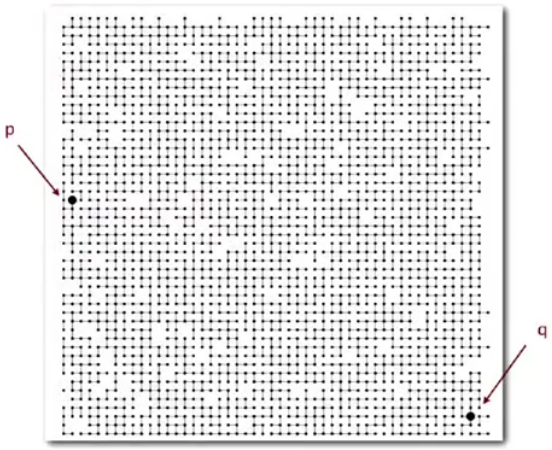
Fonte: ash.atozviews.com

Compacto dos melhores momentos

AULA 3

Problema: p e q estão ligados?

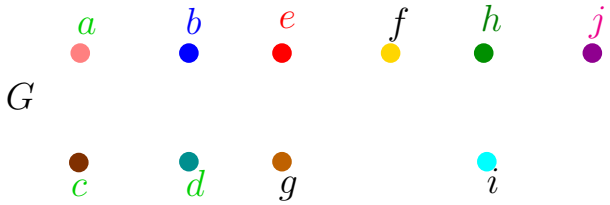


Fonte: algs4

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico

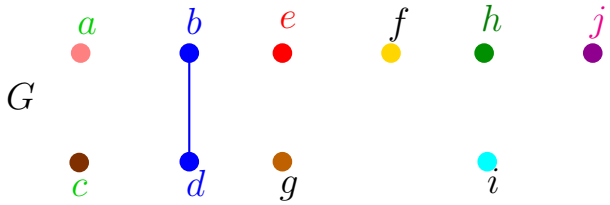


aresta	componentes
	$\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{d\}$ $\{e\}$ $\{f\}$ $\{g\}$ $\{h\}$ $\{i\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico

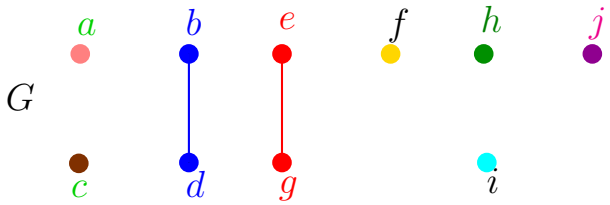


aresta	componentes
(b,d)	$\{a\}$ $\{b,d\}$ $\{c\}$ $\{e\}$ $\{f\}$ $\{g\}$ $\{h\}$ $\{i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico

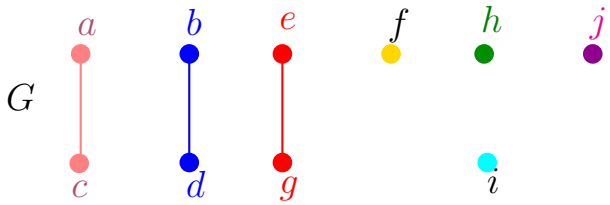


aresta	componentes
(e,g)	$\{a\}$ $\{b,d\}$ $\{c\}$ $\{e,g\}$ $\{f\}$ $\{h\}$ $\{i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico

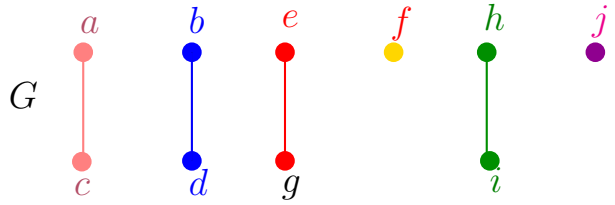


aresta	componentes
(a,c)	$\{a,c\}$ $\{b,d\}$ $\{e,g\}$ $\{f\}$ $\{h\}$ $\{i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico

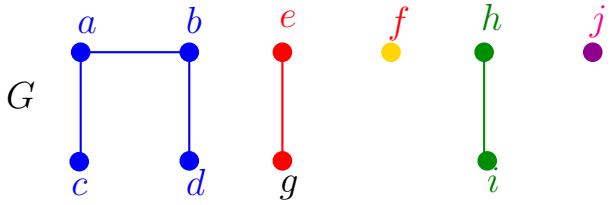


aresta	componentes
(h,i)	$\{a,c\}$ $\{b,d\}$ $\{e,g\}$ $\{f\}$ $\{h,i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico

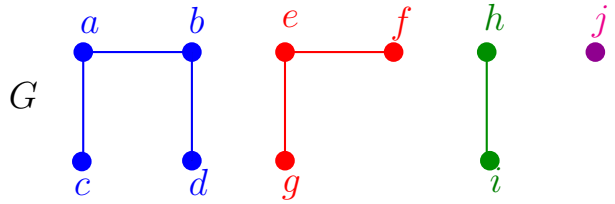


aresta	componentes
(a,b)	$\{a,b,c,d\}$ $\{e,g\}$ $\{f\}$ $\{h,i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico

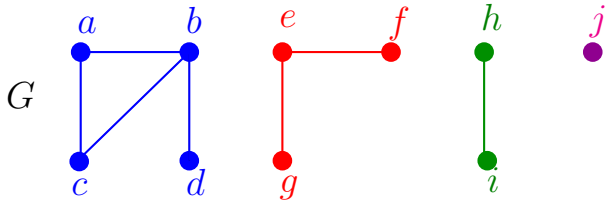


aresta	componentes
(e,f)	$\{a,b,c,d\}$ $\{e,f,g\}$ $\{h,i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são **modificados ao longo do tempo**

Exemplo: grafo dinâmico



aresta	componentes
(b,c)	$\{a,b,c,d\}$ $\{e,f,g\}$ $\{h,i\}$ $\{j\}$

API

`public class`	`UF`	
	`UF(int n)`	inicializa `n` sites com nomes inteiros `0,...,n-1`
`void`	`union(int p,int q)`	acrescenta ligação entre `p` e `q`
`int`	`find(int p)`	retorna id do componente de `p`
`boolean`	`connected(int p,int q)`	`true` se `p` e `q` estão no mesmo componente
`int`	`count()`	número de componentes

Conjuntos disjuntos dinâmicos

Sequência de operações `UF(n)` = `n` × MakeSet, `union()` = Union, `find()` = FindSet

M M M U F U U F U F F F U F

`n` = 3

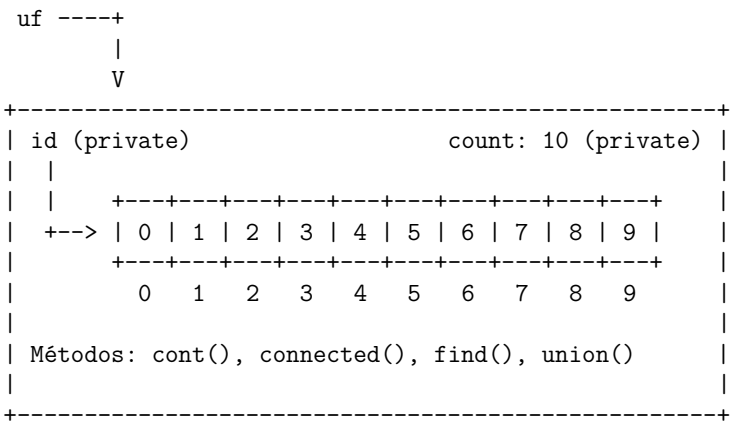
`m` = 14

Que estrutura de dados usar?

Compromissos (*trade-off*s).

QuickFindUF

`QuickFindUF uf = new QuickFindUF(10);`



Class QuickFindUF: construtor e count()

```
public QuickFindUF(int n) {
   count = n;
   id = new int[n];
   for (int i = 0; i < n; i++) {
       id[i] = i;
   }
}

// retorna to número de componentes
public int count() {
   return count;
}
```

Class QuickFindUF: connected() e find()

```
// p e q estão no mesmo componente?
public boolean connected(int p, int q) {
   return find(p) == find(q);
}

// retorna o id do componente de p
public int find(int p) {
   return id[p];
}
```

Class QuickFindUF: union()

```
// une os componentes de p e q
public void union(int p, int q) {
   int pID = find(p);
   int qID = find(q);
   if (pID == qID) return ;
   for (int i = 0; i < id.length; i++) {
       if (id[i] == pID) id[i] = qID;
   }
   count--;
}
```

Consumo de tempo

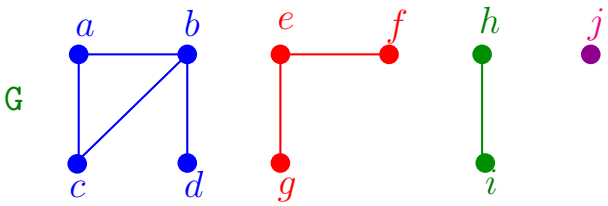
UF(n)	$\Theta(n)$
union(p, q)	$O(n)$
find(p)	$\Theta(1)$

Uma sequência de m operações pode consumir tempo $\Theta(m^2)$ no pior caso.

Consumo de tempo amortizado de cada operação é $O(m)$.

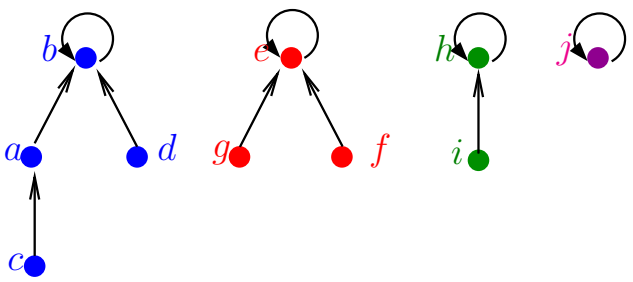
Hmm. Em union() seria razoável alterarmos o menor número possível de posições do vetor id. Para isso precisamos saber qual conjunto tem o menor número de itens...

QuickUnionUF



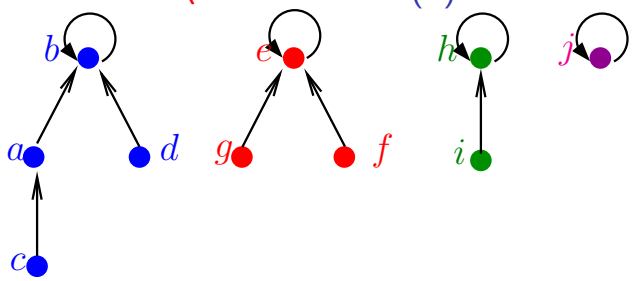
- cada conjunto tem uma raiz, que é o seu representante
- cada nó x tem um pai
- pai[x] = x se e só se x é uma raiz

Estrutura *disjoint-set forest*



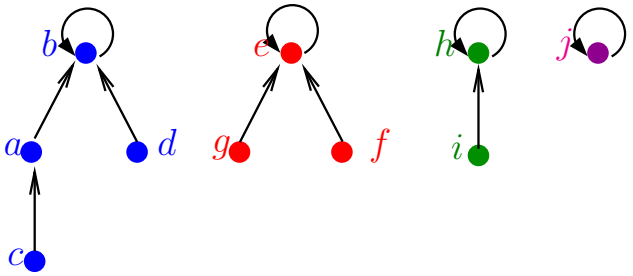
- cada conjunto tem uma raiz
- cada nó x tem um pai
- pai[x] = x se e só se x é uma raiz

QuickUnionUF(n)



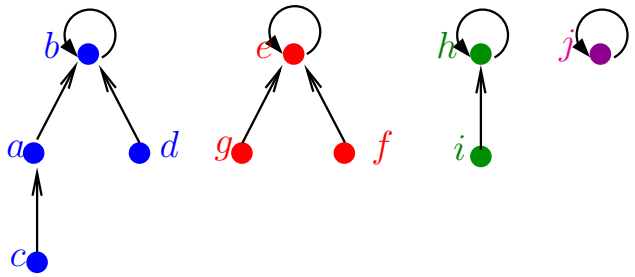

```
public QuickUnionUF(int n) {
   count = n;
   pai = new int[n];
   for (int i = 0; i < n; i++) {
       pai[i] = i;
   }
}
```

find()




```
// retorna o id do componente de p
public int find(int p) {
   while (p != pai[p]) p = pai[p];
   return p;
}
```

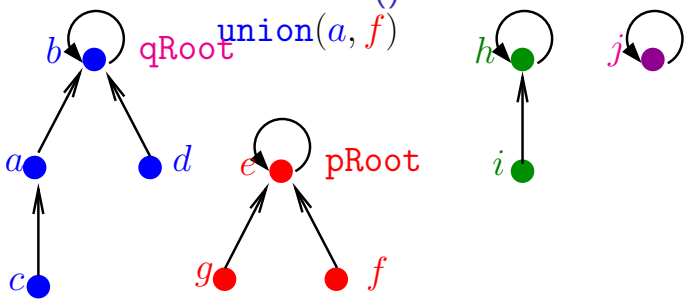
union()




```
public void union(int p, int q) {
   int pRoot = find(p);
   int qRoot = find(q);
   if (pRoot == qRoot) return ;
   pai[pRoot] = qRoot;
   count--; }
```

union()

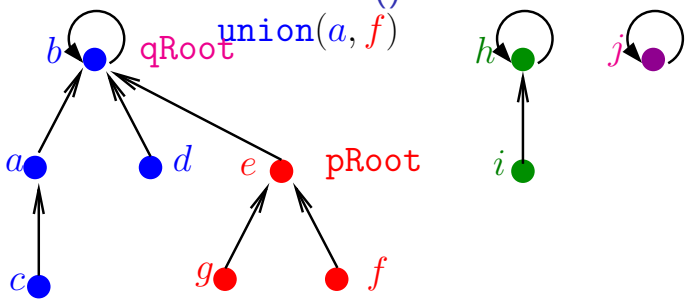
union(a, f)




```
public void union(int p, int q) {
   int pRoot = find(p);
   int qRoot = find(q);
   if (pRoot == qRoot) return ;
   pai[pRoot] = qRoot;
   count--; }
```

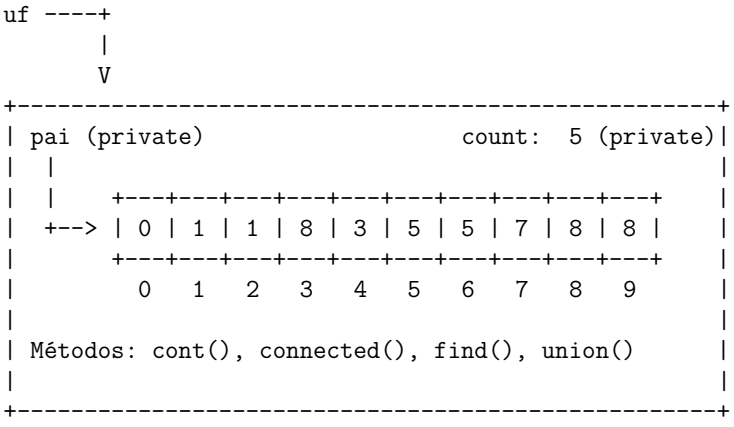
union()

union(a, f)




```
public void union(int p, int q) {
   int pRoot = find(p);
   int qRoot = find(q);
   if (pRoot == qRoot) return ;
   pai[pRoot] = qRoot;
   count--; }
```

QuickUnionUF



Consumo de tempo

UF(n)	$\Theta(n)$
find(p)	$O(n)$
union(p, q)	$O(n)$

M M M U F U U F U F F F U F

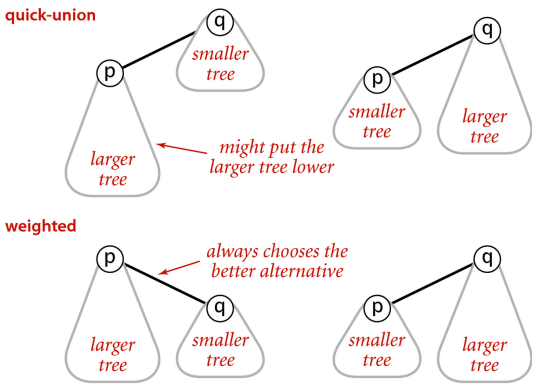
n

m

Custo total da sequência:

$$n\,\Theta(1) + m\,O(n) + n\,O(n) = O(mn)$$

WeightedQuickUnionUF



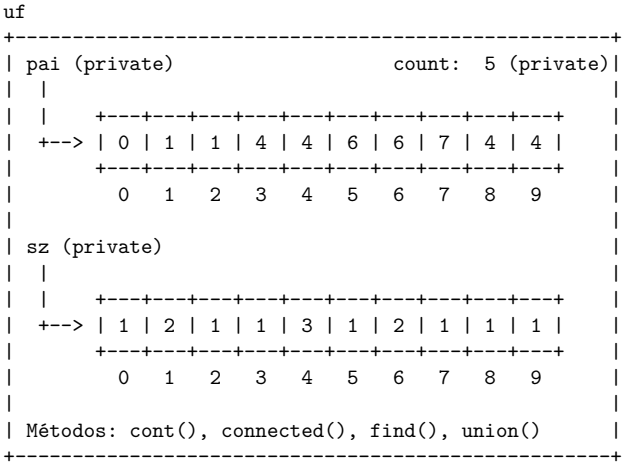
Weighted quick-union

Fonte: algs4

union by size

```
public void union(int p, int q) {
  int pRoot = find(p);
  int qRoot = find(q);
  if (pRoot == qRoot) return ;
  if (sz[pRoot] < sz[qRoot]) {
      pai[pRoot] = qRoot;
      sz[qRoot] += sz[pRoot];
  }
  else {
      pai[qRoot] = pRoot;
      sz[pRoot] += sz[qRoot];
  }
  count--;
}
```

WeightedQuickUnionUF



Consumo de tempo

UF(n)	$\Theta(n)$
find(p)	$O(\lg n)$
union(p, q)	$O(\lg n)$

M M M U F U U F U F F F U F

n

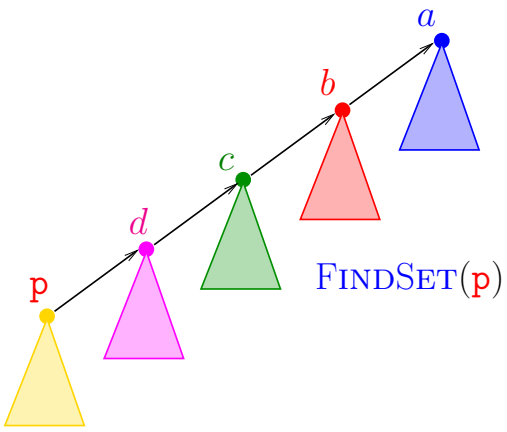
m

Custo total da sequência:

$$\Theta(n) + m\,O(\lg n) + n\,O(\lg n) = O(m \lg n)$$

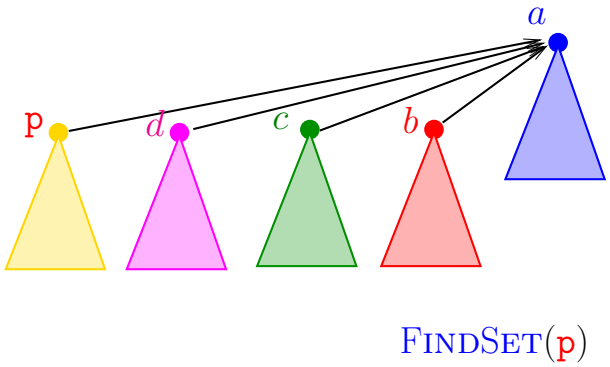
PathCompressionUF

Ideia: encurtar os caminhos durante cada `find()`.



PathCompressionUF

Ideia: encurtar os caminhos durante cada `find()`.



path compression

```
public int find(int p) {
   if (p != pai[p])
       pai[p] = find(pai[p]);
   return pai[p];
}
```

Função log-estrela

$\lg^* n$ é o menor k tal que

$$\underbrace{\lg \lg \ldots \lg}_{k} n \leq 1$$

n	$\lg^* n$
1	0
2	1
3	2
4	2
5	3
⋮	⋮
15	3
16	3
⋮	⋮
65535	4
65536	4
⋮	⋮
$\underbrace{10000000000000000\cdots000000000000}_{80}$	5
⋮	⋮

Função 'torre'

$$t(i) := \begin{cases} 1 & \text{se } i = 0 \\ 2^{t(i-1)} & \text{se } i = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

i	$t(i)$
0	1
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^{2^2} = 16$
4	$2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65536$
5	$2^{2^{2^{2^2}}} > \underbrace{10000000000000000\cdots000000000000}_{80}$
⋮	⋮

Consumo de tempo

`UF(n)`	$\Theta(n)$	
`find(p)`	$O(\lg^* n)$	**amortizado!**
`union(p, q)`	$O(\lg^* n)$	**amortizado!**

$$\underbrace{\underbrace{M\ M\ M}_{n}\ U\ F\ U\ U\ F\ U\ F\ F\ F\ U\ F}_{m}$$

Custo total da sequência:

$$\Theta(n) + m\,O(\lg^* n) + n\,O(\lg^* n) = O(m \lg^* n)$$

Conclusões

Se conjuntos disjuntos são representados através de disjoint-set forest com *union by rank* e *path compression*, então uma sequência de `UF(n)` e `m` operações `union()` e `find()`, consome tempo $O(m \lg^* n)$.

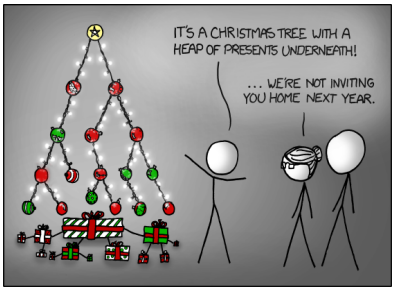
Resumo

	`UF()`	`find()`	`union()`
`QuickFindUF`	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$O(n)$
`QuickUnionUF`	$\Theta(n)$	$O(n)$	$O(n)$
`WeightedQuickUnionUF`	$\Theta(n)$	$O(\lg n)$	$O(\lg n)$
`PathCompressionUF`	$\Theta(n)$	$O(\lg^* n)$	$O(\lg^* n)$

Fonte: Pinterest

AULA 4

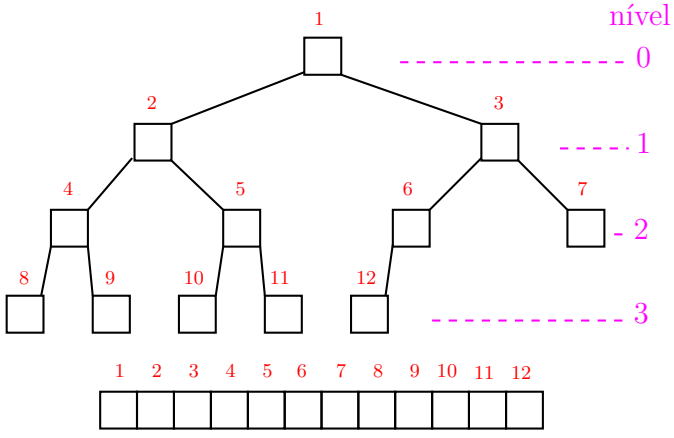
Árvores em vetores e heaps



Fonte: `http://xkcd.com/835/`

PF 10
http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/hpsrt.html

Representação de árvores em vetores



Pais e filhos

$a[1\,..\,m]$ é um vetor representando uma árvore.
Diremos que para qualquer **índice** ou **nó** i,

- $\lfloor i/2 \rfloor$ é o **pai** de i;
- $2\,i$ é o **filho esquerdo** de i;
- $2\,i{+}1$ é o **filho direito**.

Um nó i só tem filho esquerdo se $2\,i \le m$.
Um nó i só tem filho direito se $2\,i{+}1 \le m$.

Raiz e folhas

O nó 1 não tem pai e é chamado de **raiz**.

Um nó i é um **folha** se não tem **filhos**, ou seja $2\,i > \mathtt{m}$.

Todo nó i é raiz da subárvore formada por

$$\mathtt{a}[i, 2i, 2i{+}1, 4i, 4i{+}1, 4i{+}2, 4i{+}3, 8i, \ldots, 8i{+}7, \ldots]$$

Níveis

Cada nível $\mathtt{p}$, exceto talvez o último, tem exatamente $2^{\mathtt{p}}$ nós e esses são

$$2^{\mathtt{p}}, 2^{\mathtt{p}}+1, 2^{\mathtt{p}}+2, \ldots, 2^{\mathtt{p}+1}-1.$$

Níveis

Cada nível $\mathtt{p}$, exceto talvez o último, tem exatamente $2^{\mathtt{p}}$ nós e esses são

$$2^{\mathtt{p}}, 2^{\mathtt{p}}+1, 2^{\mathtt{p}}+2, \ldots, 2^{\mathtt{p}+1}-1.$$

O nó i pertence ao nível ???.

Níveis

Cada nível $\mathtt{p}$, exceto talvez o último, tem exatamente $2^{\mathtt{p}}$ nós e esses são

$$2^{\mathtt{p}}, 2^{\mathtt{p}}+1, 2^{\mathtt{p}}+2, \ldots, 2^{\mathtt{p}+1}-1.$$

O nó i pertence ao nível $\lfloor \lg i \rfloor$.

Níveis

Cada nível $\mathtt{p}$, exceto talvez o último, tem exatamente $2^{\mathtt{p}}$ nós e esses são

$$2^{\mathtt{p}}, 2^{\mathtt{p}}+1, 2^{\mathtt{p}}+2, \ldots, 2^{\mathtt{p}+1}-1.$$

O nó i pertence ao nível $\lfloor \lg i \rfloor$.

Prova: Se $\mathtt{p}$ é o nível do nó i, então

$$\begin{array}{rcccl} 2^{\mathtt{p}} & \le & i & < & 2^{\mathtt{p}+1} \quad \Rightarrow \\ \lg 2^{\mathtt{p}} & \le & \lg i & < & \lg 2^{\mathtt{p}+1} \quad \Rightarrow \\ \mathtt{p} & \le & \lg i & < & \mathtt{p}+1 \end{array}$$

Logo, $\mathtt{p} = \lfloor \lg i \rfloor$.

Níveis

Cada nível $\mathtt{p}$, exceto talvez o último, tem exatamente $2^{\mathtt{p}}$ nós e esses são

$$2^{\mathtt{p}}, 2^{\mathtt{p}}+1, 2^{\mathtt{p}}+2, \ldots, 2^{\mathtt{p}+1}-1.$$

O nó i pertence ao nível $\lfloor \lg i \rfloor$.

Prova: Se $\mathtt{p}$ é o nível do nó i, então

$$\begin{array}{rcccl} 2^{\mathtt{p}} & \le & i & < & 2^{\mathtt{p}+1} \quad \Rightarrow \\ \lg 2^{\mathtt{p}} & \le & \lg i & < & \lg 2^{\mathtt{p}+1} \quad \Rightarrow \\ \mathtt{p} & \le & \lg i & < & \mathtt{p}+1 \end{array}$$

Logo, $\mathtt{p} = \lfloor \lg i \rfloor$.

Portanto, o número total de níveis é ???.

Níveis

Cada nível p, exceto talvez o último, tem exatamente 2^p nós e esses são

$$2^p, 2^p + 1, 2^p + 2, \ldots, 2^{p+1} - 1.$$

O nó i pertence ao nível $\lfloor \lg i \rfloor$.

Prova: Se p é o nível do nó i, então

$$\begin{array}{rcccl} 2^p & \leq & i & < & 2^{p+1} \quad \Rightarrow \\ \lg 2^p & \leq & \lg i & < & \lg 2^{p+1} \quad \Rightarrow \\ p & \leq & \lg i & < & p+1 \end{array}$$

Logo, $p = \lfloor \lg i \rfloor$.

Portanto, o número total de níveis é $1 + \lfloor \lg m \rfloor$.

Altura

A **altura** de um nó i é o maior comprimento de um caminho de i a uma folha.

Em outras palavras, a altura de um nó i é o maior comprimento de uma seqüência da forma

$$\langle \texttt{filho}(i), \texttt{filho}(\texttt{filho}(i)), \texttt{filho}(\texttt{filho}(\texttt{filho}(i))), \ldots$$

onde $\texttt{filho}(i)$ vale $2i$ ou $2i + 1$.

Os nós que têm **altura zero** são as folhas.

Altura

A **altura** de um nó i é o maior comprimento de um caminho de i a uma folha.

Em outras palavras, a altura de um nó i é o maior comprimento de uma seqüência da forma

$$\langle \texttt{filho}(i), \texttt{filho}(\texttt{filho}(i)), \texttt{filho}(\texttt{filho}(\texttt{filho}(i))), \ldots$$

onde $\texttt{filho}(i)$ vale $2i$ ou $2i + 1$.

Os nós que têm **altura zero** são as folhas.

A altura de um nó i é $\lfloor \lg(m/i) \rfloor$ $(\ldots)$.

Resumão

filho esquerdo de i:	$2\,i$
filho direito de i:	$2\,i + 1$
pai de i:	$\lfloor i/2 \rfloor$
nível da raiz:	0
nível de i:	$\lfloor \lg i \rfloor$
altura da raiz:	$\lfloor \lg m \rfloor$
altura da árvore:	$\lfloor \lg m \rfloor$
altura de i:	$\lfloor \lg(m/i) \rfloor$ $(\ldots)$
altura de uma folha:	0
total de nós de altura h	$\leq \lceil m/2^{h+1} \rceil$ $(\ldots)$

Heaps

Um vetor $a[1\,..\,m]$ é um **max-heap** se

$$a[i/2] \geq a[i]$$

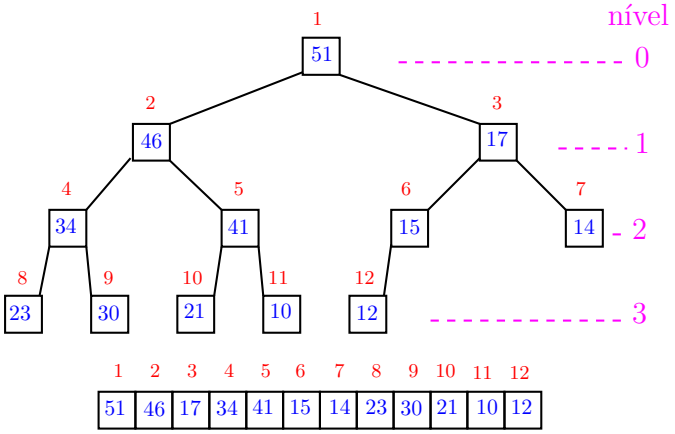
para todo $i = 2, 3, \ldots, m$.

De uma forma mais geral, $a[j\,..\,m]$ é um **max-heap** se

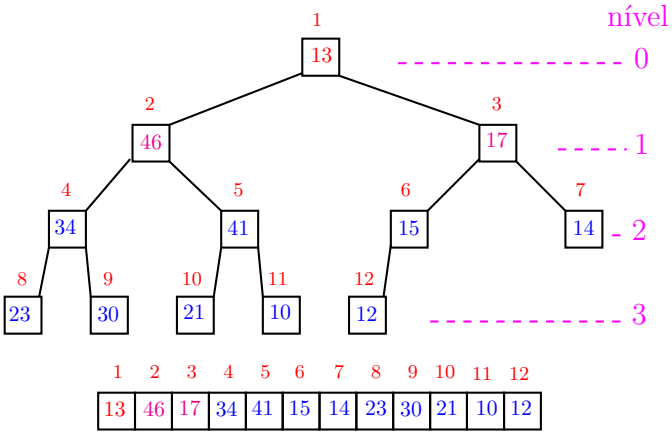
$$a[i/2] \geq a[i]$$

para todo
$i = 2j, 2j + 1, 4j, \ldots, 4j + 3, 8j, \ldots, 8j + 7, \ldots$.
Neste caso também diremos que a subárvore com raiz j é um **max-heap**.

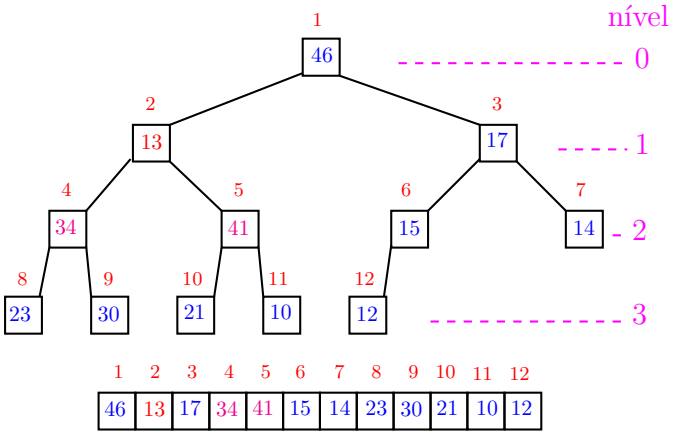
max-heap



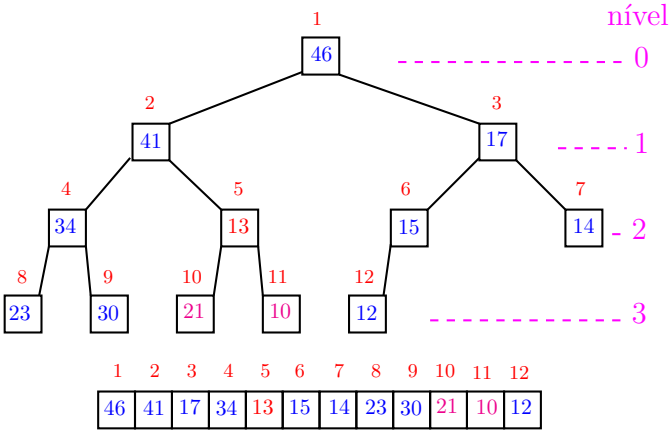
Função básica de manipulação de max-heap



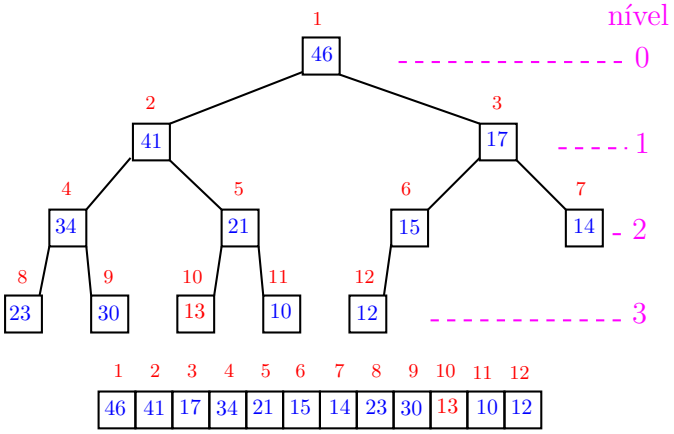
Função básica de manipulação de max-heap



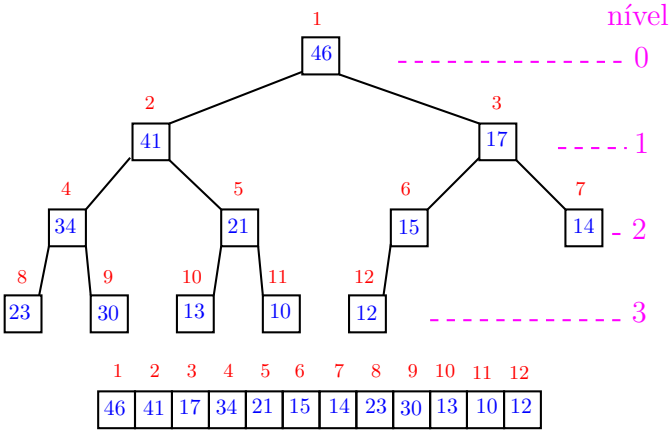
Função básica de manipulação de max-heap



Função básica de manipulação de max-heap



Função básica de manipulação de max-heap



Função `sink`

O coração de qualquer algoritmo que manipule um `max-heap` é uma função que recebe um vetor arbitrário `a`[1 . . `m`] e um índice `p` e faz `a`[`p`] "descer" para sua posição correta.

Função sink

Rearranja o vetor a[1 . . m] de modo que o "subvetor" cuja raiz é p seja um max-heap.

```
private static
void sink (int p, int m, Comparable[] a){
1   int f = 2*p; Object x;
2   while (f <= m) {
3       if (f<m && less(a[f],a[f+1]) f++;
4       if (!less(a[p], a[f]) break;
5       x = a[p]; a[p] = a[f]; a[f] = x;
6       p = f; f = 2*p;
    }
 }
```

Função sink

Supõe que os "subvetores"cujas raízes são filhos de p já são max-heap.

```
private static
void sink (int p, int m, Comparable[] a){
1   int f = 2*p; Object x;
2   while (f <= m) {
3       if (f<m && less(a[f],a[f+1]) f++;
4       if (!less(a[p], a[f]) break;
5       x = a[p]; a[p] = a[f]; a[f] = x;
6       p = f; f = 2*p;
    }
 }
```

Função sink

Implementação um pouco melhor pois em vez de trocas faz apenas deslocamentos (linha 5).

```
private static
void sink (int p, int m, Comparable[] a){
1   int f = 2*p; Object x = a[p];
2   while (f <= m) {
3       if (f<m && less(a[f],a[f+1]) f++;
4       if (!less(x, a[f])) break;
5       a[p] = a[f];
6       p = f; f = 2*p;
    }
7   a[p] = x;
 }
```

Consumo de tempo

linha		todas as execuções da linha
1	$=$	1
2	$\leq$	$1 + \lg m$
3	$\leq$	$\lg m$
4	$\leq$	$\lg m$
5	$\leq$	$\lg m$
6	$\leq$	$\lg m$
7	$=$	1
total	$\leq$	$3 + 5 \lg m = O(\lg m)$

Conclusão

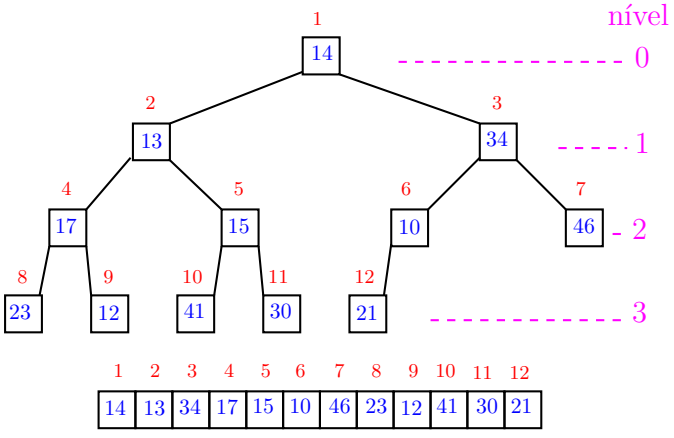
O consumo de tempo da função sink é proporcional a $\lg m$.

O consumo de tempo da função sink é $O(\lg m)$.

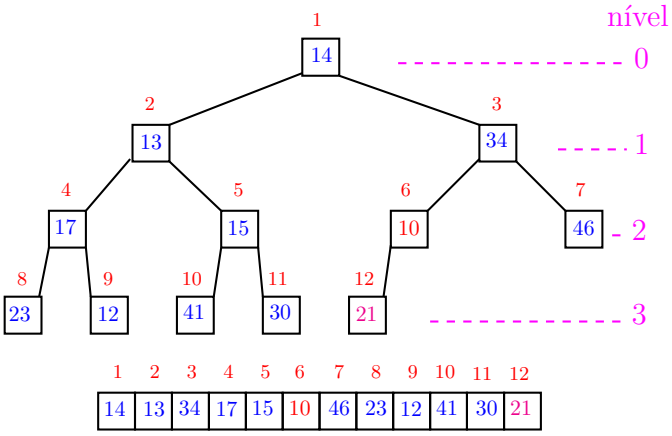
Verdade seja dita . . . (. . .)

O consumo de tempo da função sink é proporcional a $O(\lg m/p)$.

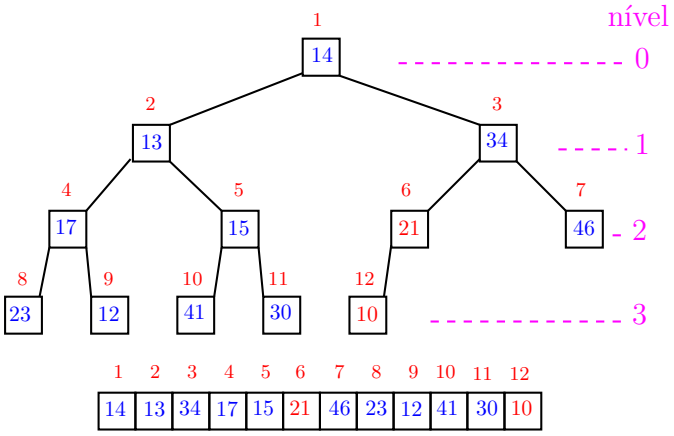
Construção de um max-heap



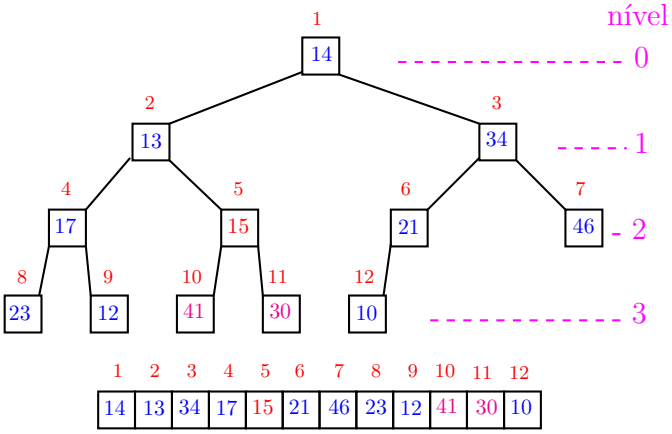
Construção de um max-heap



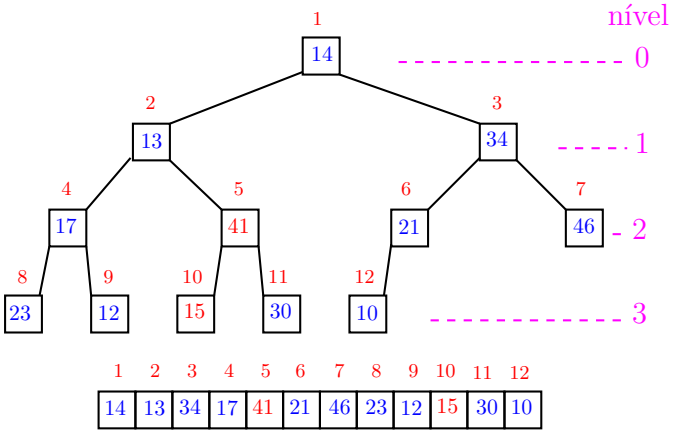
Construção de um max-heap



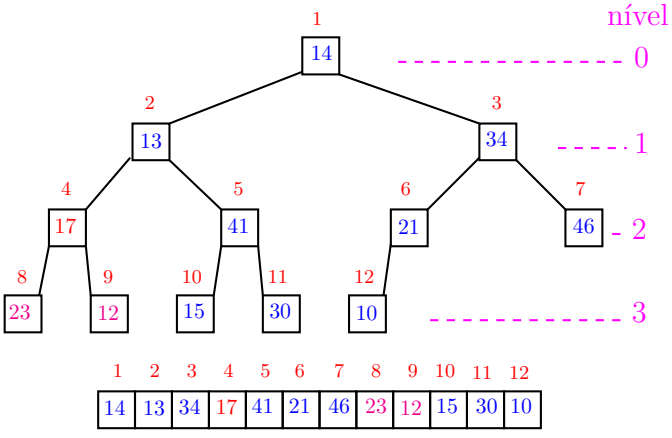
Construção de um max-heap



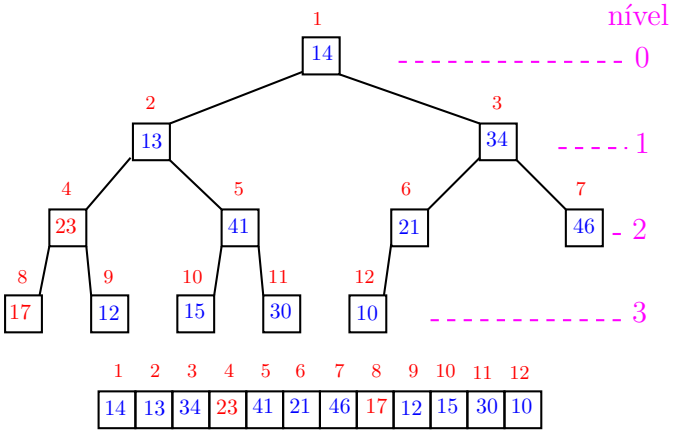
Construção de um max-heap



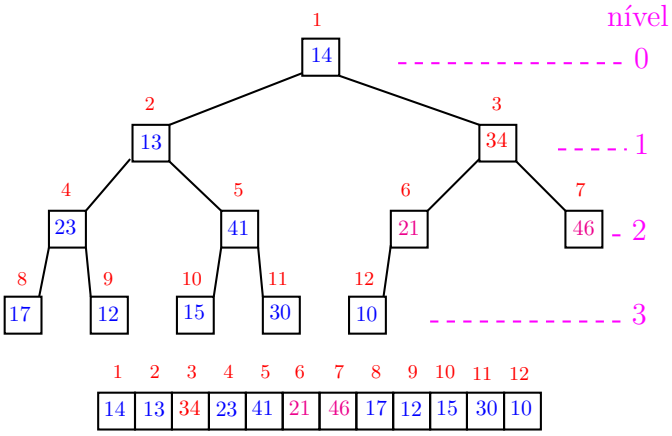
Construção de um max-heap



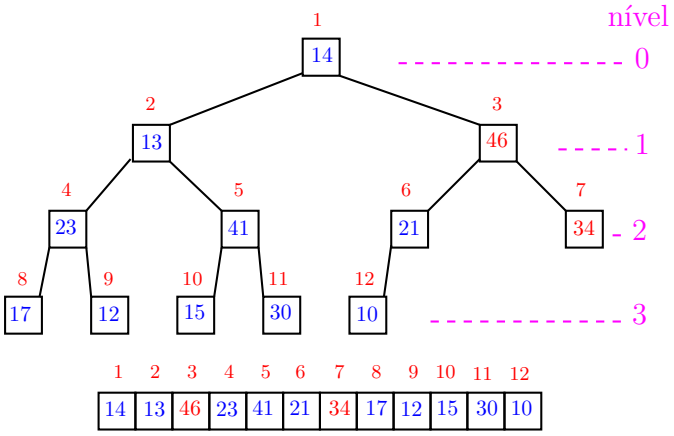
Construção de um max-heap



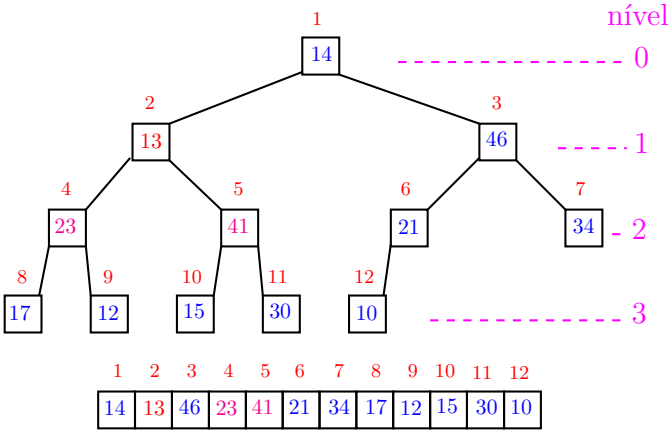
Construção de um max-heap



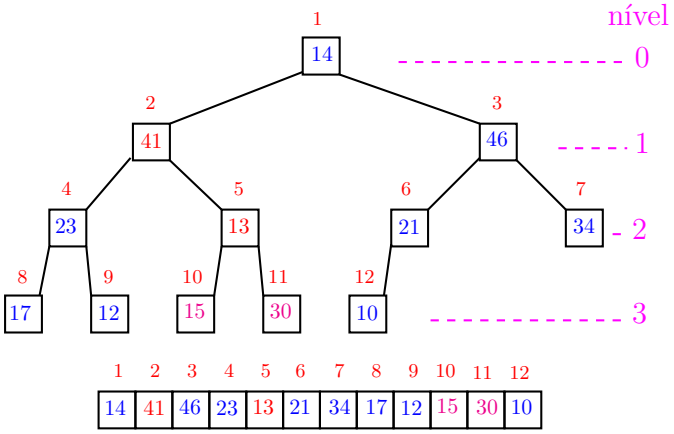
Construção de um max-heap



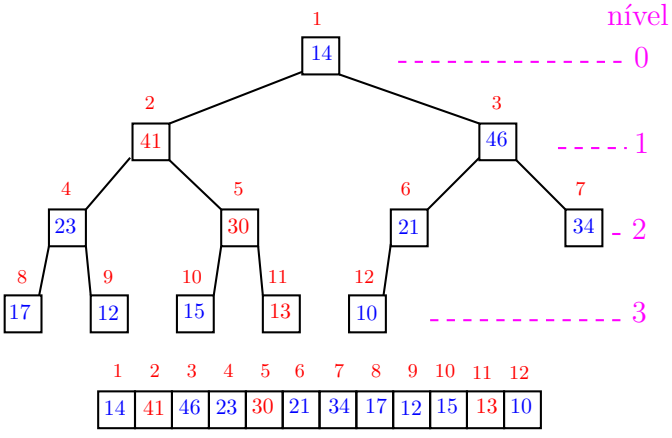
Construção de um max-heap



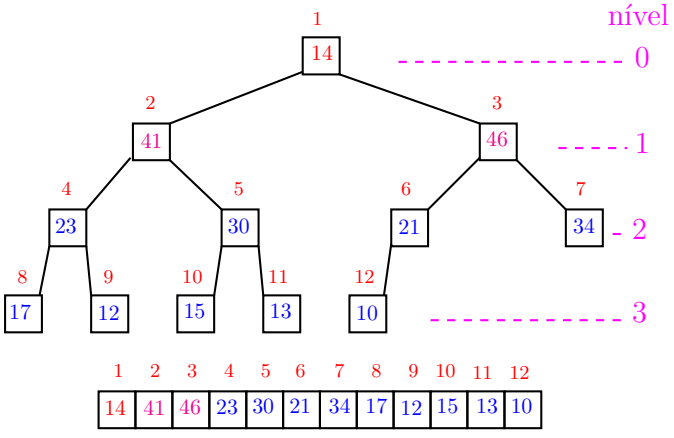
Construção de um max-heap



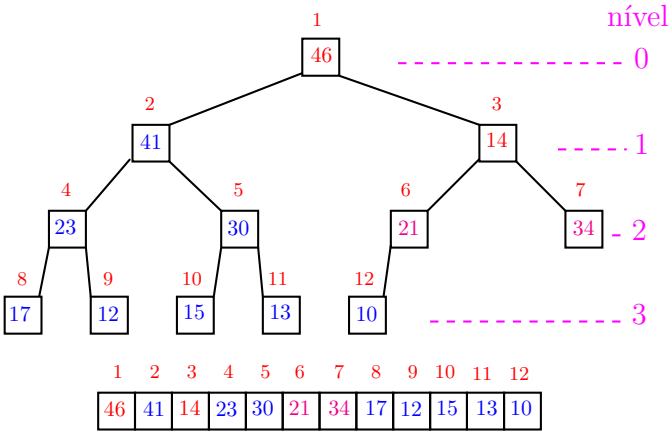
Construção de um max-heap



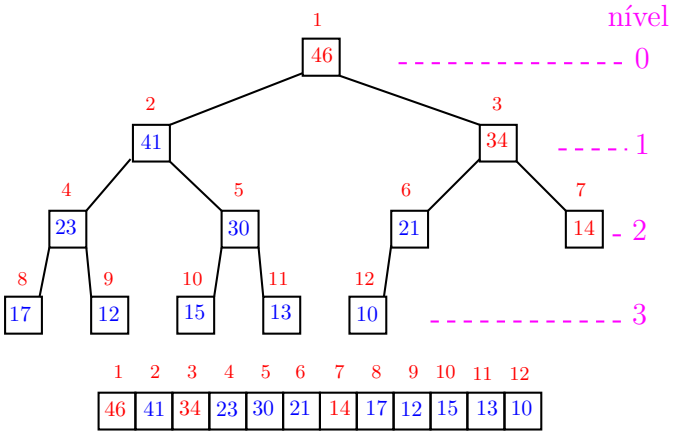
Construção de um max-heap



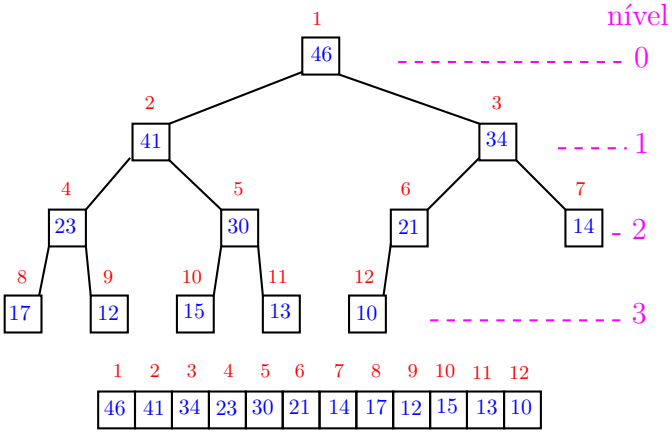
Construção de um max-heap



Construção de um max-heap



Construção de um max-heap



Construção de um max-heap

Recebe um vetor $a[1\,..\,n]$ e rearranja a para que seja max-heap.

```
1   for (int i = n/2; /*A*/ i >= 1; i--)
2       sink(i, n, a);
```

Relação invariante:

(i0) em /*A*/ vale que, $i+1, \ldots, n$ são raízes de max-heaps.

Consumo de tempo

Análise grosseira: consumo de tempo é

$$\frac{n}{2} \times \lg n = O(n \lg n).$$

Verdade seja dita . . . (. . .)

Análise mais cuidadosa: consumo de tempo é $O(n)$.

Algumas séries

Para todo número real x, $|x| < 1$, temos que $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$.

Algumas séries

Para todo número real x, $|x| < 1$, temos que $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$.

Para todo número real x, $|x| < 1$, temos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\, x^i = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Algumas séries

Para todo número real x, $|x| < 1$, temos que $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$.

Para todo número real x, $|x| < 1$, temos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\, x^i = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Prova:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} i\, x^i &= \sum_{i=1}^{\infty} x^i + \sum_{i=2}^{\infty} x^i + \cdots + \sum_{i=k}^{\infty} x^i + \cdots \\ &= \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x} + \cdots + \frac{x^k}{1-x} + \cdots \\ &= \frac{x}{1-x}(x^0 + x^1 + x^2 + \cdots + x^k + \cdots) = \frac{x}{(1-x}\end{aligned}$$

Conclusão

O consumo de tempo para construir um `max-heap` é $O(n \lg n)$.

Verdade seja dita . . . (. . .)

O consumo de tempo para construir um `max-heap` é $O(n)$.