Compacto dos melhores momentos

AULA 24

Introdução

Problema: Dada uma string pat e uma string txt, encontrar uma (todas) ocorrência(s) de pat em txt.

Exemplo: encontre ATTGG em:

```
TGGTAAGCGGTTCCTGCCCCGGCTCAGGGCCAAGAACAGATGAGACAGCTGAGTGATGGGCCAAACAGGATATCTGTGG
TAAGCAGTTCCTGCCCCGGCTCGGGGCCAAGAACAGATGGTCCCCAGATGCGGTCCAGCCCTCAGCAGTTTCTAGTGAA
TCATCAGATGTTTCCAGGGTGCCCCAAGGACCTGAAAATGACCCTGTACCTTATTTGAACTAACCAATCAGTTCGCTTC
TCGCTTCTGTTCGCGCGCTTCCGCTCTCCGAGCTCAATAAAAGAGCCCACAACCCCTCACTCGGCGCGCCAGTCTTCCG
ATAGACTGCGTCGCCCGGGTACCCGTATTCCCAATAAAGCCTCTTGCTGTTTGCATCCGAATCGTGGTCTCGCTGTTCC
TTGGGAGGGTCTCCTCTGAGTGATTGACTACCCACGACGGGGGTCTTTCATTTGGGGGCTCGTCCGGGATTTGGAGACC
CCTGCCCAGGGACCACCGACCCACCACCGGGAGGTAAGCTGGCCAGCAACTTATCTGTGTCTGTCCGATTGTCTAGTGT
CTATGTTTGATGTTATGCGCCTGCGTCTGTACTAGTTAGCTAACTAGCTCTGTATCTGGCGGACCCGTGGTGGAACTGA
CGAGTTCTGAACACCCGGCCGCAACCCTGGGAGACGTCCCAGGGACTTTGGGGGCCGTTTTTGTGGCCCGACCTGAGGA
AGGGAGTCGATGTGGAATCCGACCCCGTCAGGATATGTGGTTCTGGTAGGAGACGAGAACCTAAAACAGTTCCCGCCTC
CGTCTGAATTTTTGCTTTCGGTTTGGAACCGAAGCCGCGCGTCTTGTCTGCTGCAGCATCGTTCTGTGTTGTCTCTGTC
TGACTGTGTTTCTGTATTTGTCTGAAAATTAGGGCCAGACTGTTACCACTCCCTTAAGTTTGACCTTAGGTCACTGGAA
AGATGTCGAGCGGATCGCTCACAACCAGTCGGTAGATGTCAAGAAGAGACGTTGGGTTACCTTCTGCTCTGCAGAATGG
CCAACCTTTAACGTCGGATGGCCGCGAGACGGCACCTTTAACCGAGACCTCATCACCCAGGTTAAGATCAAGGTCTTTT
CACCTGGCCCGCATGGACACCCAGACCAGGTCCCCTACATCGTGACCTGGGAAGCCTTGGCTTTTGACCCCCCTCCCTG
GGTCAAGCCCTTTGTACACCCTAAGCCTCCGCCTCCTCTTCCTCCATCCGCCCCGTCTCTCCCCCTTGAACCTCCTCGT
TCGACCCCGCCTCGATCCTCCCTTTATCCAGCCCTCACTCCTTCTCTAGGCGCCGGAATTCGTTAACTCGAGGATCCGG
CTGTGGAATGTGTGTCAGTTAGGGTGTGGAAAGTCCCCAGGCTCCCCAGCAGGCAGAAGTATGCAAAGCATGCATCTCA
ATTAGTCAGCAACCAGGTGTGGAAAGTCCCCAGGCTCCCCAGCAGGCAGAAGTATGCAAAGCATGCATCTCAATTAGTC
AGCAACCATAGTCCCGCCCCTAACTCCGCCCATCCCGCCCCTAACTCCGCCCAGTTCCGCCCATTCTCCGCCCCATGGC
TGACTAATTTTTTTTATTTATGCAGAGGCCGAGGCCGCCTCGGCCTCTGAGCTATTCCAGAAGTAGTGAGGAGGCTTTT
TTGGAGGCCTAGGCTTTTGCAAAAAGCTGCCCAAGCTGATCCCCGGGGGCAATGAGATATGAAAAAGCCTGAACTCACC
GCGACGTCTGTCGAGAAGTTTCTGATCGAAAAGTTCGACAGCGTCTCCGACCTGATGCAGCTCTCGGAGGGCGAAGAAT
```

Algoritmo de força bruta

pat = a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	txt
0	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
1		a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a												
2			a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a											
3				a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a										
4					a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a									
5						a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a								
6							a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a							
7								a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a						
8									a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a					
9										a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a				
10											a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a			
11												a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a		
12													a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	

Conclusões

O consumo de tempo de search() força-bruta no pior caso é $O((n - m + 1)m)$.

O consumo de tempo de search() força-bruta no melhor caso é $O(n - m + 1)$.

Isto significa que no pior caso o consumo de tempo é essencialmente proporcional a $m\,n$.

Em geral o algoritmo é rápido e faz não mais que $1.1 \times n$ comparações.

Algoritmo força bruta: direita para esquerda

pat = a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	txt
0	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
1		a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a												
2			a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a											
3				a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a										
4					a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a									
5						a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a								
6							a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a							
7								a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a						
8									a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a					
9										a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a				
10											a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a			
11												a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a		
12													a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	

Força bruta: direita para esquerda

Devolve a primeira de ocorrências de pat em txt.

```
public static
int search(String pat, String txt) {
   int i, n = txt.length();
   int j, m = pat.length();
   int skip = 1;
   for (i = 0; i <= n-m; i += skip) {
      for (j = m-1; j >= 0; j--)
         if(txt.charAt(i+j)!=pat.charAt(j))
            break;
      if (j == -1) return i;
   }
   return n;
}
```

Próximos passos

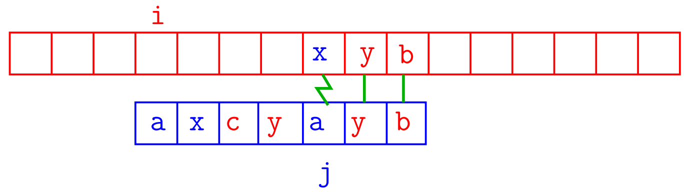
Existe algoritmo mais rápido que o força bruta?

Existe algoritmo que faz apenas `n` comparações entre caracteres?

Existe algoritmo que faz menos que `n` comparações?

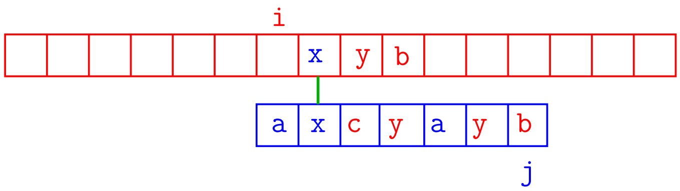
Boyer-Moore

O primeiro algoritmo de R.S. Boyer e J.S. Moore (1977) é baseado na seguinte heurística.



Boyer-Moore

O primeiro algoritmo de R.S. Boyer e J.S. Moore (1977) é baseado na seguinte heurística.



Bad-character heuristic

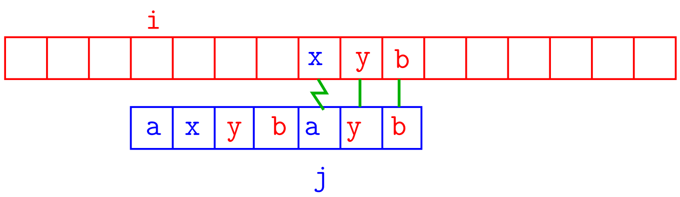
Para implementar essa ideia fazemos um pré-processamento de `pat`, determinando para cada símbolo `x` do alfabeto a posição de sua última ocorrência em `pat`.

	0	1	2	3	4	5	6
pat	a	n	d	a	n	d	o

	0	...	'a'	'b'	'c'	'd'	...	...	'n'	'o'	'p'	...	255
right	-1	...	3	-1	-1	5	...	...	4	6	-1	...	...

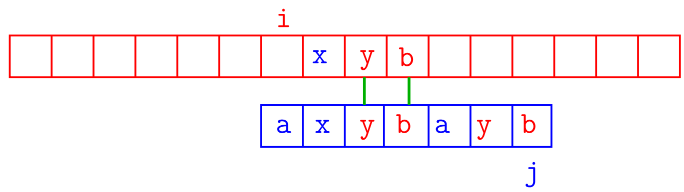
Segundo algoritmo de Boyer-Moore

O segundo algoritmo de R.S. Boyer e J.S. Moore (1977) é baseado na seguinte heurística.



Segundo algoritmo de Boyer-Moore

O segundo algoritmo de R.S. Boyer e J.S. Moore (1977) é baseado na seguinte heurística.



Good suffix heuristic

Não precisa conhecer o alfabeto explicitamente.

A implementação deve começar com um pré-processamento de `pat`: para cada $\mathtt{j}$ em $0, 1, \ldots, \mathtt{m}-1$ devemos calcular o maior $\mathtt{k}$ em $0, 1, \ldots, \mathtt{m}-2$ tal que:

- `pat`[`j`..`m`-1] é sufixo de `pat`[0..`k`] ou
- `pat`[0..`k`] é sufixo de `pat`[`j`..`m`-1]

Chamemos de `bm[j]` esse valor `k`.

Good suffix heuristic

Exemplo 1:

	0	1	2	3	4	5
pat	c	a	a	b	a	a
bm	−1	−1	−1	−1	2	4

Exemplo 2:

	0	1	2	3	4	5	6	7
pat	b	a	−	b	a	∗	b	a
bm	1	1	1	1	1	1	4	4

Conclusões

O consumo de tempo do algoritmo `BoyerMoore` no pior caso é $\mathrm{O}((\mathtt{n}-\mathtt{m}+1)\mathtt{m})$.

O consumo de tempo do algoritmo `BoyerMoore` no melhor caso é $\mathrm{O}(\mathtt{n}/\mathtt{m})$.

Isto significa que no pior caso o consumo de tempo é essencialmente proporcional a $\mathtt{mn}$ e no melhor caso o algoritmo é **sublinear**.

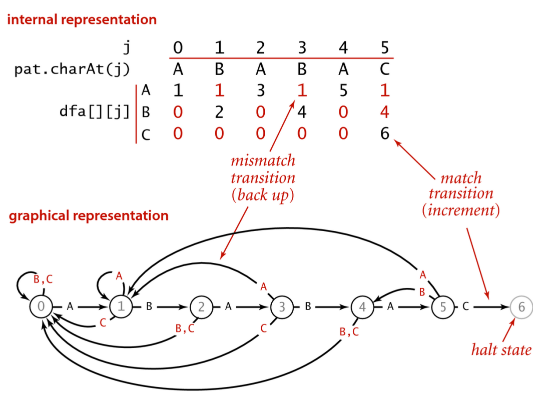
Prato do dia

Algoritmos que consomem tempo $\mathrm{O}(\mathtt{n}+\mathtt{m})$:

- Knuth, Morris e Pratt;
  ferramenta: autômato finito
  operação básica: `charAt()`
- Rabin e Karp;
  ferramenta: hash
  operações básica: $+, -, \times, \%$

AULA 25

Algoritmo KMP para busca de substring



DFA corresponding to the string A B A B A C

Algoritmo de força bruta

$P =$ a b a b b a b a b b a

```
    0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
    a  b  a  a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a  T
0   a  b  a  b
1      a
2         a  b
3            a  b  a  b  b
4               a
5                  a  b  a  b  b  a  b  a  b  b
6                     a
7                        a  b  a
8                           a
9                              a
10                                a  b  a  b
11                                   a
12                                      a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a
```

Algoritmo de força bruta: versão alternativa

```java
public static
int search(String pat, String txt) {
  int i, n = txt.length();
  int j, m = pat.length();
  for(i=0, j=0; i < n && j < m; i++) {
     if(txt.charAt(i)==pat.charAt(j))j++;
     else {
        i -= j; // retrocesso
        j = 0;
     }
  }
  if (j == m) return i - m;
  return n; }
```

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

```
    0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
    a  b  a  a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a  T
0   a
```

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

```
    0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
    a  b  a  a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a  T
0   a
1   a  b
```

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

```
    0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
    a  b  a  a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a  T
0   a
1   a  b
2   a  b  a
```

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

```
    0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
    a  b  a  a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  a  b  b  a  b  a  b  b  a  T
0   a
1   a  b
2   a  b  a
3            a
```

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												
12						a	b	a	b	b	a	b	a											

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												
12						a	b	a	b	b	a	b	a											
13						a	b	a	b	b	a	b	a	b										

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												
12						a	b	a	b	b	a	b	a											
13						a	b	a	b	b	a	b	a	b										
14													a	b	a									

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												
12						a	b	a	b	b	a	b	a											
13						a	b	a	b	b	a	b	a	b										
14													a	b	a									
15													a	b	a	b								

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												
12						a	b	a	b	b	a	b	a											
13						a	b	a	b	b	a	b	a	b										
14													a	b	a									
15													a	b	a	b								
16													a	b	a	b	b							

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												
12						a	b	a	b	b	a	b	a											
13						a	b	a	b	b	a	b	a	b										
14													a	b	a									
15													a	b	a	b								
16													a	b	a	b	b							
17													a	b	a	b	b	a						

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												
12						a	b	a	b	b	a	b	a											
13						a	b	a	b	b	a	b	a	b										
14													a	b	a									
15													a	b	a	b								
16													a	b	a	b	b							
17													a	b	a	b	b	a						

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												
12						a	b	a	b	b	a	b	a											
13						a	b	a	b	b	a	b	a	b										
14													a	b	a									
15													a	b	a	b								
16													a	b	a	b	b							
17													a	b	a	b	b	a						

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												
12						a	b	a	b	b	a	b	a											
13						a	b	a	b	b	a	b	a	b										
14													a	b	a									
15													a	b	a	b								
16													a	b	a	b	b							
17													a	b	a	b	b	a						

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

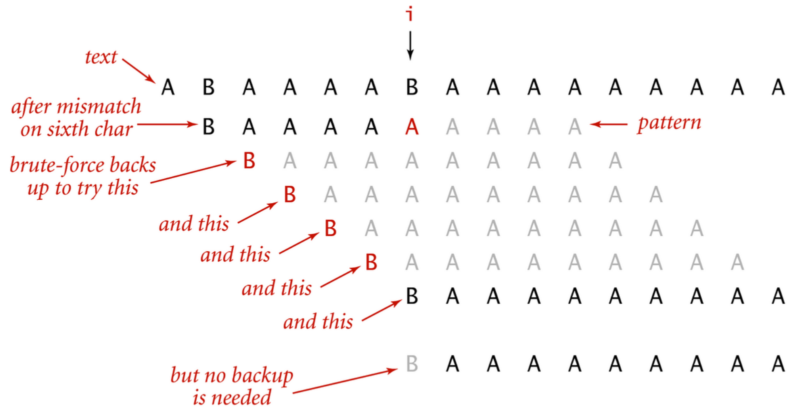
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												
12						a	b	a	b	b	a	b	a											
13						a	b	a	b	b	a	b	a	b										
14													a	b	a									
15													a	b	a	b								
16													a	b	a	b	b							
17													a	b	a	b	b	a						

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												
12						a	b	a	b	b	a	b	a											
13						a	b	a	b	b	a	b	a	b										
14													a	b	a									
15													a	b	a	b								
16													a	b	a	b	b							
17													a	b	a	b	b	a						

Ideia básica do algoritmo



Text pointer backup in substring searching

Ideia geral

Quando encontramos um conflito entre `txt[i]` e `pat[j]`, **não** é necessário retroceder `i` e passar a comparar `txt[i-j+1 . . ]` com `pat[0 . . ]`.
Basta:

> *encontrar o comprimento do maior prefixo de* `pat[0 . . ]` *que é sufixo de* `txt[. . i]`,

ou seja,

> *encontrar o maior* k *tal que* `pat[0 . . k-1]` *é igual a* `txt[i-k+1 . . i]` *que é igual a* `pat[j-k+1 . . j-1]+txt[i]`,

e passar a comparar `txt[i+1 . . ]` com `pat[k . . ]`.

Ideia geral

Exemplo: texto `CAABAABAAAA` e padrão `AABAAA`: depois do conflito entre `txt[6]` e `pat[5]`, não precisamos retroceder no texto: podemos continuar e comparar `txt[7 . . ]` com `pat[3 . . ]`:

	C	A	A	B	A	A	B	A	A	A	A
uma tentativa:		A	A	B	A	A	A				
não precisa tentar:			A	A	B	A	A	A			
não precisa tentar:				A	A	B	A	A	A		
próxima tentativa:					A	A	B	A	A	A	

Algoritmo KMP

Examina os caracteres de `txt` um a um, da esquerda para a direita, sem nunca retroceder.

Em cada iteração, o algoritmo sabe qual posição `k` de `pat` deve ser emparelhada com a próxima posição `i+1` de `txt`.

Ou seja, no fim de cada iteração, o algoritmo sabe qual índice `k` deve fazer o papel de `j` na próxima iteração.

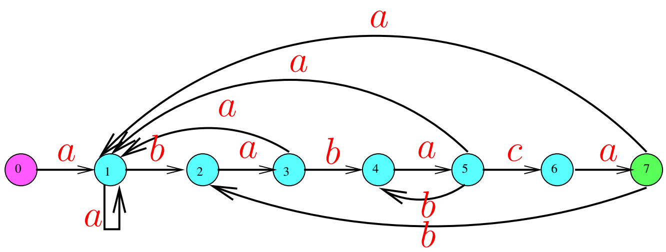
Algoritmo KMP

O algoritmo KMP usa uma tabela `dfa[][]` que armazena os `índices mágicos k`.

O nome da tabela deriva da expressão *deterministic finite-state automaton*.

As colunas da tabela são indexadas pelos índices `0 . . m-1` do padrão e as linhas são indexadas pelo alfabeto, que é o conjunto de todos os caracteres do texto e do padrão.

Autômato de estados determinístico (DFA)



$0\,..\,7$ = conjunto de estados

$\Sigma = \{$a, b, c$\}$ = alfabeto

δ = função de transição

0 é estado inicial e 7 é estado final

Exemplo: pat = ABABAC

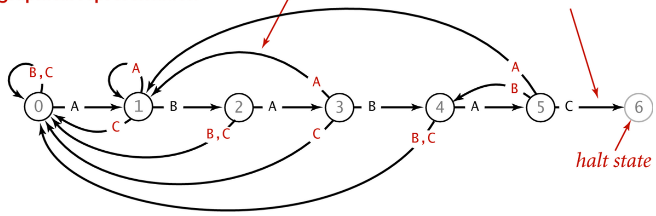
internal representation

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6

mismatch transition (back up)

match transition (increment)

graphical representation



Autômato finito determinístico (DFA)

O algoritmo KMP simula o funcionamento do autômato de estados.

O autômato começa no estado 0 e examina os caracteres do texto, um de cada vez, da esquerda para a direita, mudando para um novo estado cada vez que lê um caractere do texto.

Se atingir o estado m, dizemos que o autômato reconheceu ou aceitou o padrão.

Se chegar ao fim do texto sem atingir o estado m, sabemos que o padrão não ocorre no texto.

Autômato finito determinístico (DFA)

O autômato está no estado j se acabou de casar os j primeiros caracteres do padrão com um segmento do texto, ou seja, se acabou de casar pat[0 . . j-1] com txt[i-j . . i-1].

Para cada estado j, a transição que corresponde ao caractere pat[j] é de casamento e leva ao estado j+1.

Todas as outras transições que começam no estado j são de conflito e levam a um estado $\leq$ j.

O autômato de estados é uma ideia **muito importante** em compilação, na teoria da computação, etc.

Autômato finito determinístico (DFA)

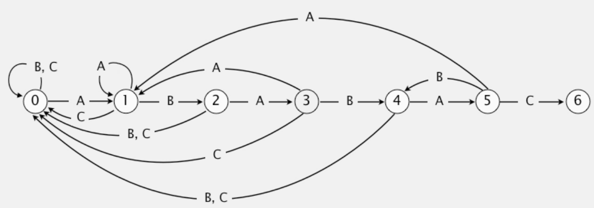
Um **autômato finito** é formado uma 5-upla (Q, Σ, δ, q_0, F), onde

- Q é um conjunto finitos de estados,
- Σ é um conjunto finito chamado alfabeto,
- δ : Q $\times$ Σ é a função de transição,
- $q_0 \in$ Q é o estado inicial, e
- F $\subseteq$ Q é o conjunto de aceitação.

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

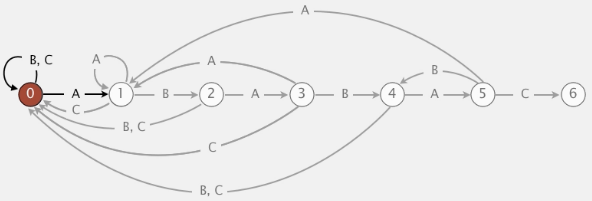
		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

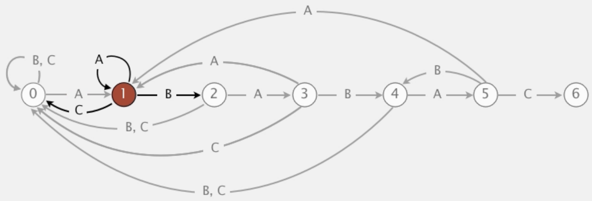
		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

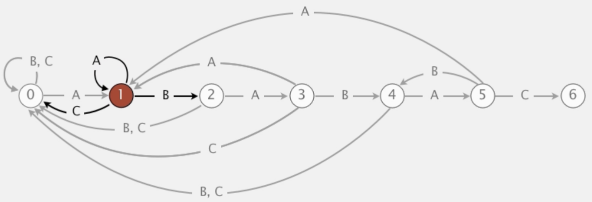
		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

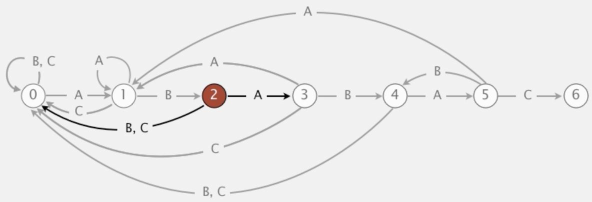
		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

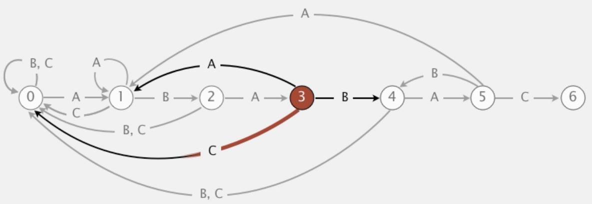
		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

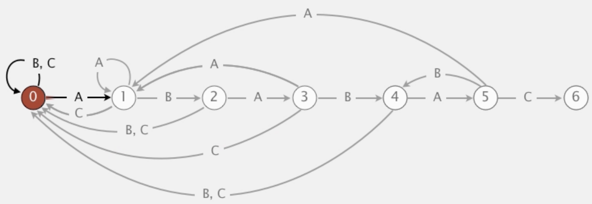
		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

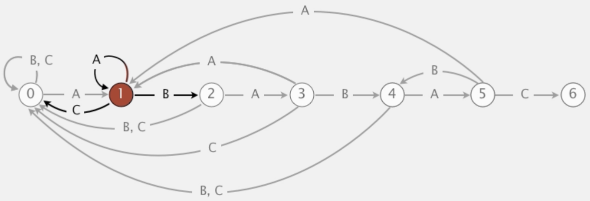
		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

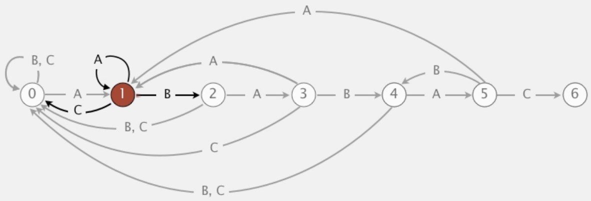
		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

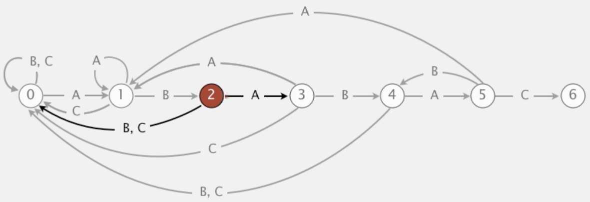
		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

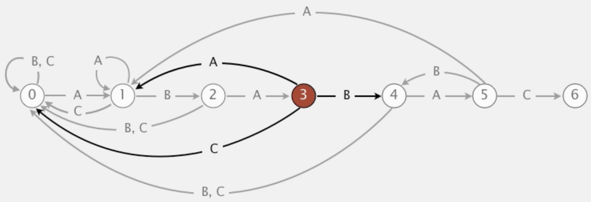
		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

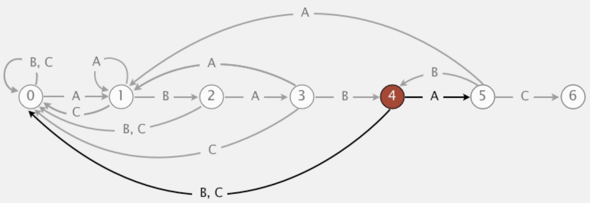
		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

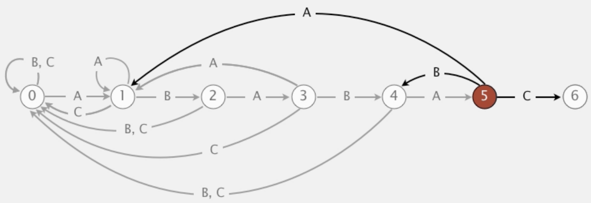
		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6

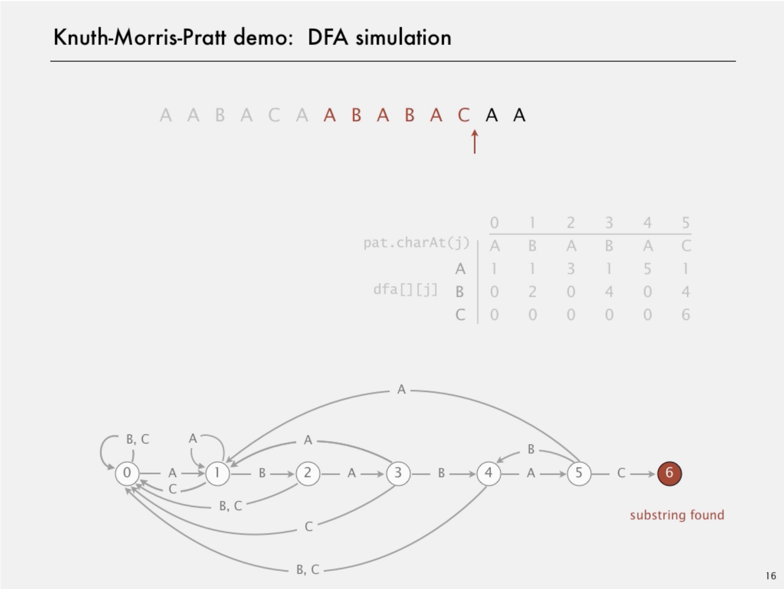


Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6





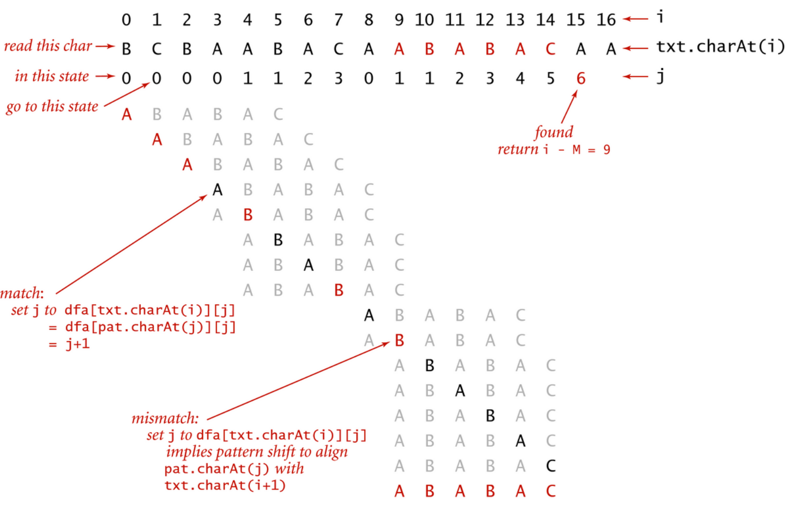
Algoritmo KMP

Retorna a posição a partir de onde `pat` ocorre em `txt` se `pat` não ocorre em `txt` retorna `n`.

```
public int search(String txt) {
   int i, n = txt.length();
   int j, m = pat.length();

   for (i = 0, j = 0; i < n && j < m; i++)
      j = dfa[txt.charAt(i)][j];

   if (j == m) return i - m;
   return n;
}
```



Trace of KMP substring search (DFA simulation) for A B A B A C

Invariantes

O método `search()` de KMP tem os seguintes invariantes.

Imediatamente antes do teste `i < n && j < m` vale que:

- `pat` não ocorre em `txt[0 . . i-1]`;
- `pat[0 . . k]` é diferente de `txt[i-k . . i]` para todo `k` no conjunto `j+1 . . m-1`; e
- `pat[0 . . j-1]` é igual a `txt[i-j . . i-1]`.

Autômato de estados determinístico (DFA)

A tabela `dfa[][]` representa uma máquina imaginária conhecida como **autômato de estados** (*deterministic finite-state automaton, DFA*).

Os estados do autômato correspondem aos índices `0 . . m-1` de `pat`.

Também há um estado *final* `m`.

Para cada estado e cada caractere do alfabeto, há uma transição que leva desse estado a um outro.

Construção do DFA

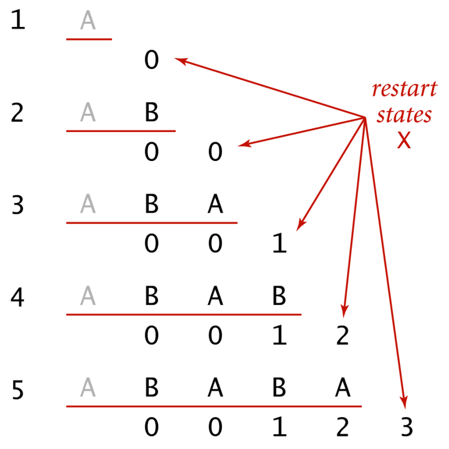
Para construir a tabela `dfa[][]` que representa o autômato podemos pré-processar o padrão `pat` desde que o alfabeto de `txt` seja conhecido.

Para qualquer caractere `c` do alfabeto e qualquer `j` em `0 . . m-1`, o valor de `dfa[c][j]` é

> *o comprimento do maior prefixo de `pat[0 . . j]` que é sufixo de `pat[0 . . j-1]+c`.*

Uma implementação literal dessa definição faria cerca de Rm^3 comparações entre caracteres para calcular a tabela `dfa[][]`, sendo `R` o número de caracteres do alfabeto.

Exemplo: padrão ABABAC e alfabeto A B C



DFA simulations to compute

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Include one state for each character in pattern (plus accept state).

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A						
	B						
	C						

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Include one state for each character in pattern (plus accept state).

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A						
	B						
	C						

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Match transition. If in state `j` and next char `c == pat.charAt(j)`, go to `j+1`.

first j characters of pattern have already been matched

next char matches

now first j+1 characters of pattern have been matched

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1		3		5	
	B		2		4		
	C						6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1		3		5	
	B		2		4		
	C						6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1		3		5	
	B	0	2		4		
	C	0					6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1		3		5	
	B	0	2		4		
	C	0					6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3		5	
	B	0	2		4		
	C	0	0				6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3		5	
	B	0	2		4		
	C	0	0				6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3		5	
	B	0	2	0	4		
	C	0	0	0			6

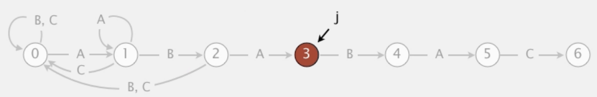
Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3		5	
	B	0	2	0	4		
	C	0	0	0			6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

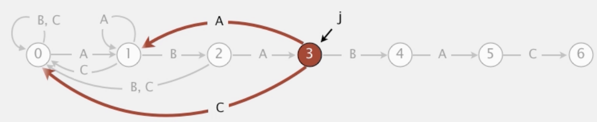


Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	
	B	0	2	0	4		
	C	0	0	0	0		6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

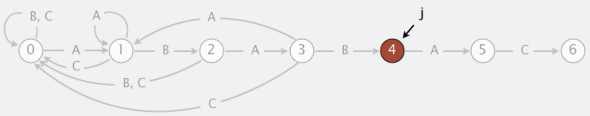


Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
	A	1	1	3	1	5	
dfa[][j]	B	0	2	0	4		
	C	0	0	0	0		6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

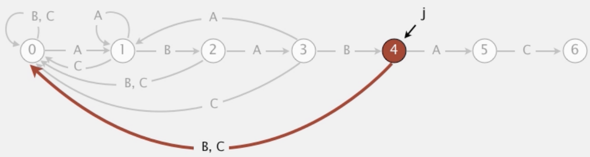


Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
	A	1	1	3	1	5	
dfa[][j]	B	0	2	0	4	0	
	C	0	0	0	0	0	6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

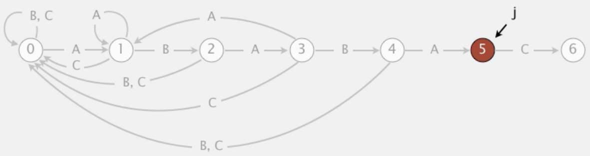


Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
	A	1	1	3	1	5	
dfa[][j]	B	0	2	0	4	0	
	C	0	0	0	0	0	6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

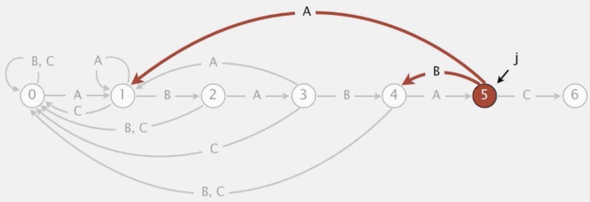


Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
	A	1	1	3	1	5	1
dfa[][j]	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6

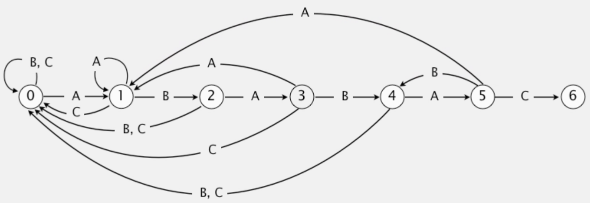
Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
	A	1	1	3	1	5	1
dfa[][j]	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Include one state for each character in pattern (plus accept state).

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
	A						
dfa[][j]	B						
	C						

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Match transition. For each state `j`, `dfa[pat.charAt(j)][j] = j+1`.

first j characters of pattern have already been matched

now first j+1 characters of pattern have been matched

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
	A	1		3		5	
dfa[][j]	B		2		4		
	C						6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For state `0` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][0] = 0`.

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
	A	1		3		5	
dfa[][j]	B	0	2		4		
	C	0					6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For state `0` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][0] = 0`.

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
	A	1		3		5	
dfa[][j]	B	0	2		4		
	C	0					6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of empty string

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
	A	1		3		5	
dfa[][j]	B	0	2		4		
	C	0					6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of empty string

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
	A	1	1	3		5	
dfa[][j]	B	0	2		4		
	C	0	0				6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of empty string

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
	A	1	1	3		5	
dfa[][j]	B	0	2		4		
	C	0	0				6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
	A	1	1	3		5	
dfa[][j]	B	0	2		4		
	C	0	0				6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
	A	1	1	3		5	
dfa[][j]	B	0	2	0	4		
	C	0	0	0			6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

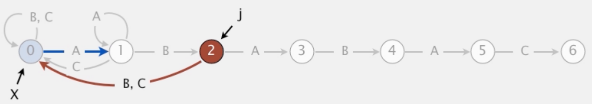
Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
	A	1	1	3		5	
dfa[][j]	B	0	2	0	4		
	C	0	0	0			6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



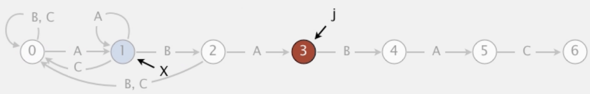
Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B A

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
	A	1	1	3		5	
dfa[][j]	B	0	2	0	4		
	C	0	0	0			6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



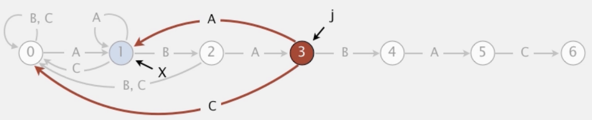
Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B A

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
	A	1	1	3	1	5	
dfa[][j]	B	0	2	0	4		
	C	0	0	0	0		6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



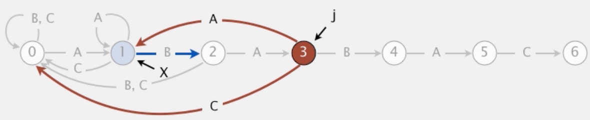
Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B A

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
	A	1	1	3	1	5	
dfa[][j]	B	0	2	0	4		
	C	0	0	0	0		6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



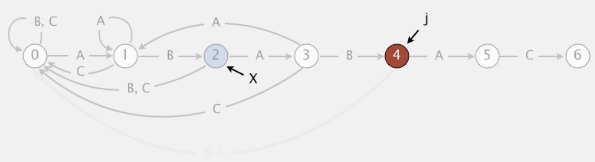
Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B A B

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	
	B	0	2	0	4		
	C	0	0	0	0		6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



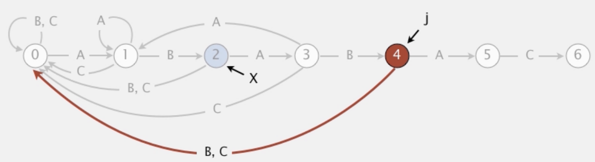
Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B A B

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	
	B	0	2	0	4	0	
	C	0	0	0	0	0	6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



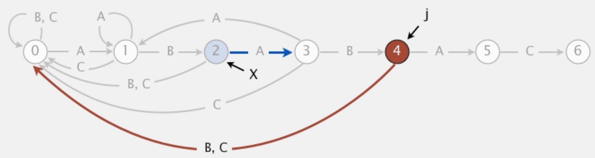
Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B A B

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	
	B	0	2	0	4	0	
	C	0	0	0	0	0	6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



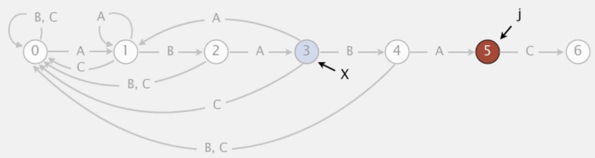
Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B A B A

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	
	B	0	2	0	4	0	
	C	0	0	0	0	0	6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



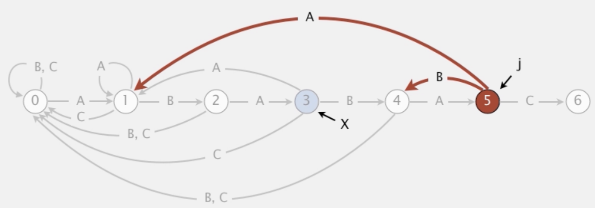
Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B A B A

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



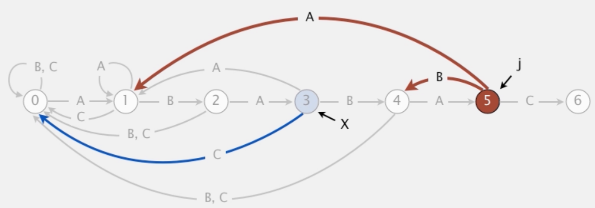
Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B A B A

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6

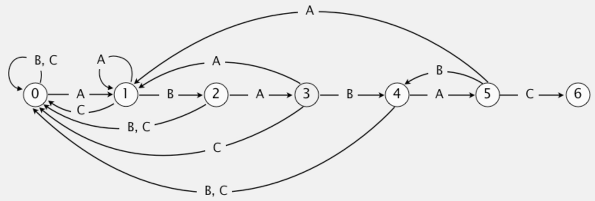
Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
	A	1	1	3	1	5	1
dfa[][j]	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



Construção da DFA

Trecho de código do KMP que constrói a DFA.

```
dfa[pat.charAt(0)][0] = 1;
for (int j = 1, X = 0; j < m; j++) {
    for (int c = 0; c < R; c++)
        // copie casos de conflito
        dfa[c][j] = dfa[c][X];

    // defina casos de casamento
    dfa[pat.charAt(j)][j] = j+1;

    // atualize estado de reinício
    X = dfa[pat.charAt(j)][X];
}
```

Construção da DFA: programação dinâmica

dfa[c][j] = maior k tal que
pat[0..k-1] = pat[j-k+1..j-1]+c

Para j = 0:
dfa[c][0] = 1, se pat[0] = c
0, se pat[0] ≠ c

Para j > 0:
dfa[c][j] = dfa[c][j-1]+1, se pat[j] = c
dfa[c][X], se pat[j] ≠ c,
onde X é o maior valor tal que
pat[0..X]=pat[..j-1]+c.

Classe KMP: esqueleto

```
public class KMP {
  private final int R = 256;
  private String pat;
  // dfa[][] representa o autômato
  private int[][] dfa;
  public KMP(String pat) { ...}
  public int search(String txt) {...}
}
```

KMP: construtor

```
public KMP(String pat) {
    this.pat = pat;
    int m = pat.length();
    dfa = new int[R][m];
    dfa[pat.charAt(0)][0] = 1;
    for (int j = 1, X = 0; j < m; j++){
        // calcule dfa[][j]
        for (int c = 0; c < R; c++)
            dfa[c][j] = dfa[c][X];
        dfa[pat.charAt(j)][j] = j+1;
        X = dfa[pat.charAt(j)][X];
    }
}
```

KMP: search()

```
public int search(String txt) {
  inti, n = txt.length();
  int j, m = pat.length();

  for (i = 0, j = 0; i < n && j < m; i++)
      j = dfa[txt.charAt(i)][j];

  if (j == m) return i - m;
  returnn;
}
```

Consumo de tempo

> O consumo de tempo do algoritmo KMP é $O(m + n)$.

Proposição. O algoritmo KMP examina não mais que m + n caracteres.

Se levarmos em conta o tamanho do alfabeto, R, o consumo de tempo para construir o DFA é mR.

Apêndice: Rabin-Karp

Fonte: `ADS: Boyer Moore String Search`

Referência: Algoritmo de Rabin-Karp para busca de substrings (PF)

Rabin-Karp

Criado por Richard M. Karp and Michael O. Rabin (1987).

O algoritmo também é conhecido como busca por impressão digital (*fingerprint search*).

Procura um segmento do texto que tenha o mesmo valor hash do padrão pat.

Usa hashing modular: módulo Q.

Se hash de pat é diferente do hash de todos os segmentos do texto então o padrão não ocorre no texto. A recíproca não vale: pode haver colisão.

Exemplo 1

pat.charAt(j)

j	0	1	2	3	4	
	2	6	5	3	5	% 997 = 613

txt.charAt(i)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3
0	3	1	4	1	5	% 997 = 508										
1		1	4	1	5	9	% 997 = 201									
2			4	1	5	9	2	% 997 = 715								
3				1	5	9	2	6	% 997 = 971							
4					5	9	2	6	5	% 997 = 442						
5						9	2	6	5	3	% 997 = 929			*match*		
6 ← *return* i = 6							2	6	5	3	5	% 997 = 613				

Basis for Rabin-Karp substring search

Exemplo 2

Procurar o padrão 12345 nos primeiros 100 mil dígitos da expansão decimal de π.

```
3141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307 8
```

```
31415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078
16406286208998628034825342117067982148086513282306647093844609550582
23172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442
88109756659334461284756482337867831652712019091456485669234603486104
54326648213393607260249141273724587006606315588174881520920962829254
09171536436789259036001133053054882046652138414695194151160943305727
03657595919530921861173819326117931051185480744623799627495673518857
52724891227938183011949129833673362440656643086021394946395224737190
70217986094370277053921717629317675238467481846766940513200056812714
52635608277857713427577896091736371787214684409012249534301465495853
71050792279689258923542019956112129021960864034418159813629774771309
96051870721134999999837297804995105973173281609631859502445945534690
83026425223082533446850352619311881710100031378387528865875332083814
20617177669147303598253490428755468731159562863882353787593751957781
85778053217122680661300192787661119590921642019893809525720106548586
32788659361533818279682303019520353018529689957736225994138912497217
75283479131515574857242454150695950829533116861727855889075098381754
63746493931925506040092770167113900984882401285836160356370766010471
01819429555961989467678374494482553797747268471040475346462080466842
59069491293313677028989152104752162056966024058038150193511253382430
03558764024749647326391419927260426992279678235478163600934172164121
99245863150302861829745557067498385054945885869269956909272107975093
02955321165344987202755960236480665499119881834797753566369807426542
52786255181841757467289097777279380008164706001614524919217321721477
23501414419735685481613611573525521334757418494684385233239073941433
34547762416862518983569485562099219222184272550254256887671790494601
65346680498862723279178608578438382796797668145410095388378636095068
00642251252051173929848960841284886269456042419652850222106611863067
```

Algoritmo de Horner

Para calcular o valor de hash de um string usamos o algoritmo de Horner:

```
private long hash(String key, int m) {
   long h = 0;
   for (int j = 0; j < m; j++)
      h = (h * R + key.charAt(j)) % Q;
   return h;
}
```

Exemplo

```
          pat.charAt(j)
 i     0  1  2  3  4
       2  6  5  3  5
 0     2  % 997 = 2                   R                Q
 1     2  6  % 997 = (2*10 + 6) % 997 = 26
 2     2  6  5  % 997 = (26*10 + 5) % 997 = 265
 3     2  6  5  3  % 997 = (265*10 + 3) % 997 = 659
 4     2  6  5  3  5  % 997 = (659*10 + 5) % 997 = 613
```

Computing the hash value for the pattern with Horner's method

Ideia chave: hash de substrings consecutivos

Seja $\mathtt{t_i} = \mathtt{txt[i]}$ e $\mathtt{x_i}$ = o inteiro $\mathtt{t_i t_{i-1} \ldots t_{i+m-1}}$

Assim,

$$\mathtt{x_{i-1}} = \mathtt{t_{i-1}R^{m-1}} + \mathtt{t_i R^{m-2}} + \cdots + \mathtt{t_{i+m-2}}$$
$$\mathtt{x_i} = \qquad\qquad + \mathtt{t_i R^{m-1}} + \cdots + \mathtt{t_{i+m-2}R} + \mathtt{t_{i+m-1}}$$

Logo, $\mathtt{x_i} = (\mathtt{x_{i-1}} - \mathtt{t_{i-1}R^{m-1}})\mathtt{R} + \mathtt{t_{i+m-1}}$

Portanto, o valor $\mathtt{hash}(\mathtt{x_i}) = \mathtt{x_i}\%\mathtt{Q}$ pode ser obtido a partir do valor de $\mathtt{hash}(\mathtt{x_{i-1}}) = \mathtt{x_{i-1}}\%\mathtt{Q}$ em tempo constante.

$$\mathtt{hash}(\mathtt{x_i}) = ((\mathtt{hash}(\mathtt{x_i}) - \mathtt{t_{i-1}R^{m-1}})\mathtt{R} + \mathtt{t_{i+m-1}})\%\mathtt{Q}$$

Exemplo

```
                 i    ...  2  3  4  5  6  7  ...
current value    1    4  1  5  9  2  6  5
    new value         4  1  5  9  2  6  5        text

                      4  1  5  9  2   current value
                 -    4  0  0  0  0
                         1  5  9  2   subtract leading digit
                            *  1  0   multiply by radix
                      1  5  9  2  0
                               +  6   add new trailing digit
                      1  5  9  2  6   new value
```

Key computation in Rabin-Karp substring search

Implementação

Escolha Q igual a um primo grande para evitar a chance de colisão.

Evite *overflow* e números negativos:

- use um tipo-de-dados capaz de armazenar $\mathtt{Q}^2$;
- na prática, escolha Q que caibe em um int ($2^{31} - 1$ é primo);
- faça as contas com long;
- tome o resto da divisão por Q depois de cada operação;
- some Q aos resultados intermediários quando necessário.

Exemplo: Q=997

$$\begin{aligned}(10000 + 535) \times 1000 &= (30 + 535) \times 3\\ &= 565 \times 3\\ &= 1695\\ &= 698\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}508 - 3 \times 10000 &= 508 - 3 \times (30)\\ &= 508 + 3 \times (-30)\\ &= 508 + 3 \times (997 - 30)\\ &= 508 + 3 \times 967\\ &= 508 + 907\\ &= 418\end{aligned}$$

Classe RabinKarp: esqueleto

```
public class RabinKarp {
  private String pat;
  private long patHash; // hash do padrão
  private int m;
  private long Q;
  private int R = 256;
  private long RM;
  public RabinKarp(String pat) {...}
  private long hash(String key, int m) {}
  private int search(String txt) {...}
  public boolean check(String txt, int i)
}
```

RabinKarp: construtor

```java
public RabinKarp(String pat) {
  this.pat= pat;
  m = pat.length();
  Q = longRandomPrime();
  RM = 1;
  // calcula R^(m-1)%Q
  for (int i = 1; i <= m-1; i++)
     RM = (R * RM) % Q;
  patHash = hash(pat, m);
}
```

RabinKarp: search()

```java
private int search(String txt) {
  int n = txt.length();
  long txtHash = hash(txt, m);
  if (patHash == txtHash
        && check(txt, 0)) return 0;
  for (int i= 1; i <= n- m; i++) {
     txtHash = (txtHash + Q -
          RM*txt.charAt(i-1) % Q) % Q;
     txtHash = (txtHash * R +
          txt.charAt(i+m-1)) % Q;
     if (patHash == txtHash
        && check(txt, i)) return i;
  }
  return n; } // não achou
```

RabinKarp: check()

```java
// versão Las Vegas
private boolean check(String txt, int i){
  for (int j = 0; j < m; j++)
     if (pat.charAt(j)!=txt.charAt(i+j))
        return false;
     return true;
}

// versão Monte Carlo
private boolean check(String txt, int i){
  return true
}
```

Exemplo

```
i    0  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15
     3  1  4  1  5  9  2  6  5  3  5  8  9  7  9  3
0    3  % 997 = 3                                   Q
1    3  1  % 997 = (3*10 + 1) % 997 = 31
2    3  1  4  % 997 = (31*10 + 4) % 997 = 314
3    3  1  4  1  % 997 = (314*10 + 1) % 997 = 150
4    3  1  4  1  5  % 997 = (150*10 + 5) % 997 = 508   RM  R
5       1  4  1  5  9  % 997 = ((508 + 3*(997 - 30))*10 + 9) % 997 = 201
6          4  1  5  9  2  % 997 = ((201 + 1*(997 - 30))*10 + 2) % 997 = 715
7             1  5  9  2  6  % 997 = ((715 + 4*(997 - 30))*10 + 6) % 997 = 971
8                5  9  2  6  5  % 997 = ((971 + 1*(997 - 30))*10 + 5) % 997 = 442
9                   9  2  6  5  3  % 997 = ((442 + 5*(997 - 30))*10 + 3) % 997 = 929   match
10 <- return i-M+1 = 6  2  6  5  3  5  % 997 = ((929 + 9*(997 - 30))*10 + 5) % 997 = 613
```

Rabin-Karp substring search example

Monte Carlo *versus* Las Vegas

A versão Monte Carlo consome tempo linear, mas pode dar uma resposta errada, com baixíssima probabilidade.

A versão Las Vegas sempre dá a resposta certa, mas pode consumir tempo não linear, com baixíssima probabilidade.

Qual algoritmo é melhor

Força bruta é bom se o padrão e o texto não tiverem muitas auto-repetições.

KMP é rápido e tem a vantagem de nunca retroceder sobre o texto, o que é importante se o texto for dado como um fluxo contínuo (*streaming*).

BoyerMoore é provavelmente o mais rápido na prática.

RabinKarp é rápido mas pode dar resultados errados, com baixíssima probabilidade.

Implementações

Veja as implementações de busca de substrings:

- `glibc`: Implementation of strstr in glibc
- `cpython`: The stringlib Library
- Boyer-Moore-Horspool algorithm

Próximo passo

Que acontece se o padrão não é apenas uma string mas um conjunto de strings descrito por uma **expressão regular** como `A*|(A*BA*BA*)*` ou `((A*B|AC)D)`, por exemplo?

Essa generalização do problema de busca é muito importante. A solução envolve o conceito de autômato de estados não determinístico.