Conectividade dinâmica

Fonte: Wifi humor

1.5 Case Study: Union-Find

Leitura, vídeos, ...

Leitura: Case Study: Union-Find, S&W

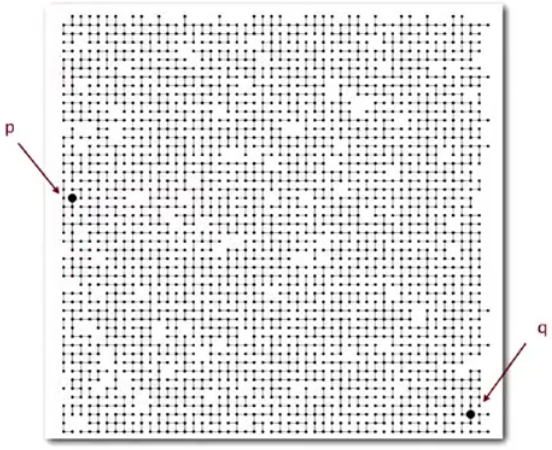
Vídeos: Union-find e Kruskal, Gabriel Russo, canal BCC e Union-find, Robert Sedgewick.

Considere uma coleção de conjuntos disjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Conjuntos são modificados ao longo do tempo.

Terminologia utiliza metáfora de redes: sítios/sites, conexão,...

Problema: p e q estão ligados?



Fonte: algs4

Conjuntos disjuntos

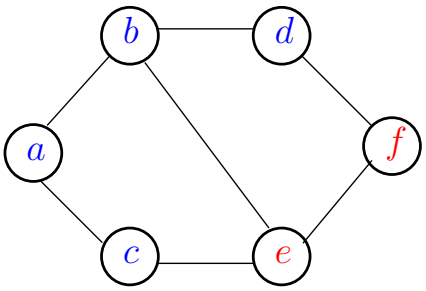
Seja $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ uma coleção de conjuntos disjuntos, ou seja,

$$S_i \cap S_j = \emptyset$$

para todo $i \neq j$.

Conjuntos disjuntos

Exemplo de coleção disjunta de conjuntos: **componentes conexos** de um grafo



componentes formam conjuntos disjuntos de vértices

$\{a, b, c, d\}$ $\{e, f, g\}$ $\{h, i\}$ $\{j\}$

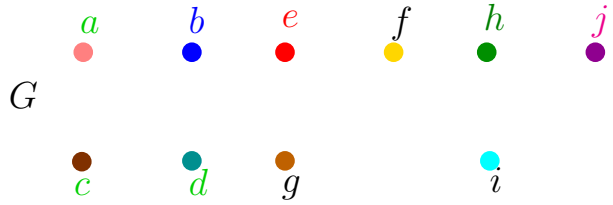
Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico

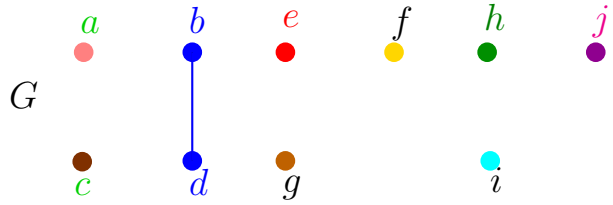


aresta	componentes
	$\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{d\}$ $\{e\}$ $\{f\}$ $\{g\}$ $\{h\}$ $\{i\}$ $\{$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico

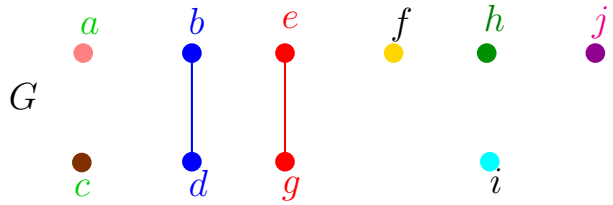


aresta	componentes
(b,d)	$\{a\}$ $\{b,d\}$ $\{c\}$ $\{e\}$ $\{f\}$ $\{g\}$ $\{h\}$ $\{i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico

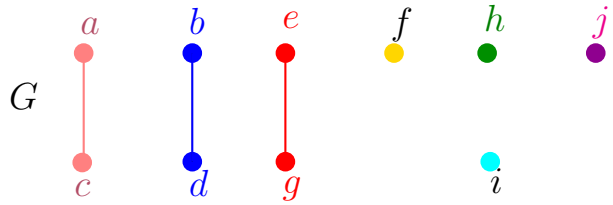


aresta	componentes
(e,g)	$\{a\}$ $\{b,d\}$ $\{c\}$ $\{e,g\}$ $\{f\}$ $\{h\}$ $\{i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico

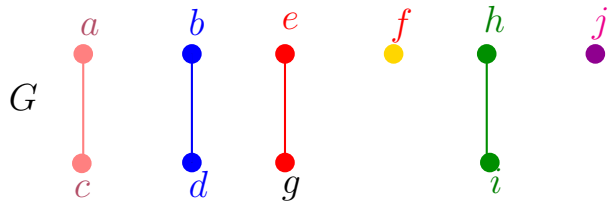


aresta	componentes
(a,c)	$\{a,c\}$ $\{b,d\}$ $\{e,g\}$ $\{f\}$ $\{h\}$ $\{i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico

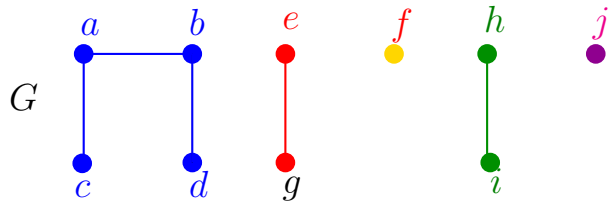


aresta	componentes
(h,i)	$\{a,c\}$ $\{b,d\}$ $\{e,g\}$ $\{f\}$ $\{h,i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico

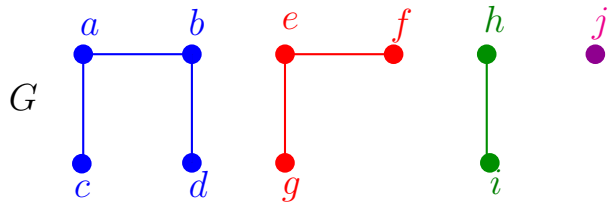


aresta	componentes
(a,b)	$\{a,b,c,d\}$ $\{e,g\}$ $\{f\}$ $\{h,i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico

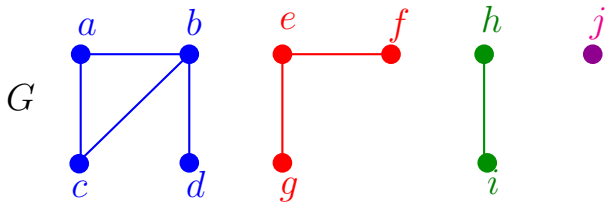


aresta	componentes
(e, f)	$\{a, b, c, d\}$ $\{e, f, g\}$ $\{h, i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico



aresta	componentes
(b, c)	$\{a, b, c, d\}$ $\{e, f, g\}$ $\{h, i\}$ $\{j\}$

Operações básicas

$\mathcal{S}$ coleção de conjuntos disjuntos.

Cada conjunto tem um **representante**.

MakeSet (x): x é elemento novo
$\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{\{x\}\}$

Operações básicas

$\mathcal{S}$ coleção de conjuntos disjuntos.

Cada conjunto tem um **representante**.

MakeSet (x): x é elemento novo
$\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{\{x\}\}$

Union (x, y): x e y em conjuntos diferentes
$\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} - \{S_x, S_y\} \cup \{S_x \cup S_y\}$

Operações básicas

$\mathcal{S}$ coleção de conjuntos disjuntos.

Cada conjunto tem um **representante**.

MakeSet (x): x é elemento novo
$\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{\{x\}\}$

Union (x, y): x e y em conjuntos diferentes
$\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} - \{S_x, S_y\} \cup \{S_x \cup S_y\}$
x está em S_x e y está em Sy

FindSet (x): devolve representante do conjunto que contém x

Connected-Components

Recebe um grafo G e contrói uma representação dos componentes conexos.

```
CONNECTED-COMPONENTS (G)
1  para cada vértice v de G faça
2      MAKESET (v)
3  para cada aresta (u, v) de G faça
4      se FINDSET (u) ≠ FINDSET (v)
5          então UNION (u, v)
```

Detalhes de implementação: objeto representando vértice u aponta para para a representação de u como coniunto. e vice-versa.

Consumo de tempo

$n :=$ número de vértices do grafo
$m :=$ número de arestas do grafo

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	$= \Theta(n)$
2	$= n \times$ consumo de tempo MAKESET
3	$= \Theta(m)$
4	$= 2m \times$ consumo de tempo FINDSET
5	$\leq n \times$ consumo de tempo UNION
total	$\leq \Theta(n+m) + n \times$ consumo de tempo MAKESET $+2m \times$ consumo de tempo FINDSET $+n \times$ consumo de tempo UNION

Same-Component

Decide se u e v estão no mesmo componente:

```
SAME-COMPONENT (u, v)
1  se FINDSET (u) = FINDSET (v)
2      então devolva SIM
3      senão devolva NÃO
```

Algoritmo de Kruskal

Encontra uma **árvore geradora mínima** (CLRS 23).

```
MST-KRUSKAL (G, w)   ▷ G conexo
−1  coloque arestas em ordem crescente de w
 0  A ← ∅
 1  para cada vértice v faça
 2      MAKESET (v)
 3  para cada aresta uv em ordem crescente de w faça
 4      se FINDSET (u) ≠ FINDSET (v)
 5          então UNION (u, v)
 8                A ← A ∪ {uv}
 9  devolva A
```

"Avô" de todos os algoritmos gulosos.

Conjuntos disjuntos dinâmicos

Sequência de operações MAKESET, UNION, FINDSET

M M M U F U U F U F F F U F

(n: M M M; m: toda a sequência)

Que estrutura de dados usar?

Compromissos (*trade-off*s).

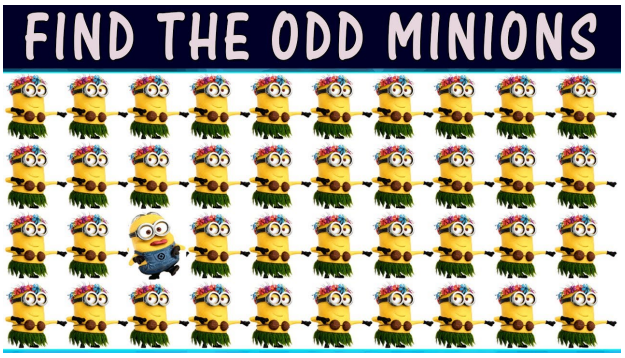
API

public class	UF	
	UF(int n)	inicializa n sites com nomes inteiros 0,...,n-1
void	union(int p,int q)	acrescenta ligação entre p e q
int	find(int p)	retorna id do componente de p
boolean	connected(int p,int q)	true se p e q estão no mesmo componente
int	count()	número de componentes

Cliente

```
public static void main(String[] args) {
  int n = StdIn.readInt();
  UF uf = new UF(n);
  while (!StdIn.isEmpty()) {
     int p = StdIn.readInt();
     int q = StdIn.readInt();
     if (uf.connected(p, q)) continue;
     uf.union(p, q);
     StdOut.println(p + " " + q);
  }
  StdOut.println(uf.count()+" comps");
}
```

Quick-find



Fonte: Youtube

1.5 Case Study: Union-Find

QuickFindUF

`QuickFindUF uf = new QuickFindUF(10);`

```
 uf ----+
        |
        V
+-----------------------------------------------------+
| id (private)                    count: 10 (private) |
|  |                                                  |
|  |    +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|  +--> | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |    |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|         0   1   2   3   4   5   6   7   8   9      |
|                                                     |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()       |
|                                                     |
+-----------------------------------------------------+
```

QuickFindUF

uf.find(3) retorna 3
uf.find(0) retorna 0

```
uf ----+
       |
       V
+-----------------------------------------------------+
| id (private)                    count: 10 (private) |
|  |                                                  |
|  |    +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|  +--> | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |    |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|         0   1   2   3   4   5   6   7   8   9      |
|                                                     |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()       |
|                                                     |
+-----------------------------------------------------+
```

QuickFindUF

uf.union(4, 3);

```
uf ----+
       |
       V
+-----------------------------------------------------+
| id (private)                    count:  9 (private) |
|  |                                                  |
|  |    +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|  +--> | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |    |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|         0   1   2   3   4   5   6   7   8   9      |
|                                                     |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()       |
|                                                     |
+-----------------------------------------------------+
```

QuickFindUF

uf.find(3) retorna 3
uf.union(3, 8);

uf.find(4) retorna 3

```
uf ----+
       |
       V
+-----------------------------------------------------+
| id (private)                    count:  8 (private) |
|  |                                                  |
|  |    +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|  +--> | 0 | 1 | 2 | 8 | 8 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |    |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|         0   1   2   3   4   5   6   7   8   9      |
|                                                     |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()       |
|                                                     |
+-----------------------------------------------------+
```

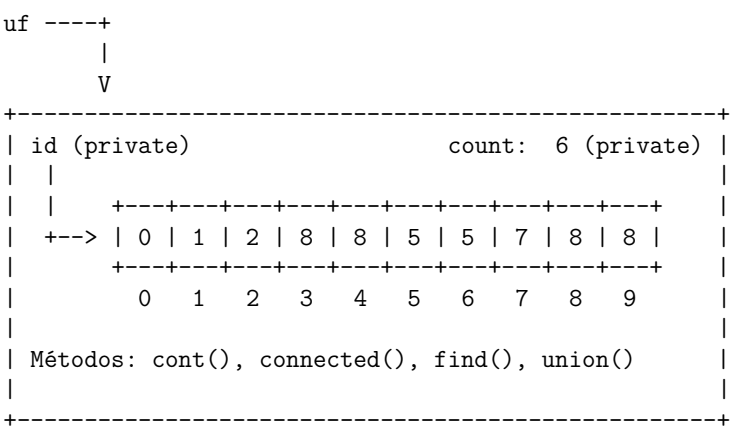
QuickFindUF

uf.union(6, 5);

```
uf ----+
       |
       V
+-----------------------------------------------------+
| id (private)                    count:  7 (private) |
|  |                                                  |
|  |    +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|  +--> | 0 | 1 | 2 | 8 | 8 | 5 | 5 | 7 | 8 | 9 |    |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|         0   1   2   3   4   5   6   7   8   9      |
|                                                     |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()       |
|                                                     |
+-----------------------------------------------------+
```

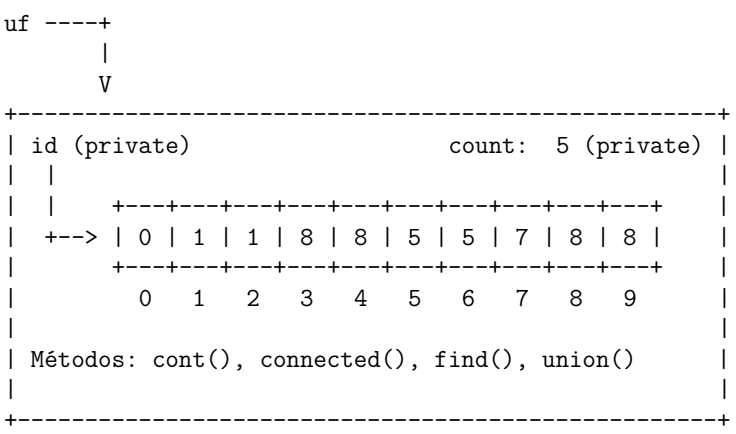
QuickFindUF

uf.union(9, 4);



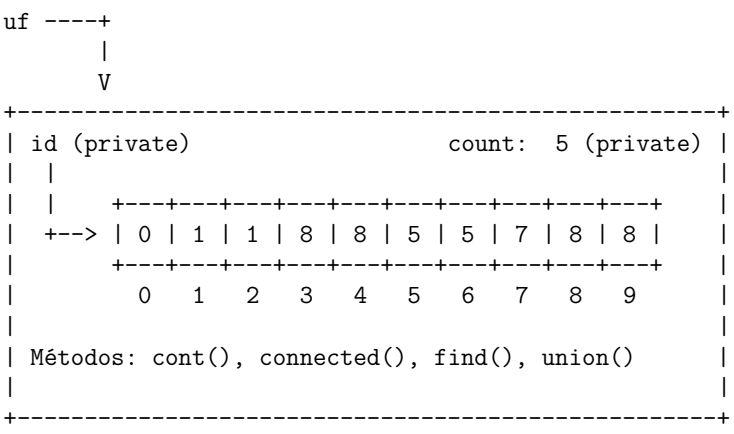
QuickFindUF

uf.union(2, 1);



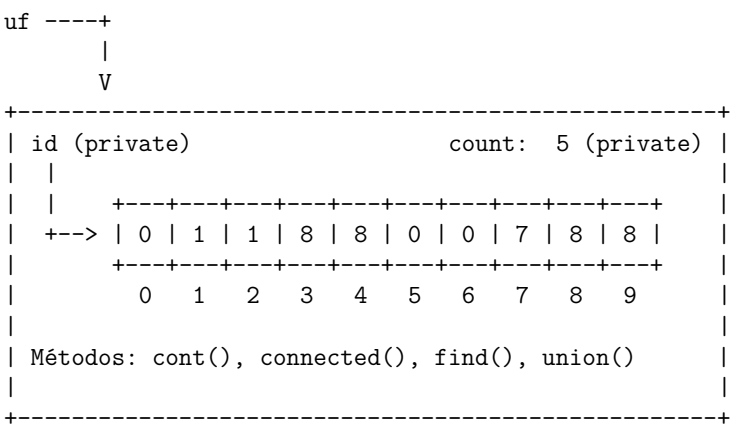
QuickFindUF

uf.union(8, 9);



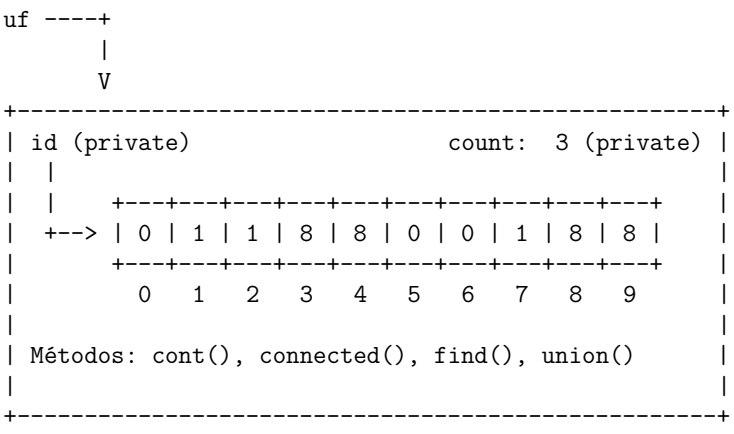
QuickFindUF

uf.union(5, 0);



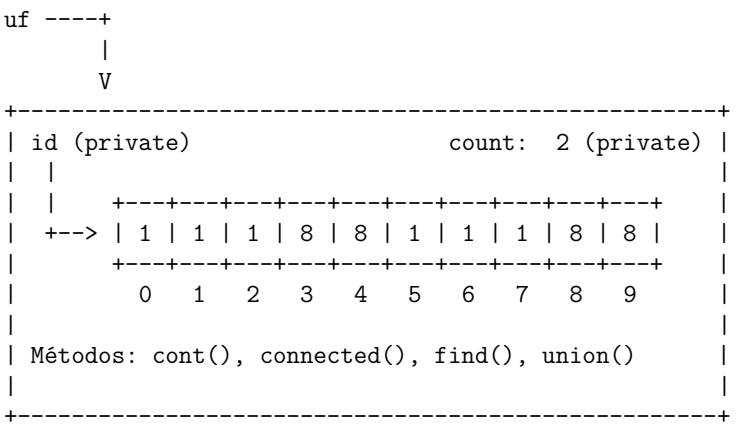
QuickFindUF

uf.union(7, 2);



QuickFindUF

uf.union(6, 1);



Class QuickFindUF: esqueleto

```
public class QuickFindUF {
   private int[] id;
   private int count; // no.  compts

   public QuickFindUF(int n) {...}
   public int count() {...}
   public boolean connected(int p, int q)
       {...}
   public int find(int p) {...}
   public void union(int p, int q) {...}
}
```

Class QuickFindUF: construtor e count()

```
public QuickFindUF(int n) {
   count = n;
   id = new int[n];
   for (int i = 0; i < n; i++) {
       id[i] = i;
   }
}

// retorna to número de componentes
public int count() {
   return count;
}
```

Class QuickFindUF: connected() e find()

```
// p e q estão no mesmo componente?
public boolean connected(int p, int q) {
   return find(p) == find(q);
}

// retorna o id do componente de p
public int find(int p) {
   return id[p];
}
```

Class QuickFindUF: union()

```
// une os componentes de p e q
public void union(int p, int q) {
   int pID = find(p);
   int qID = find(q);
   if (pID == qID) return ;
   for (int i = 0; i < id.length; i++) {
       if (id[i] == pID) id[i] = qID;
   }
   count--;
}
```

Consumo de tempo

UF(n)	$\Theta(n)$
union(p, q)	$O(n)$
find(p)	$\Theta(1)$

Uma sequência de m operações pode consumir tempo $\Theta(m^2)$ no pior caso.

Consumo de tempo amortizado de cada operação é $O(m)$.

Hmm. Em union() seria razoável alterarmos o menor número possível de posições do vetor id. Para isso precisamos saber qual conjunto tem o menor número de itens...

Experimentos

```
% java Driver < tinyUF.txt
2 components
0.002seg

% java Driver < mediumUF.txt
3 components
0.025seg

% java Driver < largeUF.txt
:-(
```

Quick-union

1.5 Case Study: Union-Find

QuickUnionUF

A **ideia** é trocar o indicador `id[]` do componente por um indicador do `pai[]` do sítio.
Por sua vez, se p é um sítio,
`pai[pai[p]]` é o avô de p
`pai[pai[pai[p]]]` é o bisavô de p,
`pai[pai[pai[pai[p]]]]` é o tataravô,
...

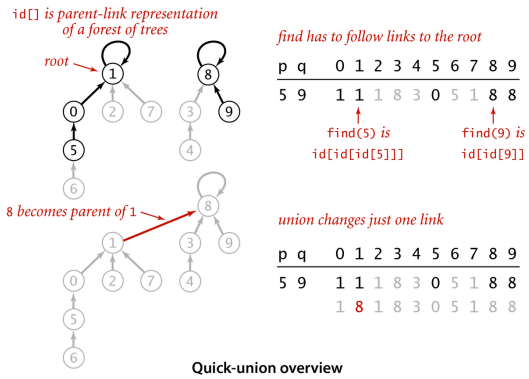
QuickUnionUF

O **representante** ou **nome** de um componente será o sítio que é o pai de si mesmo. Hmm. Aqui a metáfora fica meio estranha...

É intuitivo representarmos a estrutura através de um conjunto de árvores disjuntas (= **floresta**) onde as raizes das árvores são os sítios p tais que

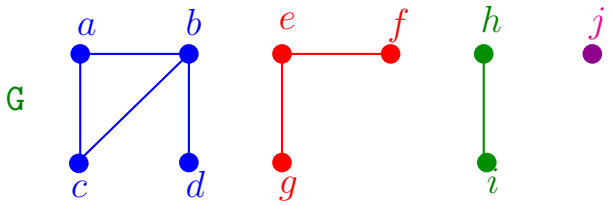
p == $pai[p]$.

Estrutura *disjoint-set forest*



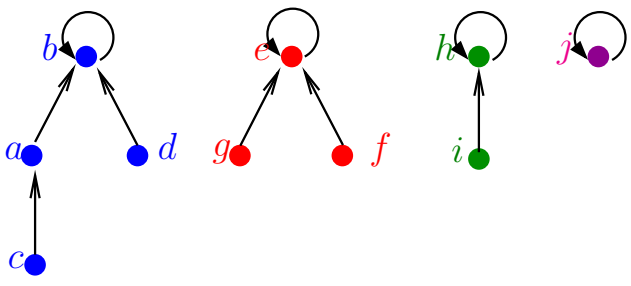
Quick-union overview

Estrutura *disjoint-set forest*



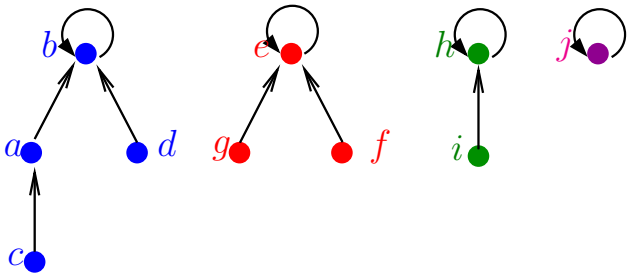
- cada conjunto tem uma `raiz`, que é o seu representate
- cada nó p tem um `pai`
- `pai`[p] = p se e só se p é uma raiz

Estrutura *disjoint-set forest*



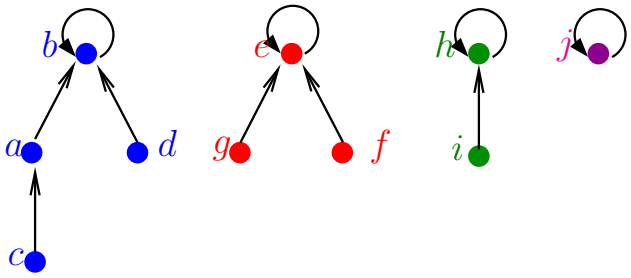
- cada conjunto tem uma `raiz`
- cada nó p tem um `pai`
- `pai`[p] = p se e só se p é uma raiz

MakeSet e FindSet



MAKESET(p)
1 $pai[p] \leftarrow p$

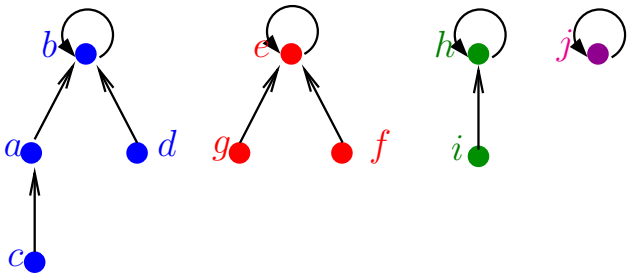
MakeSet e FindSet



MAKESET(p)
1 $pai[p] \leftarrow p$

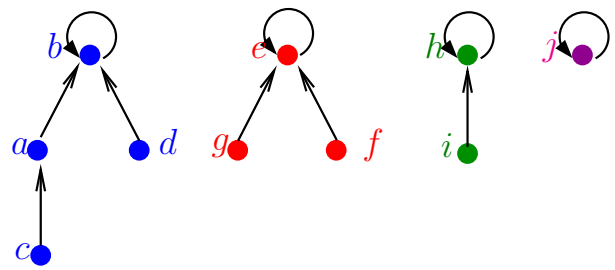
FINDSET(p)
1 **enquanto** pai[p] $\neq$ p **faça**
2 p $\leftarrow$ pai[p]
3 **devolva** p

FindSet



FINDSET(p)
1 **se** pai[p] = p
2 **então devolva** p
3 **senão devolva** FINDSET (pai[p])

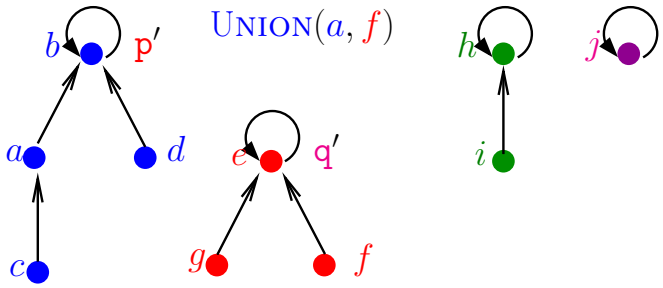
Union



UNION(p, q)
1 $p' \leftarrow$ FINDSET (p)
2 $q' \leftarrow$ FINDSET (q)
3 pai[q'] $\leftarrow$ p'

Union

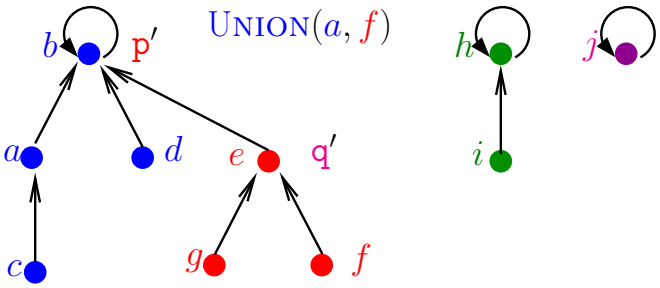
UNION(a, f)



UNION(p, q)
1 $p' \leftarrow$ FINDSET (p)
2 $q' \leftarrow$ FINDSET (q)
3 pai[q'] $\leftarrow$ p'

Union

UNION(a, f)



UNION(p, q)
1 $p' \leftarrow$ FINDSET (p)
2 $q' \leftarrow$ FINDSET (q)
3 pai[q'] $\leftarrow$ p'

MakeSet, Union e FindSet

MakeSet(p)

```
1  pai[p] ← p
```

Union(p, q)

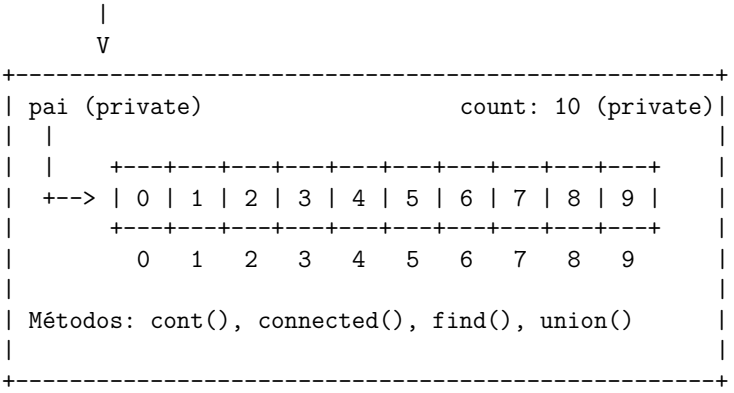
```
1  p' ← FindSet (p)
2  q' ← FindSet (q)
3  pai[q'] ← p'
```

FindSet(p)

```
1  se pai[p] = p
2        então devolva p
3        senão devolva FindSet (pai[p])
```

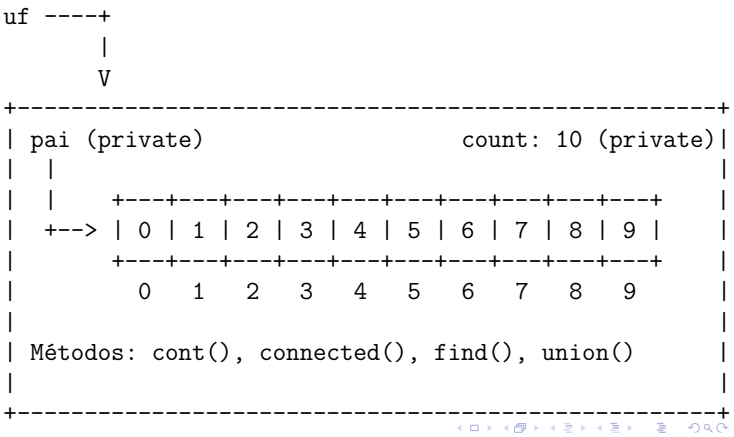
QuickUnionUF

`QuickUnionUF uf = new QuickUnionUF(10);`



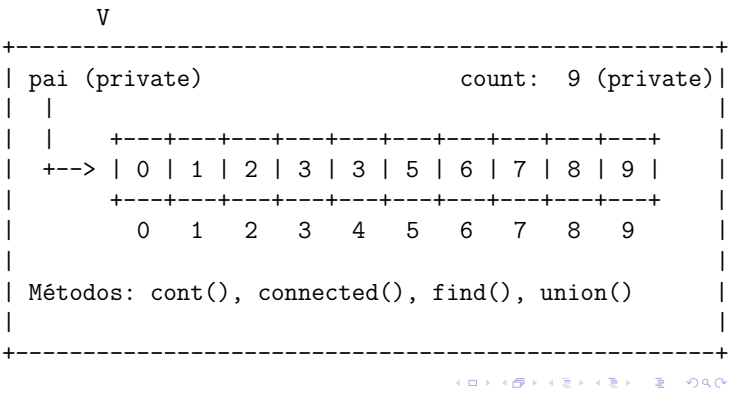
QuickUnionUF

uf.find(3) retorna 3
uf.find(0) retorna 0



QuickUnionUF

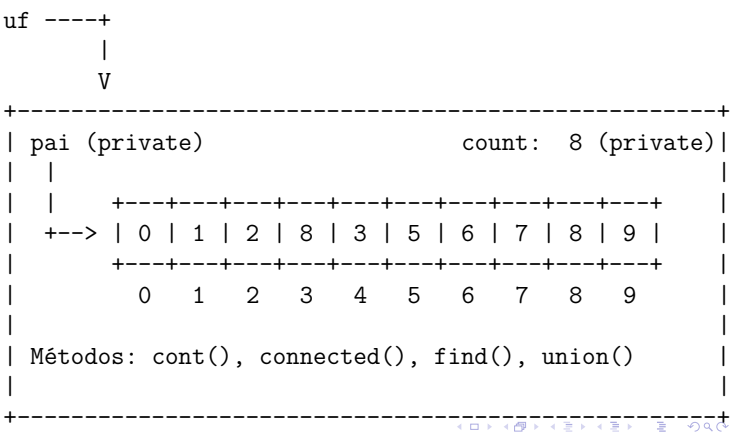
uf.union(4, 3);



QuickUnionUF

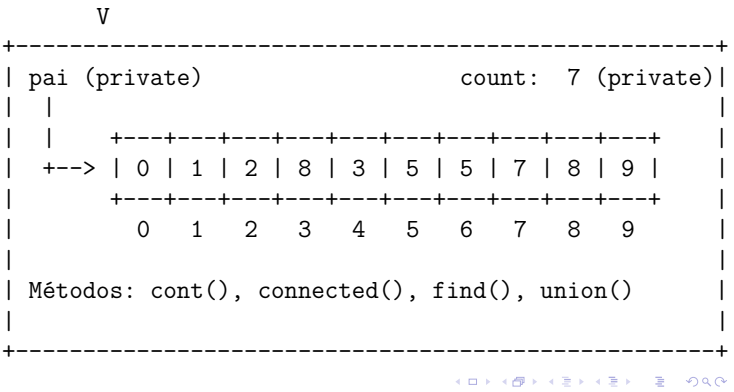
uf.find(3) retorna 3
uf.union(3, 8);

uf.find(4) retorna 3



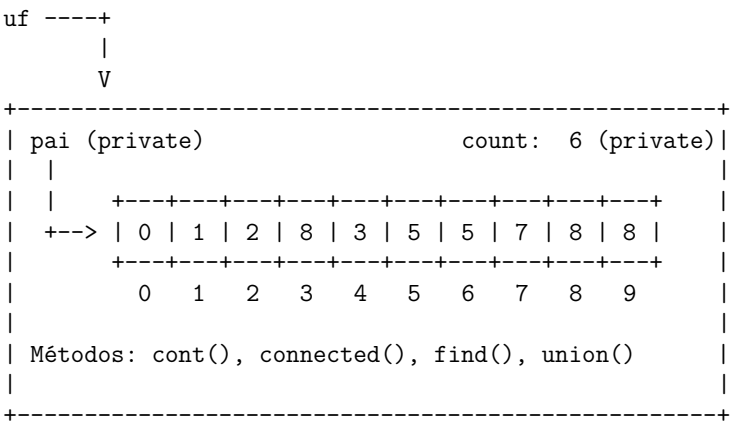
QuickUnionUF

uf.union(6, 5);



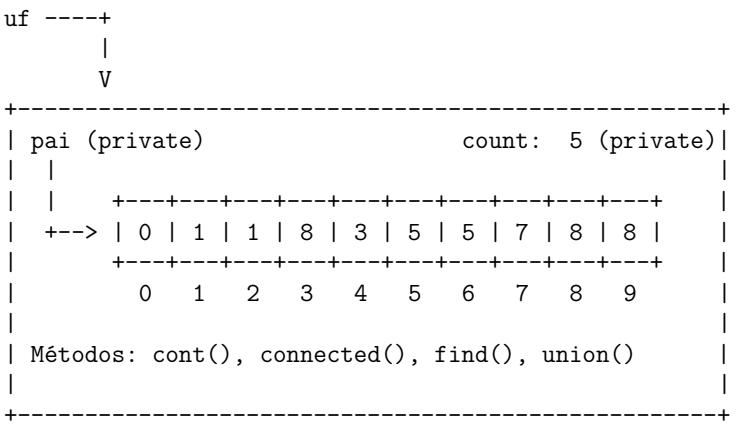
QuickUnionUF

uf.union(9, 4);



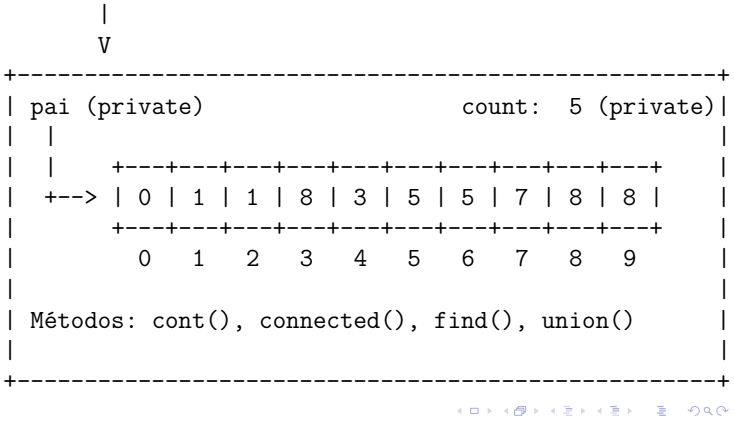
QuickUnionUF

uf.union(2, 1);



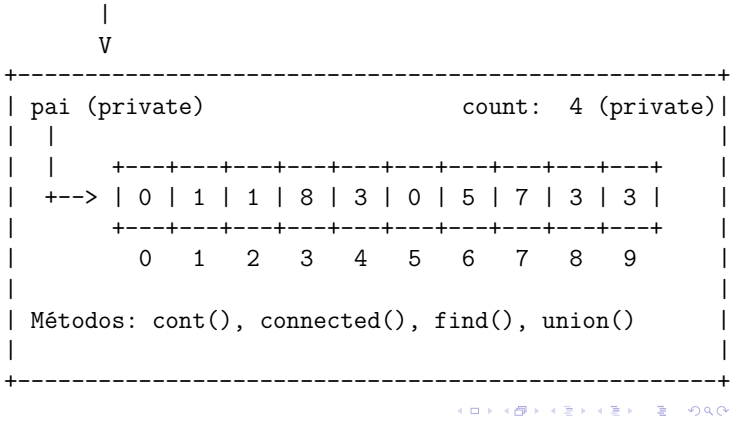
QuickUnionUF

uf.union(8, 9);



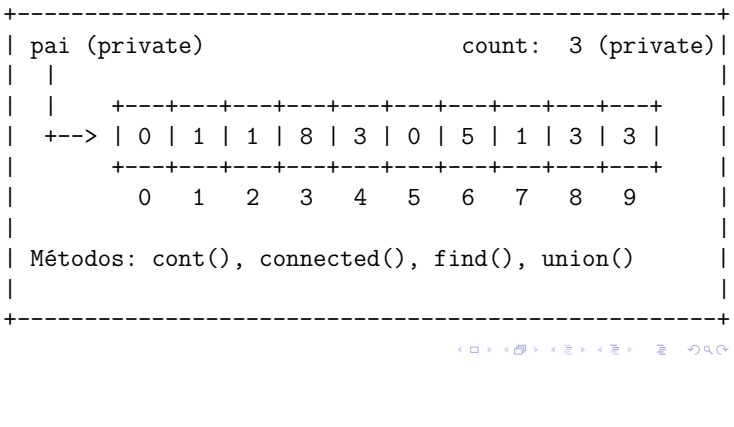
QuickUnionUF

uf.union(5, 0);



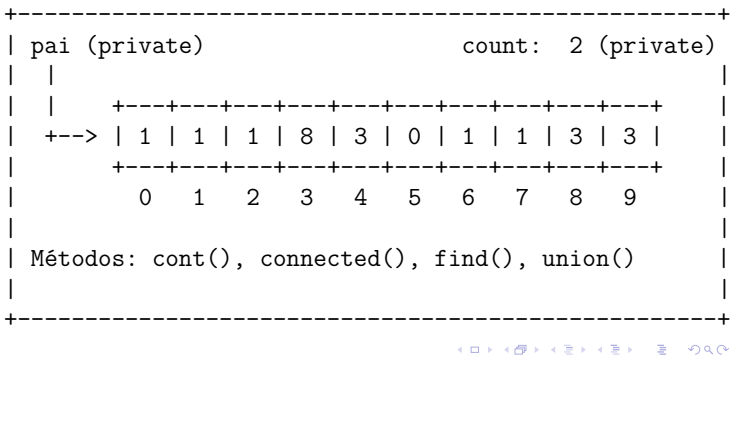
QuickUnionUF

uf.union(7, 2);



QuickUnionUF

uf.union(6, 1);



Class QuickUnionUF: esqueleto

```
public class QuickUnionUF {
   private int[] pai;
   private int count; // no.  compts

   public QuickUnionUF(int n) {...}
   public int count() {...}
   public boolean connected(int p, int q)
       {...}
   public int find(int p) {...}
   public void union(int p, int q) {...}
}
```

Class QuickUnionUF: construtor e count()

```
public QuickUnionUF(int n) {
   count = n;
   pai = new int[n];
   for (int i = 0; i < n; i++) {
       pai[i] = i;
   }
}

// retorna to número de componentes
public int count() {
   return count;
}
```

QuickUnionUF: connected() e find()

```
// p e q estão no mesmo componente?
public boolean connected(int p, int q) {
   return find(p) == find(q);
}

// retorna o id do componente de p
public int find(int p) {
   while (p != pai[p]) p = pai[p];
   return p;
}
```

Class QuickUnionUF: union()

```
// une os componentes de p e q
public void union(int p, int q) {
   int pRoot = find(p);
   int qRoot = find(q);
   if (pRoot == qRoot) return ;
   pai[pRoot] = qRoot;
   count--;
}
```

Consumo de tempo

UF(n)	$\Theta(n)$
find(p)	$O(n)$
union(p, q)	$O(n)$

$$\underbrace{\underbrace{M\ M\ M}_{n}\ U\ F\ U\ U\ F\ U\ F\ F\ F\ U\ F}_{m}$$

Custo total da sequência:

$$n\,\Theta(1) + m\,O(n) + n\,O(n) = O(mn)$$

Experimentos

```
% java Driver < tinyUF.txt
2 components
0.002seg

% java Driver < mediumUF.txt
3 components
0.032seg

% java Driver < largeUF.txt
:-(
```

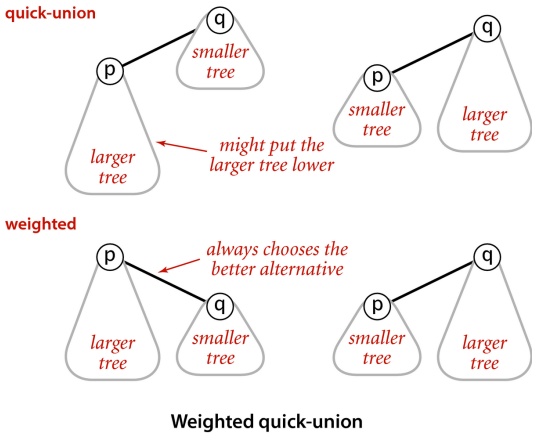
Weighted-Quick-union

1.5 Case Study: Union-Find

WeightedQuickUnionUF

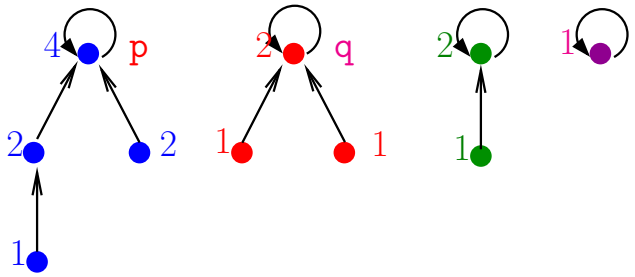
Ideia, ligar a raiz da árvore com menos sítios na raiz da árvore com mais sítios.
Isso seria a política natural para tornarmos o quick-find mais eficiente.

WeightedQuickUnionUF



Weighted quick-union

union by size

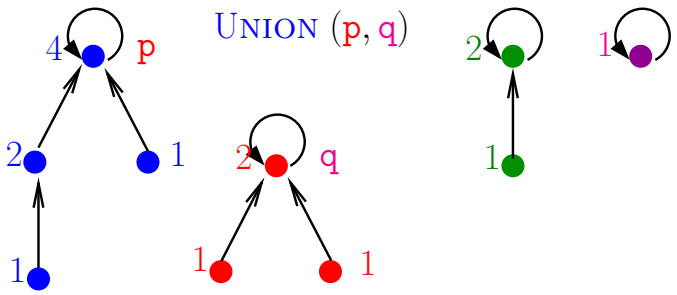


sz[p] = nós em p

MakeSet (p)

```
1  pai[p] ← p
2  sz[p] ← 0
```

union by size



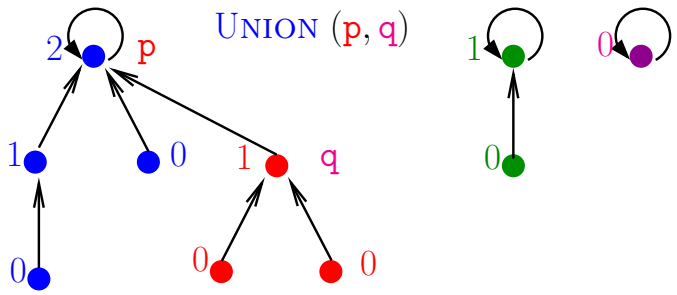
Union (p, q)

sz[p] = nós em p

MakeSet (p)

```
1  pai[p] ← p
2  sz[p] ← 0
```

union by size



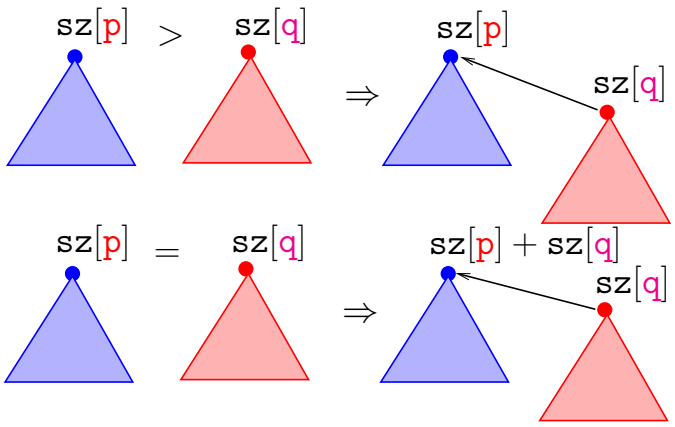
Union (p, q)

sz[p] = posto do nó p

MakeSet (p)

```
1  pai[p] ← p
2  sz[p] ← 0
```

union by size



union by size

UNION (p, q) ▷ com "union by size"

```
1  p' ← FINDSET (p)
2  q' ← FINDSET (q)      ▷ supõe que p' ≠ q'
3  se sz[p'] > sz[q']
4        então pai[q'] ← p'
5              sz[p'] ← sz[p'] + sz[q']
6        senão pai[p'] ← q'
7              sz[q'] ← sz[q'] + sz[p']
```

WeightedQuickUnionUF

```
WeightedQuickUnionUF uf = new WeightedQuickUnionUF(10);
```

```
uf
+-------------------------------------------------+
| pai (private)                 count: 0 (private)|
|  |                                              |
|  |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|  +--> | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |  |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|        0   1   2   3   4   5   6   7   8   9    |
|                                                 |
| sz (private)                                    |
|  |                                              |
|  |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|  +--> | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|        0   1   2   3   4   5   6   7   8   9    |
|                                                 |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()   |
+-------------------------------------------------+
```

WeightedQuickUnionUF

uf.find(3) retorna 3 uf.find(0) retorna 0

```
uf
+-------------------------------------------------+
| pai (private)                count: 10 (private)|
|  |                                              |
|  |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|  +--> | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |  |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|        0   1   2   3   4   5   6   7   8   9    |
|                                                 |
| sz (private)                                    |
|  |                                              |
|  |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|  +--> | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|        0   1   2   3   4   5   6   7   8   9    |
|                                                 |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()   |
+-------------------------------------------------+
```

WeightedQuickUnionUF

uf.union(4, 3);

```
uf
+-------------------------------------------------+
| pai (private)                 count: 9 (private)|
|  |                                              |
|  |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|  +--> | 0 | 1 | 2 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |  |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|        0   1   2   3   4   5   6   7   8   9    |
|                                                 |
| sz (private)                                    |
|  |                                              |
|  |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|  +--> | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|        0   1   2   3   4   5   6   7   8   9    |
|                                                 |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()   |
+-------------------------------------------------+
```

WeightedQuickUnionUF

uf.union(3, 8);

```
uf
+-------------------------------------------------+
| pai (private)                 count: 8 (private)|
|  |                                              |
|  |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|  +--> | 0 | 1 | 2 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 4 | 9 |  |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|        0   1   2   3   4   5   6   7   8   9    |
|                                                 |
| sz (private)                                    |
|  |                                              |
|  |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|  +--> | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|        0   1   2   3   4   5   6   7   8   9    |
|                                                 |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()   |
+-------------------------------------------------+
```

WeightedQuickUnionUF

uf.union(6, 5);

```
uf
+-------------------------------------------------+
| pai (private)                 count:  7 (private) |
|  |                                              |
|  |    +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|  +--> | 0 | 1 | 2 | 4 | 4 | 6 | 6 | 7 | 4 | 9 |    |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|         0   1   2   3   4   5   6   7   8   9      |
|                                                    |
| sz (private)                                       |
|  |                                                 |
|  |    +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|  +--> | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |    |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|         0   1   2   3   4   5   6   7   8   9      |
|                                                    |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()      |
+-------------------------------------------------+
```

WeightedQuickUnionUF

uf.union(9, 4);

```
uf
+-------------------------------------------------+
| pai (private)                 count:  6 (private)|
|  |                                              |
|  |    +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|  +--> | 0 | 1 | 2 | 4 | 4 | 6 | 6 | 7 | 4 | 4 |    |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|         0   1   2   3   4   5   6   7   8   9      |
|                                                    |
| sz (private)                                       |
|  |                                                 |
|  |    +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|  +--> | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |    |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|         0   1   2   3   4   5   6   7   8   9      |
|                                                    |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()      |
+-------------------------------------------------+
```

WeightedQuickUnionUF

uf.union(2, 1);

```
uf
+-------------------------------------------------+
| pai (private)                 count:  5 (private)|
|  |                                              |
|  |    +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|  +--> | 0 | 1 | 1 | 4 | 4 | 6 | 6 | 7 | 4 | 4 |    |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|         0   1   2   3   4   5   6   7   8   9      |
|                                                    |
| sz (private)                                       |
|  |                                                 |
|  |    +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|  +--> | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |    |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|         0   1   2   3   4   5   6   7   8   9      |
|                                                    |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()      |
+-------------------------------------------------+
```

WeightedQuickUnionUF

uf.union(8, 9);

```
uf
+-------------------------------------------------+
| pai (private)                 count:  4 (private)|
|  |                                              |
|  |    +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|  +--> | 0 | 1 | 1 | 4 | 4 | 6 | 6 | 7 | 4 | 4 |    |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|         0   1   2   3   4   5   6   7   8   9      |
|                                                    |
| sz (private)                                       |
|  |                                                 |
|  |    +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|  +--> | 1 | 2 | 1 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |    |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|         0   1   2   3   4   5   6   7   8   9      |
|                                                    |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()      |
+-------------------------------------------------+
```

WeightedQuickUnionUF

uf.union(5, 0);

```
uf
+-------------------------------------------------+
| pai (private)                 count:  3 (private)|
|  |                                              |
|  |    +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|  +--> | 6 | 1 | 1 | 4 | 4 | 6 | 6 | 7 | 4 | 4 |    |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|         0   1   2   3   4   5   6   7   8   9      |
|                                                    |
| sz (private)                                       |
|  |                                                 |
|  |    +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|  +--> | 1 | 2 | 1 | 1 | 4 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |    |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|         0   1   2   3   4   5   6   7   8   9      |
|                                                    |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()      |
+-------------------------------------------------+
```

WeightedQuickUnionUF

uf.union(7, 2);

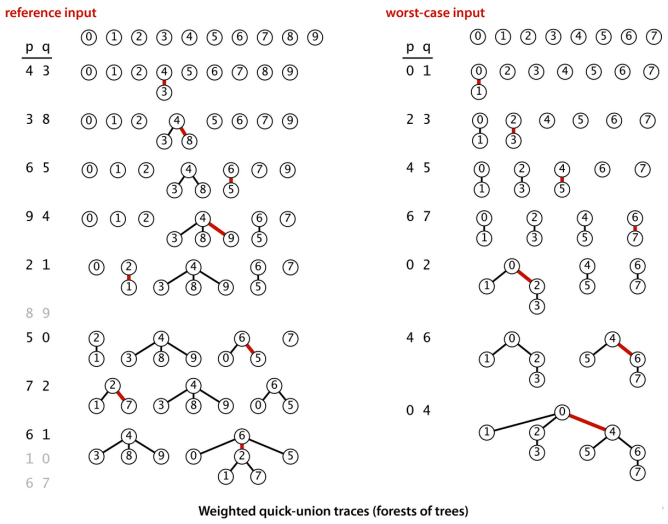
```
uf
+-------------------------------------------------+
| pai (private)                 count:  2 (private)|
|  |                                              |
|  |    +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|  +--> | 6 | 1 | 1 | 4 | 4 | 6 | 6 | 1 | 4 | 4 |    |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|         0   1   2   3   4   5   6   7   8   9      |
|                                                    |
| sz (private)                                       |
|  |                                                 |
|  |    +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|  +--> | 1 | 3 | 1 | 1 | 4 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |    |
|       +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+    |
|         0   1   2   3   4   5   6   7   8   9      |
|                                                    |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()      |
+-------------------------------------------------+
```

WeightedQuickUnionUF

uf.union(6, 1);

```
uf
+-------------------------------------------------+
| pai (private)                  count:  2 (private)|
|  |                                              |
|  |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|  +--> | 6 | 6 | 1 | 4 | 4 | 6 | 6 | 1 | 4 | 4 |  |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|        0   1   2   3   4   5   6   7   8   9    |
|                                                 |
| sz (private)                                    |
|  |                                              |
|  |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|  +--> | 1 | 3 | 1 | 1 | 5 | 1 | 6 | 1 | 1 | 1 |  |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|        0   1   2   3   4   5   6   7   8   9    |
|                                                 |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()   |
+-------------------------------------------------+
```

Simulação



Weighted quick-union traces (forests of trees)

Class WeightedQuickUnionUF: esqueleto

```
public class WeightedQuickUnionUF {
   private int[] pai;
   private int[] sz;
   private int count; // no.  compts

   public WeightedQuickUnionUF(int n)
       {...}
   public int count() {...}
   public boolean connected(int p, int q)
       {...}
   public int find(int p) {...}
   public void union(int p, int q) {...}
}
```

WeightedQuickUnionUF: count()

```
public WeightedQuickUnionUF(int n) {
   count = n;
   pai = new int[n];
   sz = new int[n];
   for (int i = 0; i < n; i++) {
       pai[i] = i;
       sz[i] = 1;
   }
}

public int count() {
   return count;
}
```

WeightedQuickUnionUF: connected() e find()

```
// p e q estão no mesmo componente?
public boolean connected(int p, int q) {
   return find(p) == find(q);
}

// retorna o id do componente de p
public int find(int p) {
   while (p != pai[p]) p = pai[p];
   return p;
}
```

Class WeightedQuickUnionUF: union()

```
public void union(int p, int q) {
   int pRoot = find(p);
   int qRoot = find(q);
   if (pRoot == qRoot) return ;
   if (sz[pRoot] < sz[qRoot]) {
       pai[pRoot] = qRoot;
       sz[qRoot] += sz[pRoot];
   }
   else {
       pai[qRoot] = pRoot;
       sz[pRoot] += sz[qRoot];
   }
   count--;
}
```

Estrutura *disjoint-set forest*

Para verificar que o consumo de tempo de `union()` e `find()` é não superior a $\lg n$, basta demonstrar que

> *Na floresta de árvores disjuntas produzida durante uma sequência de operações `union()`, toda árvore com altura h tem pelo menos 2^h nós.*

A demonstração é por indução no número de operações `union()` realizadas.

Estrutura *disjoint-set forest*

Inicialmente nenhuma operação `union()` foi realizada e toda árvore tem altura zero e possui um nó. Logo vale a afirmação.

Sejam p e q sítios e considere a operação `union(p, q)`.

Se p e q estão em uma mesma árvore não há o que demonstrar. Portanto, podemos supor que a árvore T_p que contém p e árvore T_q que contém q são distintas.

Estrutura *disjoint-set forest*

Sejam

- h_p e n_p a altura e número de nós de T_p e
- h_q e n_q a altura e número de nós de T_q.

Pela hipóse de indução $n_p \geq 2^{h_p}$ e $n_q \geq 2^{h_q}$.

Seja T a árvore de altura h resultante da operação `union(p,q)`. Se $h \leq \max\{h_p, h_q\}$, não há o que demonstrar. Assim, podemos supor que, digamos, $n_p \geq n_q$ e $h = h_q + 1$. Logo,

$$n = n_p + n_q \geq n_q + n_q \geq 2^{h_q} + 2^{h_q} = 2^{h_q+1} = 2^h.$$

O que encerra este rascunho de demonstração.

Consumo de tempo

`UF(n)`	$\Theta(n)$
`find(p)`	$O(\lg n)$
`union(p, q)`	$O(\lg n)$

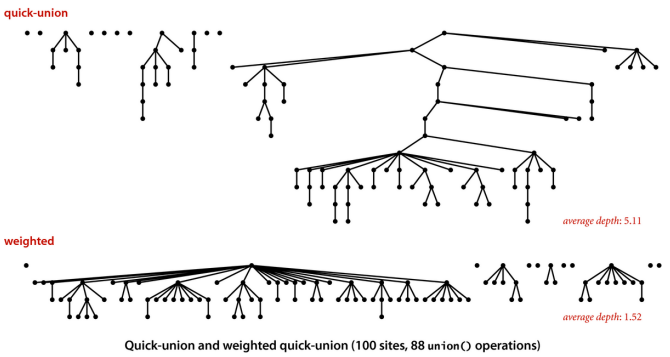
M M M U F U U F U F F F U F

(M M M: n; toda a sequência: m)

Custo total da sequência:

$$\Theta(n) + m\,O(\lg n) + n\,O(\lg n) = O(m \lg n)$$

Ilustração



Quick-union and weighted quick-union (100 sites, 88 `union()` operations)

Experimentos

```
% java Driver < tinyUF.txt
2 components
0.0003seg

% java Driver < mediumUF.txt
3 components
0.027seg

% java Driver < largeUF.txt
6 components
4.079seg
```

Encurtamento de caminhos

Acrescentando uma linha a `find()` encurtamos o comprimento do caminho à metade.

```
public int find(int p) {
   while (p != pai[p]) {
       // encurta caminho à metade
       pai[p] = pai[pai[p]];
       p = pai[p];
   }
   return p;
}
```

Mais experimentos

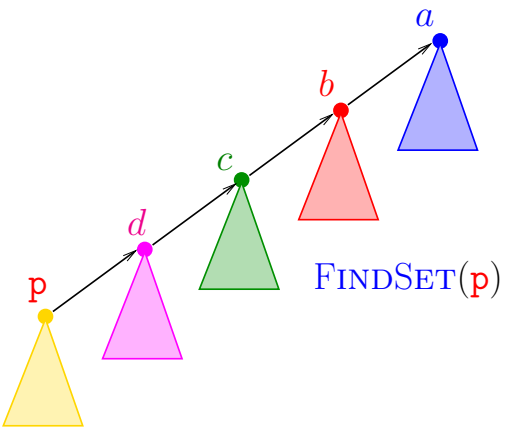
```
% java Driver < tinyUF.txt
2 components
0.0003seg

% java Driver < mediumUF.txt
3 components
0.025seg

% java Driver < largeUF.txt
6 components
3.923seg
```

Weighted-Quick-union with path compression

1.5 Case Study: Union-Find

path compression

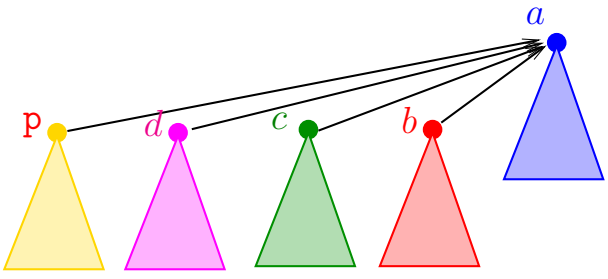
Ideia: encurtar os caminhos durante cada `find()`.



FindSet(p)

path compression

Ideia: encurtar os caminhos durante cada `find()`.



FindSet(p)

path compression

FindSet (p) ▷ com "path compression"
1 **se** p ≠ pai[p]
2 **então** pai[p] ← FindSet (pai[p])
3 **devolva** pai[p]

path compression

```
public int find(int p) {
   if (p != pai[p])
       pai[p] = find(pai[p]);
   return pai[p];
}
```

PathCompressionUF

```
PathCompressionUF uf = new PathCompressionUF(10);
```

```
uf
+-------------------------------------------------+
| pai (private)                 count: 0 (private)|
|  |                                              |
|  |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|  +--> | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |  |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|        0   1   2   3   4   5   6   7   8   9    |
|                                                 |
| sz (private)                                    |
|  |                                              |
|  |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|  +--> | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|        0   1   2   3   4   5   6   7   8   9    |
|                                                 |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()   |
+-------------------------------------------------+
```

PathCompressionUF

uf.find(3) retorna 3

uf.find(0) retorna 0

```
uf
+-------------------------------------------------+
| pai (private)                 count: 10 (private)|
|  |                                              |
|  |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|  +--> | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |  |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|        0   1   2   3   4   5   6   7   8   9    |
|                                                 |
| sz (private)                                    |
|  |                                              |
|  |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|  +--> | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|        0   1   2   3   4   5   6   7   8   9    |
|                                                 |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()   |
+-------------------------------------------------+
```

PathCompressionUF

uf.union(4, 3);

```
uf
+-------------------------------------------------+
| pai (private)                 count:  9 (private)|
|  |                                              |
|  |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|  +--> | 0 | 1 | 2 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |  |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|        0   1   2   3   4   5   6   7   8   9    |
|                                                 |
| sz (private)                                    |
|  |                                              |
|  |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|  +--> | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|        0   1   2   3   4   5   6   7   8   9    |
|                                                 |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()   |
+-------------------------------------------------+
```

PathCompressionUF

uf.union(3, 8);

```
uf
+-------------------------------------------------+
| pai (private)                 count:  8 (private)|
|  |                                              |
|  |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|  +--> | 0 | 1 | 2 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 4 | 9 |  |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|        0   1   2   3   4   5   6   7   8   9    |
|                                                 |
| sz (private)                                    |
|  |                                              |
|  |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|  +--> | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|        0   1   2   3   4   5   6   7   8   9    |
|                                                 |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()   |
+-------------------------------------------------+
```

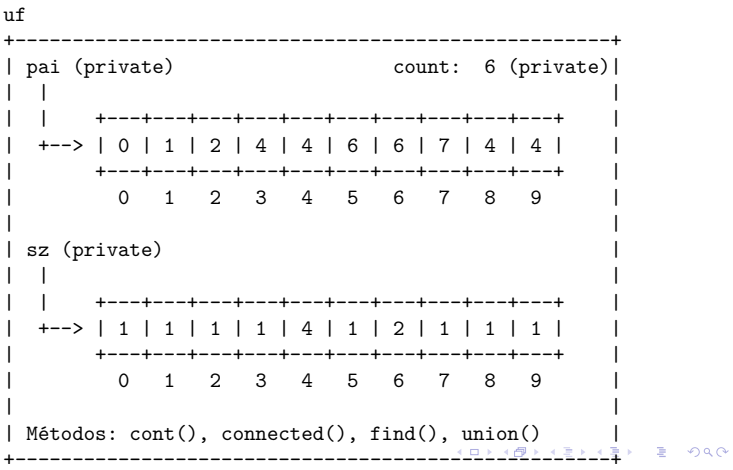
PathCompressionUF

uf.union(6, 5);

```
uf
+-------------------------------------------------+
| pai (private)                 count:  7 (private) |
|  |                                              |
|  |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|  +--> | 0 | 1 | 2 | 4 | 4 | 6 | 6 | 7 | 4 | 9 |  |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|        0   1   2   3   4   5   6   7   8   9    |
|                                                 |
| sz (private)                                    |
|  |                                              |
|  |   +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|  +--> | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |  |
|      +---+---+---+---+---+---+---+---+---+---+  |
|        0   1   2   3   4   5   6   7   8   9    |
|                                                 |
| Métodos: cont(), connected(), find(), union()   |
+-------------------------------------------------+
```

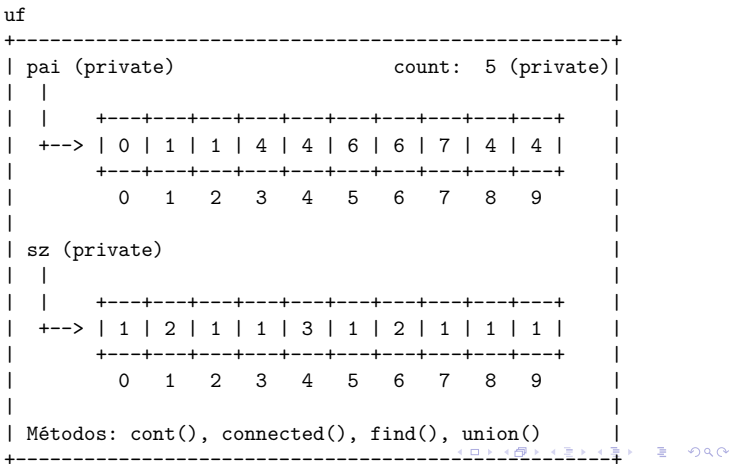
PathCompressionUF

uf.union(9, 4);



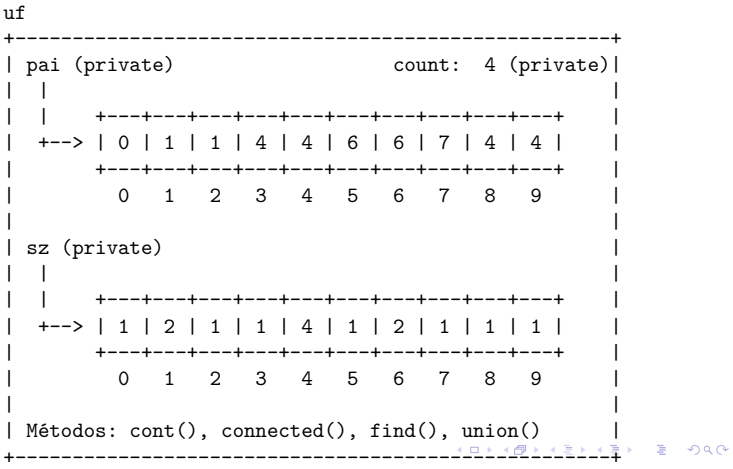
PathCompressionUF

uf.union(2, 1);



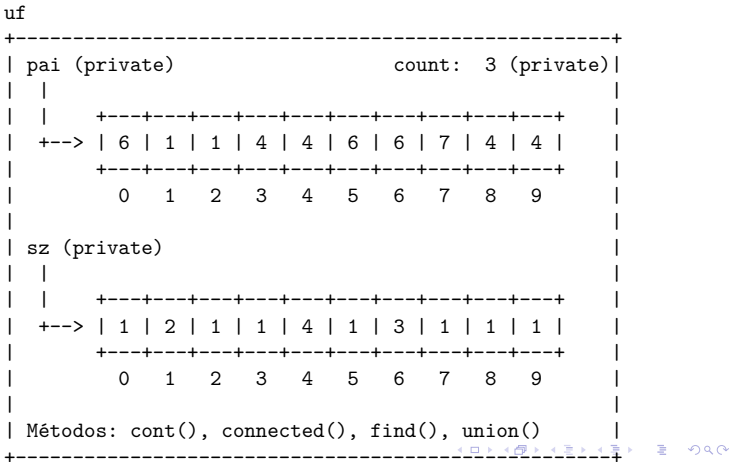
PathCompressionUF

uf.union(8, 9);



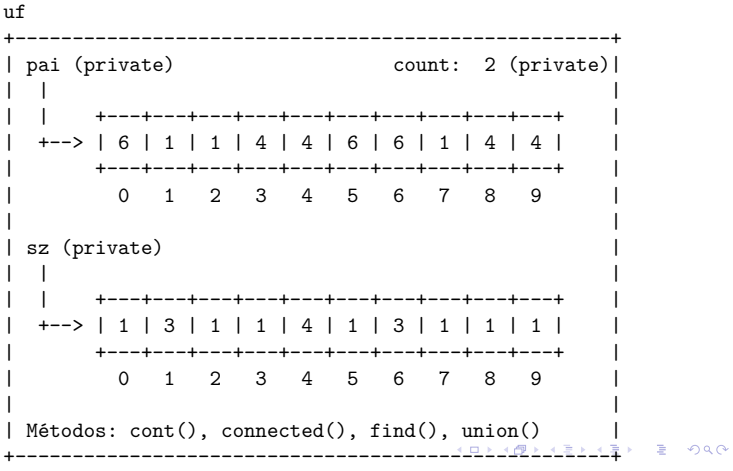
PathCompressionUF

uf.union(5, 0);



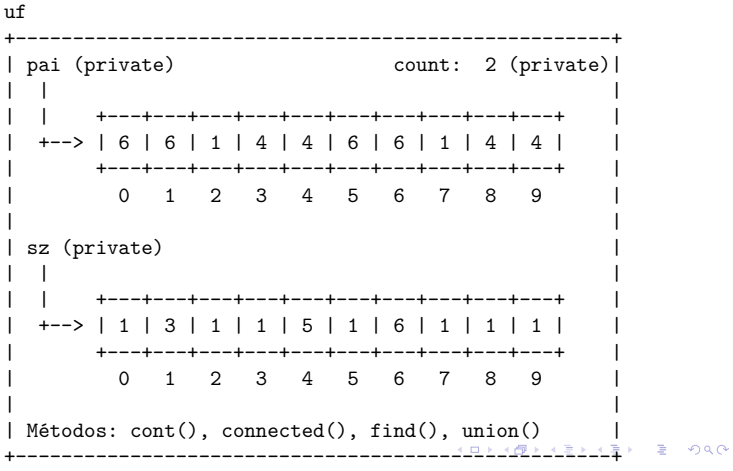
PathCompressionUF

uf.union(7, 2);



PathCompressionUF

uf.union(6, 1);



Função log-estrela

$\lg^* \mathtt{n}$ é o menor $\mathtt{k}$ tal que

$$\underbrace{\lg \lg \ldots \lg}_{k} \mathtt{n} \leq 1$$

$\mathtt{n}$	$\lg^* \mathtt{n}$
1	0
2	1
3	2
4	2
5	3
⋮	⋮
15	3
16	3
⋮	⋮
65535	4
65536	4
⋮	⋮
$\underbrace{10000000000000000\cdots000000000000}_{80}$	5
⋮	⋮

Função 'torre'

$$t(i) := \begin{cases} 1 & \text{se } i = 0 \\ 2^{t(i-1)} & \text{se } i = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

i	$t(i)$
0	1
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^{2^2} = 16$
4	$2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65536$
5	$2^{2^{2^{2^2}}} > \underbrace{10000000000000000\cdots000000000000}_{80}$
⋮	⋮

Consumo de tempo

`UF(n)`	$\Theta(\mathtt{n})$	
`find(p)`	$\mathrm{O}(\lg^* \mathtt{n})$	**amortizado!**
`union(p, q)`	$\mathrm{O}(\lg^* \mathtt{n})$	**amortizado!**

$$\underbrace{\underbrace{\mathtt{M}\ \mathtt{M}\ \mathtt{M}}_{\mathtt{n}}\ \mathtt{U}\ \mathtt{F}\ \mathtt{U}\ \mathtt{U}\ \mathtt{F}\ \mathtt{U}\ \mathtt{F}\ \mathtt{F}\ \mathtt{F}\ \mathtt{U}\ \mathtt{F}}_{\mathtt{m}}$$

Custo total da sequência:

$$\Theta(\mathtt{n}) + \mathtt{m}\,\mathrm{O}(\lg^* \mathtt{n}) + \mathtt{n}\,\mathrm{O}(\lg^* \mathtt{n}) = \mathrm{O}(\mathtt{m} \lg^* \mathtt{n})$$

Conclusões

Se conjuntos disjuntos são representados através de disjoint-set forest com *union by rank* e *path compression*, então uma sequência de `UF(n)` e `m` operações `union()` e `find()`, sendo que `n`, consome tempo $\mathrm{O}(\mathtt{m} \lg^* \mathtt{n})$.

Experimentos

Acrescentando a linha

```
// diminui a altura pela metade
pai[p] = pai[pai[p]]
```

Experimentos

```
% java Driver < tinyUF.txt
```
2 components
0.0003seg

```
% java Driver < mediumUF.txt
```
3 components
0.025seg

```
% java Driver < largeUF.txt
```
6 components
3.923seg

Parece que na prática weighted quick-union e weighted quick-union com path-compression não são muito diferentes.