de s.

```
public AcyclicSP(EWDigraph G, int s) {
  INFINITY = Double.POSITIVE_INFINITY;
  edgeTo = new Arc[G.V()];
  distTo = new double[G.V()];
  this.s = s;
  for (int v = 0; v < G.V(); v++)
     distTo[v] = INFINITY;
  acyclic(G, s);
}
```

## acyclic()

```
private void acyclic(EWDigraph G, int s){
   DFStopological ts= new DFStopological(G);
   distTo[s] = 0;
   for(int v:  ts.order()) {
       for (Arc e :  G.adj(v)) {
           int v = e.from(), w = e.to();
           Double d = distTo[v]+e.weight();
           if (distTo[w] > d) {
               edgeTo[w] = e;
               distTo[w] = d;
           }
       }
   }
```

## AcyclicSP

Há um caminho de s a v?

```
// Método copiado de BFSpaths.
public boolean hasPath(int v) {
   return distTo[v] < INFINITY;
}

// retorna o comprimento de um
// caminho mínimo de s a t
public int distTo(int v) {
   return distTo[v];
}
```

## AcyclicSP

Retorna um caminho de s a v ou null se um tal caminho não existe.

```
// Método adaptado de DFSpaths.
public Iterable<Arc> pathTo(int v) {
   if (!hasPath(v)) return null;
   Stack<Arc> path = new Stack<Arc>();
   for (Arc e = edgeTo[v]; e != null;
                 e = edgeTo[e.from()])
       path.push(e);
   return path;
}
```

## Consumo de tempo

O consumo de tempo de AcyclicSP para vetor de listas de adjacência é $O(V + E)$.

O consumo de tempo de AcyclicSP para matriz de adjacências é $O(V^2)$.

# Busca de Substrings

pattern → N E E D L E

text → I N A H A Y S T A C K N E E D L E I N A

match

Substring search

Referências: Busca de substring (PF), Substring Searching (SW), slides (SW), vídeo (SW).

## Introdução

**Problema**: Dada uma string pat e uma string txt, encontrar uma ocorrência de pat em txt.

Exemplo: encontre ATTGG em:

```
TGGTAAGCGGTTCCTGCCCCGGCTCAGGGCCAAGAACAGATGAGACAGCTGAGTGATGGGCCAAACAGGATATCTGTGG
TAAGCAGTTCCTGCCCCGGCTCGGGGCCAAGAACAGATGGTCCCCAGATGCGGTCCAGCCCTCAGCAGTTTCTAGTGAA
TCATCAGATGTTTCCAGGGTGCCCCAAGGACCTGAAAATGACCCTGTACCTTATTTGAACTAACCAATCAGTTCGCTTC
TCGCTTCTGTTCGCGCGCTTCCGCTCTCCGAGCTCAATAAAAGAGCCCACAACCCCTCACTCGGCGCGCCAGTCTTCCG
ATAGACTGCGTCGCCCGGGTACCCGTATTCCCAATAAAGCCTCTTGCTGTTTGCATCCGAATCGTGGTCTCGCTGTTCC
TTGGGAGGGTCTCCTCTGAGTGATTGACTACCCACGACGGGGGTCTTTCATTTGGGGGCTCGTCCGGGATTTGGAGACC
CCTGCCCAGGGACCACCGACCCACCACCGGGAGGTAAGCTGGCCAGCAACTTATCTGTGTCTGTCCGATTGTCTAGTGT
CTATGTTTGATGTTATGCGCCTGCGTCTGTACTAGTTAGCTAACTAGCTCTGTATCTGGCGGACCCGTGGTGGAACTGA
CGAGTTCTGAACACCCGGCCGCAACCCTGGGAGACGTCCCAGGGACTTTGGGGGCCGTTTTTGTGGCCCGACCTGAGGA
AGGGAGTCGATGTGGAATCCGACCCCGTCAGGATATGTGGTTCTGGTAGGAGACGAGAACCTAAAACAGTTCCCGCCTC
CGTCTGAATTTTTGCTTTCGGTTTGGAACCGAAGCCGCGCGTCTTGTCTGCTGCAGCATCGTTCTGTGTTGTCTCTGTC
TGACTGTGTTTCTGTATTTGTCTGAAAATTAGGGCCAGACTGTTACCACTCCCTTAAGTTTGACCTTAGGTCACTGGAA
AGATGTCGAGCGGATCGCTCACAACCAGTCGGTAGATGTCAAGAAGAGACGTTGGGTTACCTTCTGCTCTGCAGAATGG
CCAACCTTTAACGTCGGATGGCCGCGAGACGGCACCTTTAACCGAGACCTCATCACCCAGGTTAAGATCAAGGTCTTTT
CACCTGGCCCGCATGGACACCCAGACCAGGTCCCCTACATCGTGACCTGGGAAGCCTTGGCTTTTGACCCCCCTCCCTG
GGTCAAGCCCTTTGTACACCCTAAGCCTCCGCCTCCTCTTCCTCCATCCGCCCCGTCTCTCCCCCTTGAACCTCCTCGT
TCGACCCCGCCTCGATCCTCCCTTTATCCAGCCCTCACTCCTTCTCTAGGCGCCGGAATTCGTTAACTCGAGGATCCGG
CTGTGGAATGTGTGTCAGTTAGGGTGTGGAAAGTCCCCAGGCTCCCCAGCAGGCAGAAGTATGCAAAGCATGCATCTCA
ATTAGTCAGCAACCAGGTGTGGAAAGTCCCCAGGCTCCCCAGCAGGCAGAAGTATGCAAAGCATGCATCTCAATTAGTC
AGCAACCATAGTCCCGCCCCTAACTCCGCCCATCCCGCCCCTAACTCCGCCCAGTTCCGCCCATTCTCCGCCCCATGGC
TGACTAATTTTTTTTATTTATGCAGAGGCCGAGGCCGCCTCGGCCTCTGAGCTATTCCAGAAGTAGTGAGGAGGCTTTT
TTGGAGGCCTAGGCTTTTGCAAAAAGCTGCCCAAGCTGATCCCCGGGGGCAATGAGATATGAAAAAGCCTGAACTCACC
GCGACGTCTGTCGAGAAGTTTCTGATCGAAAAGTTCGACAGCGTCTCCGACCTGATGCAGCTCTCGGAGGGCGAAGAAT
CTCGTGCTTTCAGCTTCGATGTAGGAGGGCGTGGATATGTCCTGCGGGTAAATAGCTGCGCCGATGGTTTCTACAAAGA
TCGTTATGTTTATCGGCACTTTGCATCGGCCGCGCTCCCGATTCCGGAAGTGCTTGACATTGGGGAATTCAGCGAGAGC
```

## Introdução

Dizemos que um vetor pat$[0\,..\,m{-}1]$ **casa com** txt$[0\,..\,n{-}1]$ **a partir de i** se

$$\text{pat}[0\,..\,m-1] = \text{txt}[i\,..\,i{+}m{-}1]$$

para algum i em $[0\,..\,n{-}m]$.

Exemplo:

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| txt | x | c | b | a | b | b | c | b | a | x |

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| pat | b | c | b | a |

pat$[0\,..\,3]$ casa com txt$[0\,..\,9]$ a partir de 5.

## Busca de substrings

Problema alternativo: Dados pat$[0\,..\,m{-}1]$ e txt$[0\,..\,n{-}1]$, encontrar o número de ocorrências de pat em txt.

Exemplo: Para $n = 10$, $m = 4$, e

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| txt | b | b | a | b | a | b | a | c | b | a |

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| pat | b | a | b | a |

pat ocorre 2 vezes em txt.

## Algoritmo de força bruta

pat = a b a b b a b a b b a

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | txt |
| 0 | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | | |

## Algoritmo de força bruta

pat = a b a b b a b a b b a

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | txt |
| 0 | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | |

## Algoritmo de força bruta

pat = a b a b b a b a b b a

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | txt |
| 0 | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | |

## Algoritmo de força bruta

pat = a b a b b a b a b b a

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | txt |
| 0 | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | |

## Algoritmo de força bruta

pat = a b a b b a b a b b a

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | txt |
| 0 | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | |

## Algoritmo de força bruta

| i | j | i+j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | txt → | A | B | A | C | A | D | A | B | R | A | C |
| 0 | 2 | 2 | A | B | R | A ← pat | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | A | B | R | A | | | | | | |
| 2 | 1 | 3 | | | A | B | R | A | | | | | |
| 3 | 0 | 3 | | | | A | B | R | A | | | | |
| 4 | 1 | 5 | | | | | A | B | R | A | | | |
| 5 | 0 | 5 | | | | | | A | B | R | A | | |
| 6 | 4 | 10 | | | | | | | A | B | R | A | |

*entries in red are mismatches*

*entries in gray are for reference only*

*entries in black match the text*

*return i when j is M*

*match*

**Brute-force substring search**

## Algoritmo de força bruta

Devolve a primeira de ocorrências de pat em txt.

```
public static
int search(String pat, String txt) {
   int i, n = txt.length();
   int j, m = pat.length();
   for (i = 0; i <= n-m; i++) {
      for (j = 0; j < m; j++)
         if(txt.charAt(i+j)!=pat.charAt(j))
            break;
      if (j == m) return i;
   }
   return n;
}
```

## Algoritmo de força bruta

Relação invariante: no início de cada iteração do "for (j= 0; ...)" vale que

(i0) $\text{pat}[0\,..\,j-1] = \text{txt}[i\,..\,i+j-1]$

## Consumo de tempo

Consumo de tempo da função search().

| linha | todas as execuções da linha |
|---|---|
| 1-2 | $= 1$ |
| 3 | $= n - m + 1$ |
| 4 | $\leq (n - m + 1)(m + 1)$ |
| 5 | $\leq (n - m + 1)\, m$ |
| 6 | $\leq (n - m + 1)$ |
| 7 | $= n - m$ |
| 8-9 | $= 1$ |
| total | $< 3\,(n - m + 2) + 2\,(n - m + 1)(m + 1)$ $= O((n - m + 1)m)$ |

## Pior caso

pat = a a a a a a a a a a b

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | txt |
| 0 | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | b | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | b | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | b | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | b | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | b | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | b | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | b | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | b | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | b | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | b | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | b | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | b | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | b | |

## Pior caso

| i | j | i+j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | txt → | A | A | A | A | A | A | A | A | A | B |
| 0 | 4 | 4 | A | A | A | A | B ← pat | | | | | |
| 1 | 4 | 5 | | A | A | A | A | B | | | | |
| 2 | 4 | 6 | | | A | A | A | A | B | | | |
| 3 | 4 | 7 | | | | A | A | A | A | B | | |
| 4 | 4 | 8 | | | | | A | A | A | A | B | |
| 5 | 5 | 10 | | | | | | A | A | A | A | B |

**Brute-force substring search (worst case)**

## Melhor caso

pat = b a a a a a a a a a a

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | txt |
| 0 | b | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | b | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | b | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | b | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | b | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | b | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | b | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | b | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | b | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | b | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | b | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | | b | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | b | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | |

## Conclusões

O consumo de tempo de search() no pior caso é $O((n - m + 1)m)$.

O consumo de tempo de search() no melhor caso é $O(n - m + 1)$.

Isto significa que no pior caso o consumo de tempo é essencialmente proporcional a $m\,n$.

Em geral o algoritmo é rápido e faz não mais que $1.1 \times n$ comparações.

## Algoritmo de força bruta: versão alternativa

```
public static
int search(String pat, String txt) {
   int i, n = txt.length();
   int j, m = pat.length();
   for (i=0, j=0; i < n && j < m; i++) {
      if(txt.charAt(i)==pat.charAt(j))j++;
      else {
         i -= j; // retrocesso
         j = 0;
      }
   }
   if (j == m) return i - m;
   return n; }
```

## Algoritmo força bruta: direita para esquerda

pat = a b a b b a b a b b a

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | txt |
| 0 | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | | |

## Algoritmo força bruta: direita para esquerda

pat = a b a b b a b a b b a

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | txt |
| 0 | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | |

## Algoritmo força bruta: direita para esquerda

pat = a b a b b a b a b b a

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | txt |
| 0 | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | |

## Algoritmo força bruta: direita para esquerda

pat = a b a b b a b a b b a

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | txt |
| 0 | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | |

## Algoritmo força bruta: direita para esquerda

pat = a b a b b a b a b b a

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | txt |
| 0 | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | |

## Algoritmo força bruta: direita para esquerda

pat = a b a b b a b a b b a

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | txt |
| 0 | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | |

## Algoritmo força bruta: direita para esquerda

pat = a b a b b a b a b b a

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | txt |
| 0 | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | |

## Algoritmo força bruta: direita para esquerda

pat = a b a b b a b a b b a

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | txt |
| 0 | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | |

## Força bruta: direita para esquerda

Devolve a primeira de ocorrências de pat em txt.

```
public static
int search(String pat, String txt) {
  int i, n = txt.length();
  int j, m = pat.length();
  for (i = 0; i <= n-m; i+=1 /*skip*/) {
     for (j = m-1; j >= 0; j--)
        if(txt.charAt(i+j)!=pat.charAt(j))
           break;
     if (j == -1) return i;
  }
  return n;
}
```

## Próximos passos

Existe algoritmo mais rápido que o força bruta?

Existe algoritmo que faz apenas n comparações entre caracteres?

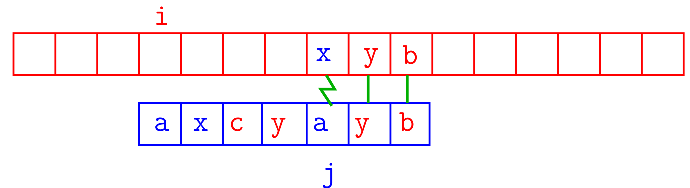
Existe algoritmo que faz menos que n comparações?

## Boyer-Moore

Fonte: ADS: Boyer Moore String Search

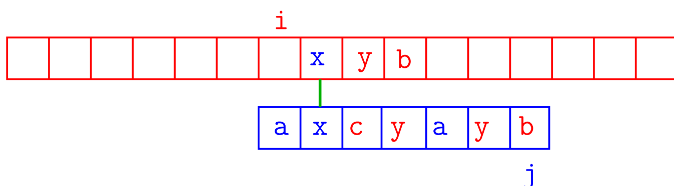
## Primeiro algoritmo de Boyer-Moore

O primeiro algoritmo de R.S. Boyer e J.S. Moore (1977) é baseado na seguinte heurística.




## Primeiro algoritmo de Boyer-Moore

O primeiro algoritmo de R.S. Boyer e J.S. Moore (1977) é baseado na seguinte heurística.




## Boyer-Moore

pat = a n d a n d o

```
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
a s   a n d o r i n h a s   a n d a m   a n d a n d o   a l t o  txt
1 a n d a n d o
```

## Boyer-Moore

pat = a n d a n d o

```
  0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
  as andorinhas andam andando alto  txt
1 andando
2    andando
```

## Boyer-Moore

pat = a n d a n d o

```
  0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
  as andorinhas andam andando alto  txt
1 andando
2    andando
3      andando
```

## Boyer-Moore

pat = a n d a n d o

```
  0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
  as andorinhas andam andando alto  txt
1 andando
2    andando
3      andando
4         andando
```

## Boyer-Moore

pat = a n d a n d o

```
  0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
  as andorinhas andam andando alto  txt
1 andando
2    andando
3      andando
4         andando
5            andando
```

## Boyer-Moore

pat = a n d a n d o

```
  0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
  as andorinhas andam andando alto  txt
1 andando
2    andando
3      andando
4         andando
5            andando
6               andando
```

## Boyer-Moore

pat = a n d a n d o

```
  0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
  as andorinhas andam andando alto  txt
1 andando
2    andando
3      andando
4         andando
5            andando
6               andando
7                  andando
```

## Boyer-Moore

pat = a n d a n d o

```
  0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
  a s   a n d o r i n h a  s     a  n  d  a  m     a  n  d  a  n  d  o     a  l  t  o  txt
1 a n d a n d o
2       a n d a n d o
3           a n d a n d o
4                 a n d a n  d  o
5                       a  n  d  a  n  d  o
6                                a  n  d  a  n  d  o
7                                         a  n  d  a  n  d  o
8                                                  a  n  d  a  n  d  o
```

## Boyer-Moore

pat = a b a b b a b a b b a

```
  0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
  a b a a b a b a b b a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a  txt
1 a b a b b a b a b b a
```

## Boyer-Moore

pat = a b a b b a b a b b a

```
  0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
  a b a a b a b a b b a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a  txt
1 a b a b b a b a b b a
2   a b a b b a b a b b  a
```

## Boyer-Moore

pat = a b a b b a b a b b a

```
  0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
  a b a a b a b a b b a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a  txt
1 a b a b b a b a b b a
2   a b a b b a b a b b  a
3     a b a b b a b a b  b  a
```

## Boyer-Moore

pat = a b a b b a b a b b a

```
  0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
  a b a a b a b a b b a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a  txt
1 a b a b b a b a b b a
2   a b a b b a b a b b  a
3     a b a b b a b a b  b  a
4       a b a b b a b a  b  b  a
```

## Boyer-Moore

pat = a b a b b a b a b b a

```
  0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
  a b a a b a b a b b a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a  txt
1 a b a b b a b a b b a
2   a b a b b a b a b b  a
3     a b a b b a b a b  b  a
4       a b a b b a b a  b  b  a
5         a b a b b a b  a  b  b  a
```

## Boyer-Moore

pat = a b a b b a b a b b a

```
     0  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
     a  b  a  a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a  txt
1    a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
2       a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
3          a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
4             a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
5                a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
6                   a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
```

## Boyer-Moore

pat = a b a b b a b a b b a

```
     0  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
     a  b  a  a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a  txt
1    a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
2       a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
3          a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
4             a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
5                a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
6                   a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
7                      a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
```

## Boyer-Moore

pat = a b a b b a b a b b a

```
     0  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
     a  b  a  a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a  txt
1    a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
2       a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
3          a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
4             a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
5                a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
6                   a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
7                      a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
8                         a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
```

## Boyer-Moore

pat = a b a b b a b a b b a

```
     0  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
     a  b  a  a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a  txt
1    a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
2       a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
3          a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
4             a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
5                a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
6                   a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
7                      a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
8                         a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
9                            a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
```

## Boyer-Moore

pat = a b a b b a b a b b a

```
     0  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
     a  b  a  a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a  txt
1    a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
2       a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
3          a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
4             a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
5                a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
6                   a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
7                      a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
8                         a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
9                            a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
10                              a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
```

## Boyer-Moore

pat = a b a b b a b a b b a

```
     0  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
     a  b  a  a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a  txt
1    a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
2       a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
3          a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
4             a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
5                a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
6                   a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
7                      a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
8                         a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
9                            a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
10                              a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
11                                 a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
```

## Boyer-Moore

pat = a b a b b a b a b b a

```
    0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
    a b a a b a b a b b a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a   txt
 1  a b a b b a b a b b a
 2    a b a b b a b a b b a
 3      a b a b b a b a b b a
 4        a b a b b a b a b b a
 5          a b a b b a b a b b a
 6            a b a b b a b a b b a
 7              a b a b b a b a b b a
 8                a b a b b a b a b b a
 9                  a b a b b a b a b b a
10                    a b a b b a b a b b a
11                      a b a b b a b a b b a
12                        a b a b b a b a b b a
```

## Boyer-Moore

pat = a b a b b a b a b b a

```
    0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
    a b a a b a b a b b a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a   txt
 1  a b a b b a b a b b a
 2    a b a b b a b a b b a
 3      a b a b b a b a b b a
 4        a b a b b a b a b b a
 5          a b a b b a b a b b a
 6            a b a b b a b a b b a
 7              a b a b b a b a b b a
 8                a b a b b a b a b b a
 9                  a b a b b a b a b b a
10                    a b a b b a b a b b a
11                      a b a b b a b a b b a
12                        a b a b b a b a b b a
13                          a b a b b a b a b b a
```

## *Bad-character heuristic*

**Ideia** ("*bad-character heuristic*"): calcular um deslocamento de modo que txt[j] fique emparelhado com a última ocorrência do caractere txt[j] em pat.

Suponha que o conjunto a que pertencem todos os elementos de pat e de txt é conhecido de antemão. Este conjunto é o **alfabeto** do problema.

Suponha que o alfabeto é o conjunto de todos os 256 caracteres.

## *Bad-character heuristic*

Para implementar essa ideia fazemos um pré-processamento de pat, determinando para cada símbolo x do alfabeto a posição de sua última ocorrência em pat.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| pat | a | n | d | a | n | d | o |

| | 0 | ... | 'a' | 'b' | 'c' | 'd' | ... | ... | 'n' | 'o' | 'p' | ... | 255 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| right | −1 | ... | 3 | −1 | −1 | 5 | ... | ... | 4 | 6 | −1 | ... | ... |

## Classe BoyerMoore: esqueleto

```
public class BoyerMoore {
  private final int R; // tam.  alfabeto
  // pulo bad-character
  private int[] right;
  // padrão como array ou String
  private char[] pattern;
  private String pat;
  public BoyerMoore(String pat) {...}
  public BoyerMoore(char[] pattern,
                    int R) {...}
  public int search(String txt) {...}
  public int search(char[] text) {...}
}
```

## BoyerMoore: construtor

```
public BoyerMoore(String pat) {
  this.R = 256;
  this.pat = pat;
  // última ocorrência de c em pat
  right = new int[R];
  for (int c = 0; c < R; c++)
     right[c] = -1;
  for (int j = 0; j < pat.length(); j++)
     right[pat.charAt(j)] = j;
}
```

## BoyerMoore: search()

Recebe strings pat e txt com $m \geq 1$ e $n \geq 0$, e retorna o índice da primeira ocorrências de pat em txt. Se pat não ocorre em txt, retorna n.

```
public int search(String txt) {
   int n = txt.length();
   int m = pat.length();
   int skip;
```

## BoyerMoore: search()

```
   for (int i = 0; i <= n-m; i += skip) {
      skip = 0;
      for (int j = m-1; j >= 0; j--) {
         if(pat.charAt(j)!=txt.charAt(i+j)){
            int r= right[txt.charAt(i+j)]
            skip = Math.max(1,j-r);
            break;
         }
      }
      if (skip == 0) return i; // achou
   }
   return n; // não achou
}
```

## Pior caso

pat = b a a a a a a a a a a

```
     1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23
     a a a a a a a a a a  a  a  a  a  a  a  a  a  a  a  a  a  a  txt
 1   b a a a a a a a a a a
 2     b a a a a a a a a a a
 3       b a a a a a a a a a a
 4         b a a a a a a a a a a
 5           b a a a a a a a a a a
 6             b a a a a a a a a a a
 7               b a a a a a a a a a a
 8                 b a a a a a a a a a a
 9                   b a a a a a a a a a a
10                     b a a a a a a a a a a
11                       b a a a a a a a a a a
12                         b a a a a a a a a a a
13                           a b a a a a a a a a a
```

## Melhor caso

pat = a b c d e

```
   1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23
   ? ? ? ? x ? ? ? ? x  ?  ?  ?  ?  x  ?  ?  ?  ?  x  ?  ?  ?  txt
1  a b c d e
```

## Melhor caso

pat = a b c d e

```
   1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23
   ? ? ? ? x ? ? ? ? x  ?  ?  ?  ?  x  ?  ?  ?  ?  x  ?  ?  ?  txt
1  a b c d e
2            a b c d e
```

## Melhor caso

pat = a b c d e

```
   1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23
   ? ? ? ? x ? ? ? ? x  ?  ?  ?  ?  x  ?  ?  ?  ?  x  ?  ?  ?  txt
1  a b c d e
2            a b c d e
3                       a  b  c  d  e
```

## Melhor caso

pat = a b c d e

```
   1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23
   ? ? ? ? x ? ? ? ? x  ?  ?  ?  ?  x  ?  ?  ?  ?  x  ?  ?  ?  txt
1  a b c d e
2            a b c d e
3                     a  b  c  d  e
4                                    a  b  c  d  e
```

## Melhor caso

pat = a b c d e

```
   1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23
   ? ? ? ? x ? ? ? ? x  ?  ?  ?  ?  x  ?  ?  ?  ?  x  ?  ?  ?  txt
1  a b c d e
2            a b c d e
3                     a  b  c  d  e
4                                    a  b  c  d  e
5                                                   a  b  c  ...
```

## Conclusões

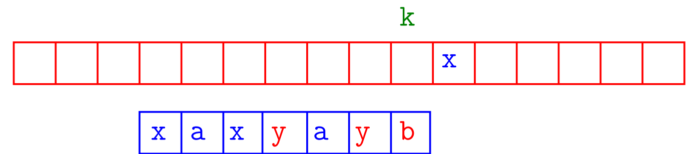
O consumo de tempo do algoritmo BoyerMoore no pior caso é $O((n - m + 1)m)$.

O consumo de tempo do algoritmo BoyerMoore no melhor caso é $O(n/m)$.

Isto significa que no pior caso o consumo de tempo é essencialmente proporcional a $mn$ e no melhor caso o algoritmo é **sublinear**.

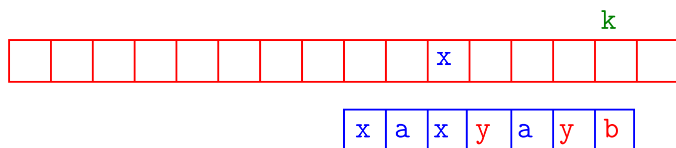
## *Bad-character heuristic*: variante

O primeiro algoritmo de R.S. Boyer e J.S. Moore (1977) é baseado na seguinte heurística.




## *Bad-character heuristic*: variante

O primeiro algoritmo de R.S. Boyer e J.S. Moore (1977) é baseado na seguinte heurística.




## *Bad-character heuristic*: variante

pat = a n d a n d o

```
  0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
  a s   a n d o r i n h  a  s     a  n  d  a  m     a  n  d  a  n  d  o     a  l  t  o  txt
1 a n d a n d o
```

## *Bad-character heuristic*: variante

pat = a n d a n d o

```
  0123456789...31
  as andorinhas andam andando alto   txt
1 andando
2        andando
```

## *Bad-character heuristic*: variante

pat = a n d a n d o

```
  as andorinhas andam andando alto   txt
1 andando
2        andando
3           andando
```

## *Bad-character heuristic*: variante

pat = a n d a n d o

```
  as andorinhas andam andando alto   txt
1 andando
2        andando
3           andando
4                    andando
```

## *Bad-character heuristic*: variante

pat = a n d a n d o

```
  as andorinhas andam andando alto   txt
1 andando
2        andando
3           andando
4                    andando
5                     andando
```

## *Bad-character heuristic*: variante

pat = a n d a n d o

```
  as andorinhas andam andando alto   txt
1 andando
2        andando
3           andando
4                    andando
5                     andando
6                             anda ...
```

## *Bad-character heuristic*: variante

pat = a b a b b a b a b b a

```
  0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
  a b a a b a b a b b a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a   txt
1 a b a b b a b a b b a
```

## *Bad-character heuristic*: variante

pat = a b a b b a b a b b a

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | txt |
| 1 | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | |

## *Bad-character heuristic*: variante

pat = a b a b b a b a b b a

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | txt |
| 1 | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | |

## *Bad-character heuristic*: variante

pat = a b a b b a b a b b a

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | txt |
| 1 | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | |

## *Bad-character heuristic*: variante

pat = a b a b b a b a b b a

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | txt |
| 1 | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | |

## *Bad-character heuristic*: variante

pat = a b a b b a b a b b a

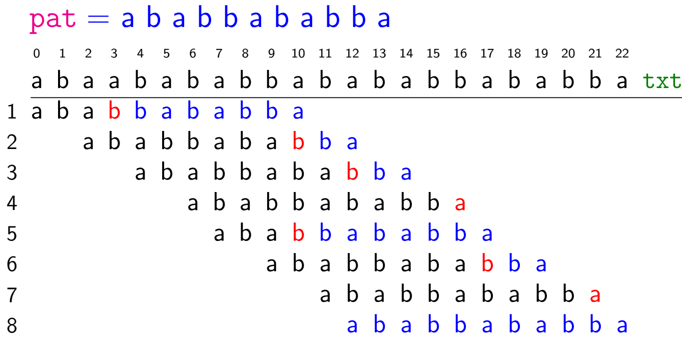
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | txt |
| 1 | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | |

## *Bad-character heuristic*: variante

pat = a b a b b a b a b b a

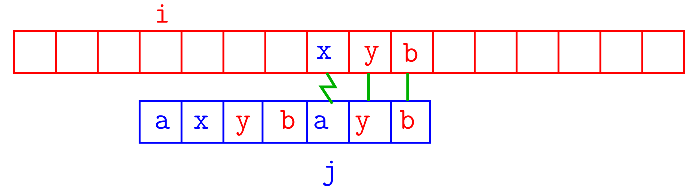
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | txt |
| 1 | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | | | a | b | a | b | b | a | b | a | b | b | a | | |

## *Bad-character heuristic*: variante



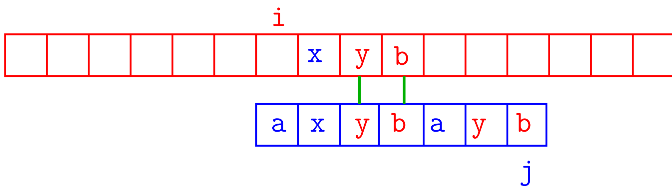

## Segundo algoritmo de Boyer-Moore

O segundo algoritmo de R.S. Boyer e J.S. Moore (1977) é baseado na seguinte heurística.




## Segundo algoritmo de Boyer-Moore

O segundo algoritmo de R.S. Boyer e J.S. Moore (1977) é baseado na seguinte heurística.




## *Good suffix heuristic*

Não precisa conhecer o alfabeto explicitamente.

A implementação deve começar com um pré-processamento de pat: para cada j em $0, 1, \ldots, m-1$ devemos calcular o maior k em $0, 1, \ldots, m-2$ tal que:

- pat[j..m-1] é sufixo de pat[0..k] ou
- pat[0..k] é sufixo de pat[j..m-1]

Chamemos de bm[j] esse valor k.

## *Good suffix heuristic*

Exemplo 1:

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| pat | c | a | a | b | a | a |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| bm | −1 | −1 | −1 | −1 | 2 | 4 |

Exemplo 2:

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| pat | b | a | − | b | a | ∗ | b | a |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| bm | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 |

## *Good suffix heuristic*

O vetor bm[] pode ser calculado facilmente em tempo $O(m^3)$.

Com mais trabalho, o vetor bm[] pode ser determinado em tempo $O(m)$. Veja CLRS, seção 34.4.

Veja também a página do professor Paulo Feofiloff: Busca de palavras em um texto