MAC0323 Algoritmos de Estruturas de Dados II

Primeira Prova – 10 de abril de 2018

Nome: _____

Assinatura: _____

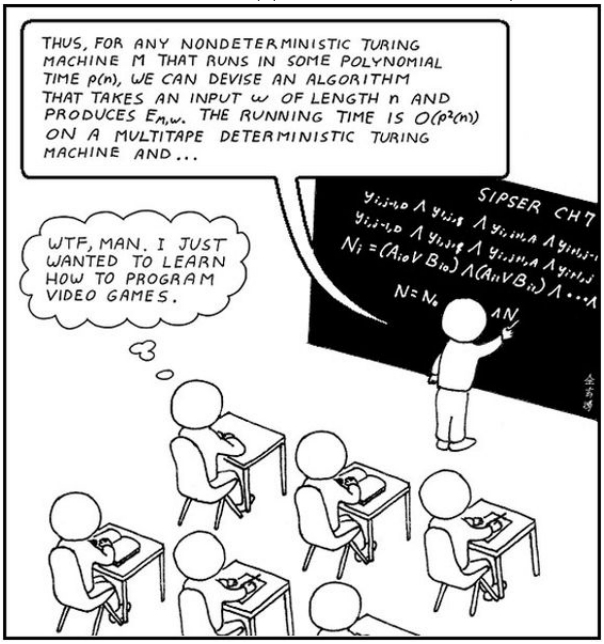
Nº USP: _____

Instruções:

1. Não destaque as folhas deste caderno. A prova pode ser feita a lápis.
2. A prova consta de 6 questões; Verifique antes de começar a prova se o seu caderno está completo.
3. Cuidado com a legibilidade.
4. Não é permitido o uso de folhas avulsas para rascunho, a consulta a livros, apontamentos, colegas ou equipamentos eletrônicos. Desligue o seu celular e qualquer equipamento que possa perturbar o andamento da prova.

DURAÇÃO DA PROVA: 100 minutos

Fonte: https://br.pinterest.com/



Questão	Valor	Nota
1	2,0	
2	1,0	
3	2,0	
4	2,5	
5	1,5	
6	1,0	
Total	10,0	

1. Union find (vale 2,0 pontos)

Circule as letras correspondente a configuração de vetores `id[]` (=`pai[]`) que **não podem** ocorrer durante a execução de uma sequência de operações `find()` e `union()` que utilizam o algoritmo *weighted quick union*.

	i:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A.	id[i]:	9	0	0	0	0	0	9	9	9	9
B.	id[i]:	8	0	4	0	0	4	0	4	2	0
C.	id[i]:	4	1	8	2	1	5	1	1	4	5
D.	id[i]:	3	3	6	9	3	6	3	4	1	9
E.	id[i]:	2	1	1	1	1	1	1	2	1	7

Resposta: A, B, C e D

A. os nós 1, 2, 3, 4, e 5 só podem ter se ligado a 0 quando este era raiz de uma árvore; portanto, 0 nunca poderia se ligar a 9 pois é raiz de uma árvore com mais nós.

B. o vetor id[] contém um ciclo: $8 \to 2 \to 4 \to 0 \to 8$.

C. a altura da árvore é 4 e contém $10 < 2^4$ nós.

D. o número de nós na árvore com raiz 9 (pai de 3) é menor que duas vezes o número de nós na subárvore com raiz 3.

E. a sequência de `union()` produzirá `id[]`: `2-0 1-8 7-9 0-9 8-5 4-1 1-9 3-8 5-6`.

2. Análise de algoritmos (vale 1,0 ponto)

Foram implementados três algoritmos: `algoritmo A, B` e `C`. As tabelas abaixo mostram o resultado de um estudo experimental dessas implementações. Nas tabelas, para alguns valores do tamanho `n` da entrada do problema são indicados os consumos de tempo dos algoritmos, em segundos.

n	`algoritmo A`
256	0.00
512	0.01
1024	0.03
2048	0.09
4096	0.37
8192	1.70
16384	7.08
32768	28.54
65536	113.55
131072	493.08

n	`algoritmo B`
256	0.00
512	0.00
1024	0.00
2048	0.00
4096	0.01
8192	0.01
16384	0.02
32768	0.04
65536	0.10
131072	0.23
262144	0.54
524288	1.31
1048576	3.06
2097152	7.07
4194304	15.84
8388608	35.85

n	`algoritmo C`
1000000	0.06
2000000	0.11
3000000	0.16
6000000	0.32
8000000	0.43
10000000	0.55
15000000	0.82
20000000	1.08
25000000	1.37
30000000	1.70

Apresente funções `A(n)`, `B(n)`, e `C(n)` para as quais você suspeita que o `algoritmos A, B` e `C` consomem tempo proporcional a `A(n)`, `B(n)`, e `C(n)`, respectivamente. Justifique a sua resposta em no máximo uma ou duas linhas para cada função.

Resposta.

`algoritmo A`: consumo de tempo é proporcional a $\mathtt{n}^2$ já que o consumo de tempo é multiplicado por aproximadamente 4 quando o tamanho da entrada dobra. (O algoritmo é o `Bubblesort`.)

`algoritmo B`: consumo de tempo é proporcional a $\mathtt{n} \lg \mathtt{n}$; esse é sutil, quando o tamanho da entrada dobra, o tempo é multiplicado por um pouco mais que 2. Respostas como linear, estão ok. (O algoritmo é o `Heapsort`.)

`algoritmo C`: consumo de tempo é proporcional a `n`: quando `n` dobra, o tempo também (aproximadamente) dobra.

3. Estruturas de dados (vale 2,0 pontos)

Suponha que a biblioteca `java.util.LinkedList` é implementada usando uma lista duplamente ligada e mantém uma referência para o primeiro (=`first`) e último (=`last`) nó da lista, junto com o seu número de itens.

```
public class LinkedList<Item> {
   private Node first; // primeiro nó da lista
   private Node last; // último nó da lista
   private int n;

   private class Node {
        private Item item; // o item
        private Node next; // referência para o próximo nó
        private Node prev; // referência para o nó anterior
   }
   [...]
}
```

(a) Quantos bytes de memória um objeto `Node` usa e quantos bytes um objeto `LinkedList` usa para armazenar `n` itens? Não inclua a memória para os próprios itens, mas inclua a memória usada pelas referências para eles.

`40 + 48n` bytes.

- Memória usada por um objeto `Node`:

  Um `Node` usa 48 bytes: 16 bytes de objeto *overhead* + 8 bytes subclasse *overhead* + 8 bytes para a referência a `Item` e 16 bytes pelas duas referências a `Node`.

- Memória usada por um objeto `LinkedList` com `n` itens:

  Um `LinkedList` com `n` itens usa 40 bytes: 16 bytes de objeto *overhead* + 16 bytes para as duas referências a `Node` + 4 bytes para um inteiro + 4 bytes de *padding* mais a memória para os `n` nós.

(b) Qual é a ordem de crescimento no *pior caso* para o tempo consumido pelas operações a seguir. Escreva a melhor resposta no espaço fornecido, usando uma das seguintes possibilidades.

$$1 \qquad \lg n \qquad \sqrt{n} \qquad n \qquad n \lg n \qquad n^2$$

`addFirst(item)`	insere `item` no início da lista	1
`get(i)`	retorna o item da posição `i` da lista	`n`
`set(i, item)`	troca o item da posição `i` da lista por `item`	`n`
`removeLast()`	remove e retorna o item no final da lista	1
`contains{item)`	`item` está na lista?	`n`

4. Heaps ternários (vale 2,5 pontos)

Um `3-heap` é um vetor que representa uma árvore ternária. Um `max-3-heap` é um 3-heap em que cada posição representa um item que possui uma chave de um conjunto comparável e a chave de cada nó é maior ou igual a chave de cada um de seus três possíveis filhos.

(a) Considere o `max-3-heap` a seguir em que os números indicam as chaves do item em cada nó.

–	88	33	77	66	10	30	25	23	60	75	14	21	50	9	7
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Represente no vetor a seguir o resultado da operação `delMax()` no `max-3-heap` acima. Faça um círculo em cada chave que muda de posição.

–	77	33	75	66	10	30	25	23	60	7	14	21	50	9	–
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Mudaram de posição 77, 75 e 7.

(b) Dado um índice `k` do vetor, quais são os índices dos possíveis três filhos de `k` em um `3-heap`?

Os índice são `3k-1` (filho esquerdo), `3k` (filho do meio) e `3k+1` (filho direito).

(c) Qual o número máximo de comparações de `delMax()` como uma função do número `n` de chaves no `max-3-heap`? Faça um círculo em torno da melhor resposta. Se você desejar, pode escrever uma linha para justificar a sua resposta.

~ 1 $\sim \log_2 n$ $\sim \log_3 n$ $\sim 2 \log_3 n$ $\sim 2 \log_2 n$ $\sim 3 \log_3 n$ $\sim n$

Resposta: $3 \log_3 n$

(d) Escreva um método

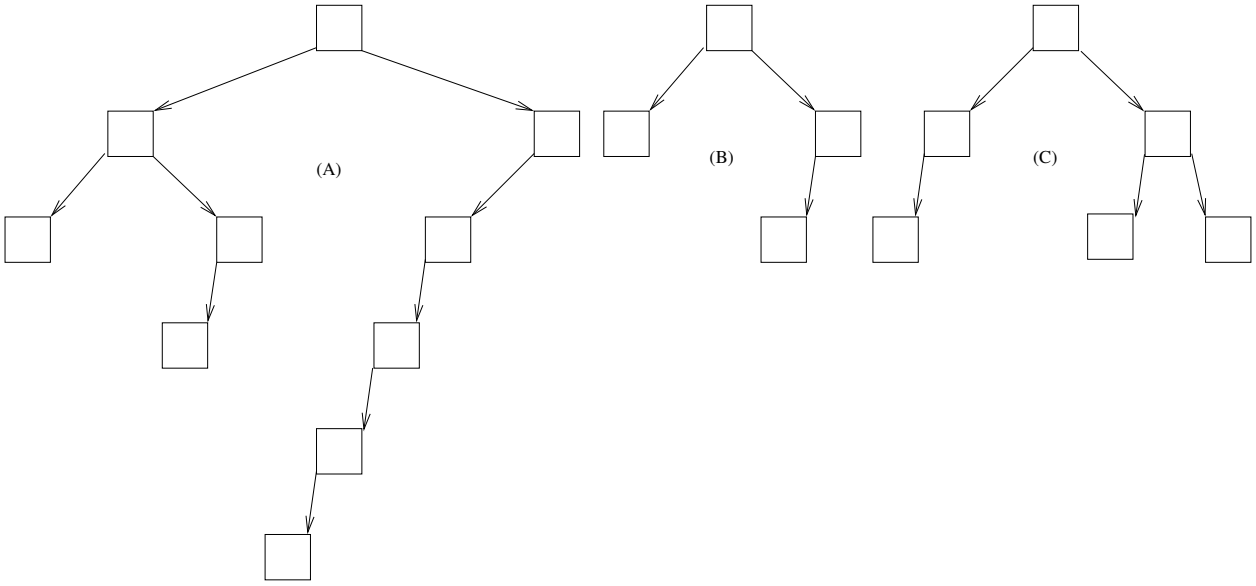
```
public static void sink(int p, int m, Comparable a[]) { ... }
```

que rearranja um o vetor `a[1 . . m]` de tal forma que o "subvetor" cuja raiz é `p` seja um `max-3-heap`.

```
public static void sink(int p, int m, Comparable a[]){
    int f  = 3*p-1; // filho da esquerda
    Item x = a[p];  // digamos que a é Item[]
    while (f <= m) {
        int fm = f + 1; // filho do meio
        int fd = f + 2; // filho da direita
        if (fm <= m && a[f].compareTo(a[fm]) < 0) f = fm;
        if (fd <= m && a[f].compareTo(a[fd]] < 0) f = fd;
        if (a[f].compareTo(x) < 0) break;
        a[p] = a[f]
        p = f;
        f = 3*p - 1;
    }
    a[p] = x;
}
```

5. Leftist heaps (vale 1,5 pontos)

(a) Quais das árvores abaixo são esquerdista? Justifique a sua resposta. Você pode rabiscar sobre as figura para justificar.

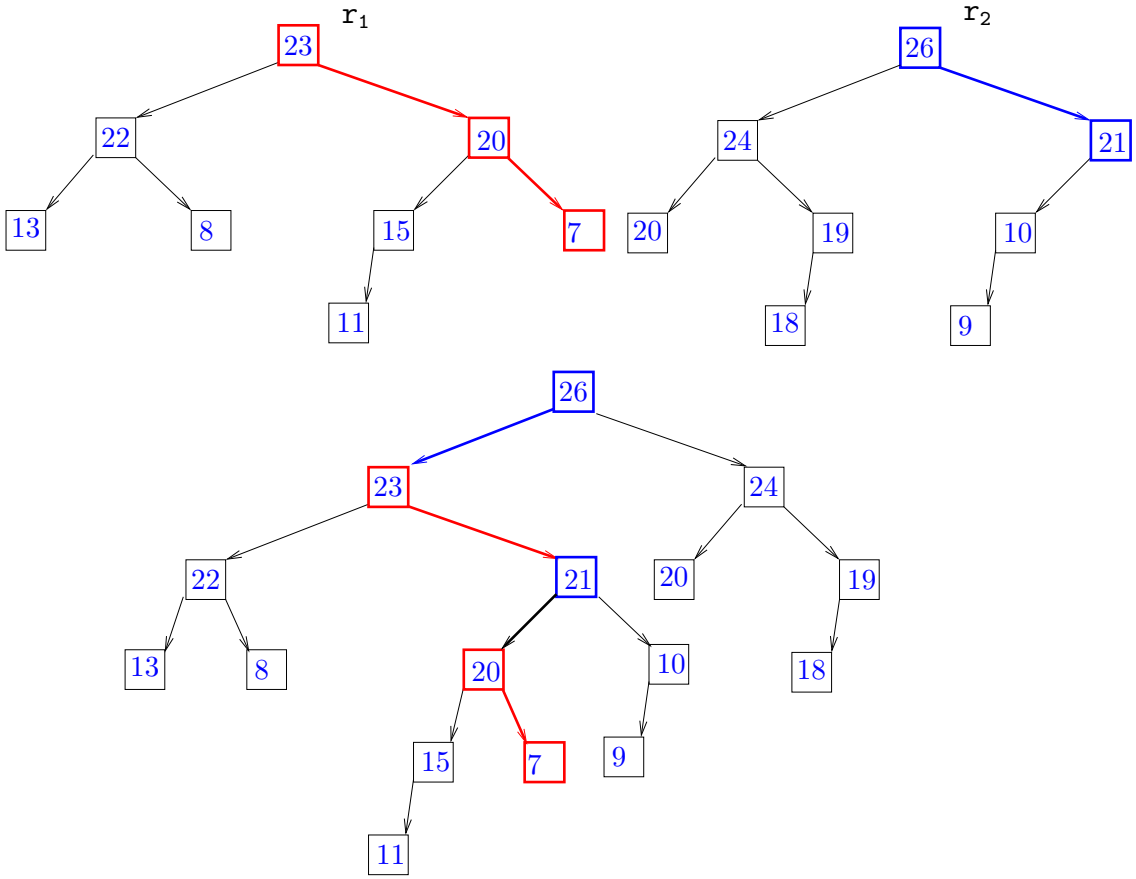


Resposta: Todas.

(b) Qual a propriedade estrutural fundamental de árvores esquerdista para a eficiência da união de heaps esquerdistas?

Um árvore esquerdista com `k` nós no caminho direitista ($\texttt{r} \to \texttt{r.right} \to \texttt{r.right.right} \to \cdots \texttt{null}$) tem pelo menos $2^{\texttt{k}} - 1$ nós.

(c) Desenhe o heap esquerdista resultante da **união** do dois heaps esquerdistas abaixo. Os valores nos nós representam as chaves do itens.



6. Skip lists (vale 1,0 ponto)

Desenhe o skip list resultante resultante da inclusão das chaves

```
9   3   6   7   19   12   17   21   26   25
```

em um skip list inicialmente vazio. Suponha que a sequência de níveis devolvidos pelas chamadas sucessivas do método `randLevel()` seja

```
1   4   1   2   1   2   1   1   3   1
```

Na sua ilustração destaque o caminho feito pela operação `get(21)`.