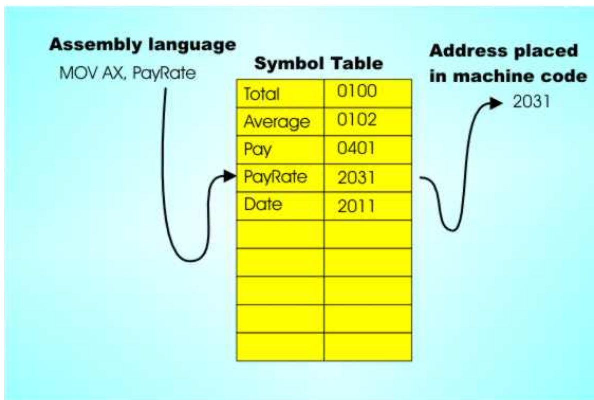
Fonte: ash.atozviews.com

Nos episódios anteriores . . .

Tabelas de Símbolos



Fonte: http://www.i-programmer.info/

Tabelas de símbolos (PF)
Elementary Symbol Tables (S&W)

Tabelas de símbolos

Uma **tabela de símbolos** (ST = *symbol table*) é um ADT que consiste em um conjunto de itens, sendo cada item um par `chave`-`valor` ou `key`-`value`, munido de duas operações fundamentais:

- `put()`, que insere um novo item na ST, e
- `get()`, que busca o valor associado a uma dada chave.

Tabelas de símbolos

Convenções sobre `ST`s:

- não há chaves repetidas (as chaves são duas a duas distintas),
- `null` nunca é usado como `key`,
- `null` nunca é usado como `value` associado a uma `key`.

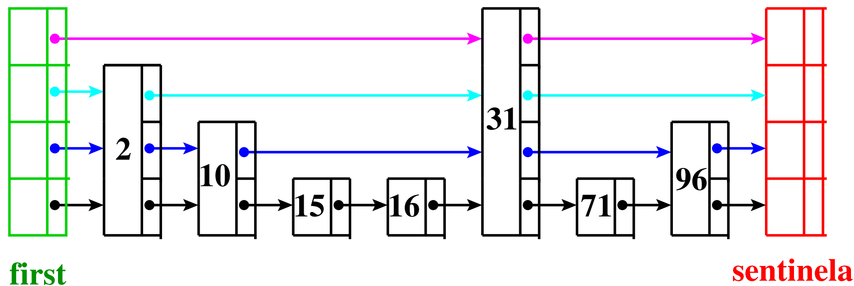
`ST`s são também chamadas de *dictionarys*, *maps* e *associative arrays*.

API ST

```
public class ST<Key,Value>
```

public class	ST	
	ST()	cria uma ST
void	put(Key key, Value val)	insere (key,val)
Value	get(Key key)	busca o valor associado a key
void	delete(Key key)	remove (key,val
int	rank(Key key)	no. de keys menor que key
boolean	isEmpty()	ST está vazia?
boolean	contains(Key key)	a key está na ST?
Iterable<Key>	keys()	lista todas as chaves na ST

Aleatorização: skip list



Experimentos

Consumo de tempo para se criar um ST em que a chaves são as palavras em `les_miserables.txt` e os valores o número de ocorrências.

estrutura	ST	tempo
vetor	não-ordenada	59.5
vetor MTF	não-ordenada	7.6
vetor	ordenada	1.5
lista ligada	não-ordenada	147.1
lista ligada MTF	não-ordenada	15.3
lista ligada	ordenada	115.2
skiplist ♡	ordenada	1.1

Tempos em segundos obtidos com `StopWatch`.

Análise de desempenho

Estamos interessados em consumo de tempo e memória.

Para sabermos se podemos resolver problemas MAIORES.

Motivação:

- prever o comportamento de programas
- comparar algoritmos e suas implementações
- compreender o problema para desenvolver novos algortmos

Histórias de sucesso: *Discrete Fourier Transform*: processamento de sinais

Doubling Method

Hipótese. O consumo de tempo do programa é $\mathtt{T}(\mathtt{n}) = \mathtt{an}^{\mathtt{b}}$.

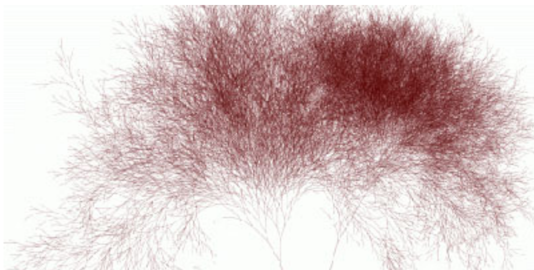
Consequência Quando $\mathtt{n}$ crescem $\mathtt{T}(2\mathtt{n})/\mathtt{T}(\mathtt{n})$ se aproxima de $2^{\mathtt{b}}$.

Doubling method:

- comece com um $\mathtt{n}$ moderado
- registre o consumo de tempo
- dobre o valor de $\mathtt{n}$
- repita enquanto for possível
- verifique que a razão de tempos consecutivos se aproxima de $2^{\mathtt{b}}$
- prediga e extrapole: multiplique por $2^{\mathtt{b}}$ para estimar $\mathtt{T}(2\mathtt{n})$

AULA 10

Árvores binárias de busca



Fonte: http://infosthetics.com/archives/

Referências: Árvores binárias de busca (PF); Binary Search Trees (S&W); slides (S&W)

Árvore binárias de busca

Considere uma árvore binária cujos nós têm um campo chave (key como int ou String, por exemplo).

```
public class BST <Key extends
                 Comparable<Key>, Value> {
  private Node r; // raiz
  private class Node {
     private Key key;
     private Value val;
     private Node left, right;
     public Node(Key key, Value val) {
        this.key = key; this.val = val;
     }
  }
```

Árvore binárias de busca

Uma árvore binária deste tipo é de **busca** (em relação ao campo `key`) se para cada nó `x`: `x.key` é

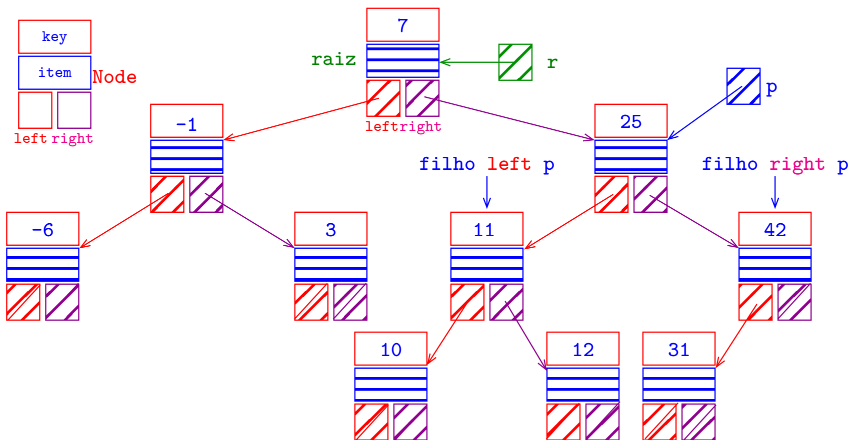
1. maior ou igual à chave de qualquer nó na subárvore esquerda de `x` e
2. menor à chave de qualquer nó na subárvore direita de `x`.

Assim, se `p` é um nó qualquer então vale que

```
q.key.compareTo(p.key) <= 0 e
p.key.compareTo(t.key) < 0
```

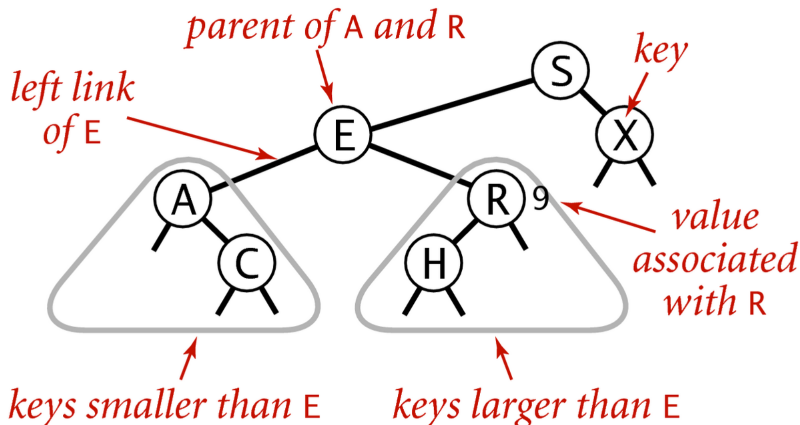
para todo nó `q` na subárvore esquerda de `p` e todo nó `t` na subárvore direita de `p`.

Ilustração de uma árvore binária de busca



in-ordem (e-r-d): -6 -1 3 7 10 11 12 25 31 42

Anatomia de uma árvore binária de busca



Fonte: algs4

BST: get(key)

Recebe uma chave key e retorna o valor val associado key; se key não está na BST, retorna null.

```
public Value get(Key key) {
   Node x = get(r, key);
   if (x == null) return null;
   return x.val;
}
```

BST: get(key)

Recebe uma chave key e retorna o valor val associado key; se key não está na BST, retorna null.

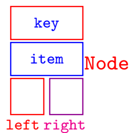
```
private Node get(Node x, Key key) {
   // Considera subárvore que tem raiz x
   if (x == null) return null;
   int cmp = key.compareTo(x.key);
   if (cmp < 0) return get(x.left, key);
   if (cmp > 0) return get(x.right, key);
   return x;
}
```

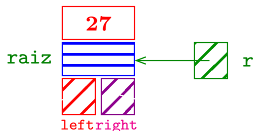
BST: get(key) versão iterativa

Recebe uma chave key e retorna o valor val associado key; se key não está na BST, retorna null.

```
public Value get(Node x, Key key) {
   while (x!=null && !x.key.equals(key)) {
       int cmp = key.compareTo(x.key);
       if (cmp > k) x = x.left;
       else x = x.right;
   }
   if (x == null) return null;
   return x.val;
}
```

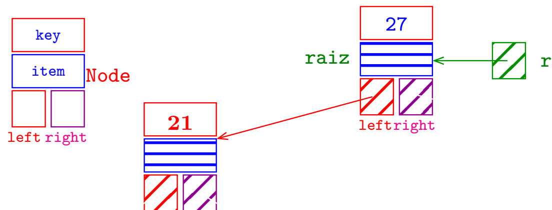
Ilustração de put()





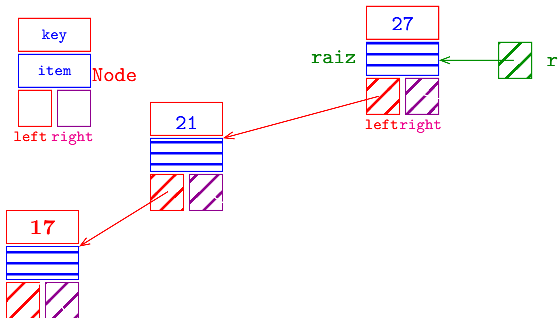
ordem put(): **27**

Ilustração de put()



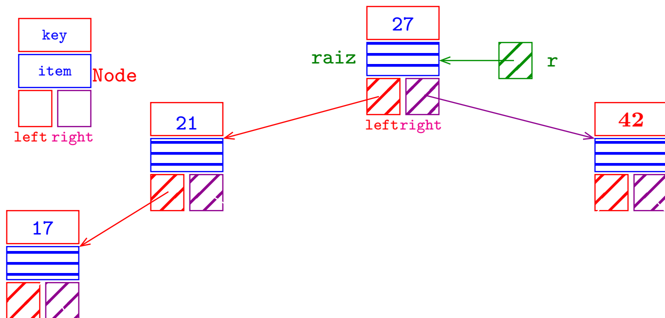
ordem put(): 27 **21**

Ilustração de put()



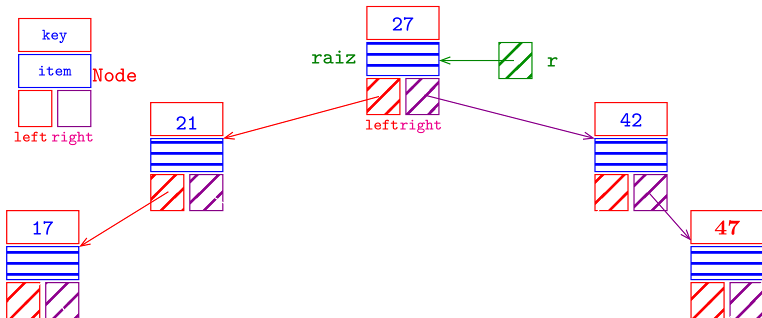
ordem put(): 27 21 **17**

Ilustração de put()



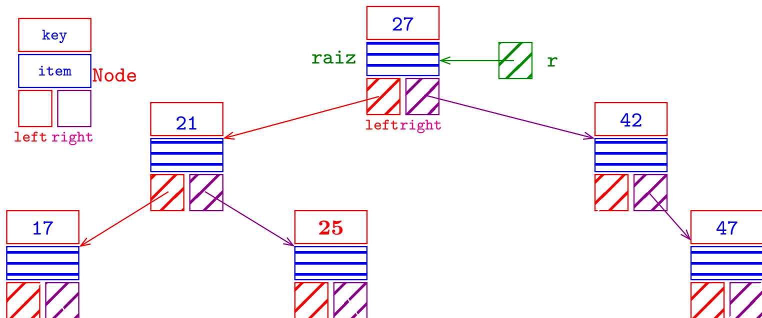
ordem put(): 27 21 17 **42**

Ilustração de put()



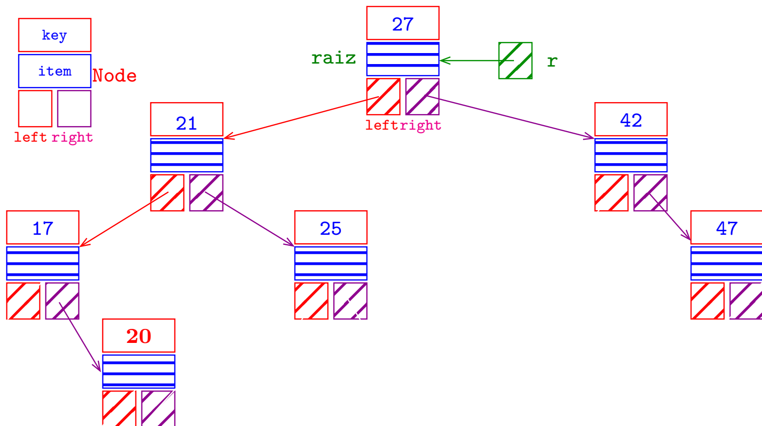
ordem put(): 27 21 17 42 **47**

Ilustração de put()



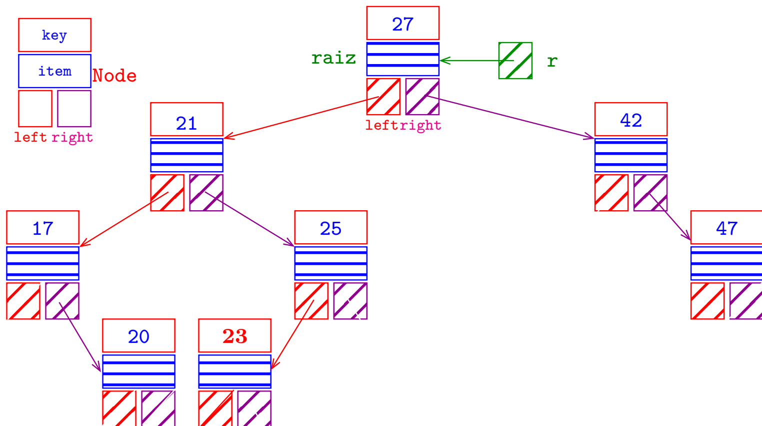
ordem put(): 27 21 17 42 47 **25**

Ilustração de put()



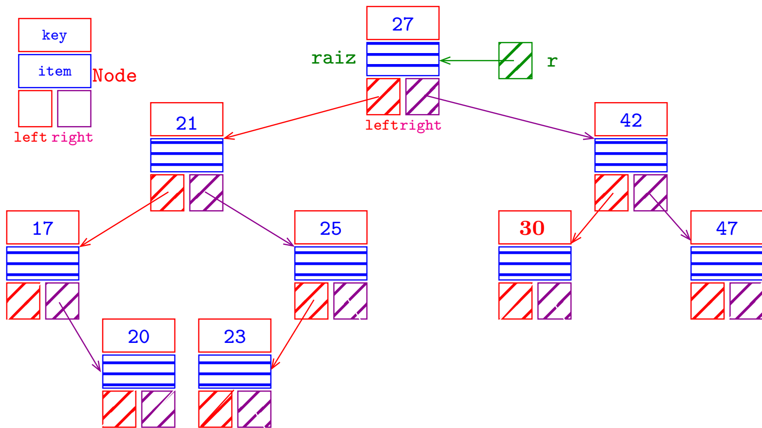
ordem put(): 27 21 17 42 47 25 **20**

Ilustração de put()



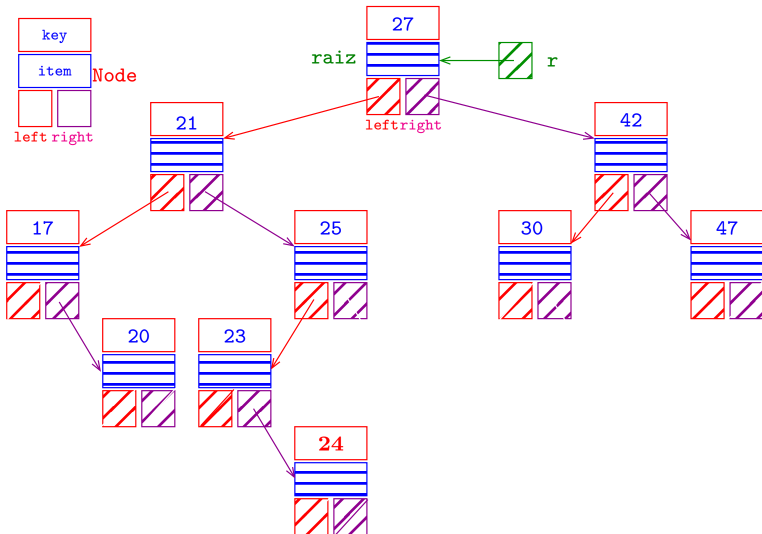
ordem put(): 27 21 17 42 47 25 20 **23**

Ilustração de put()



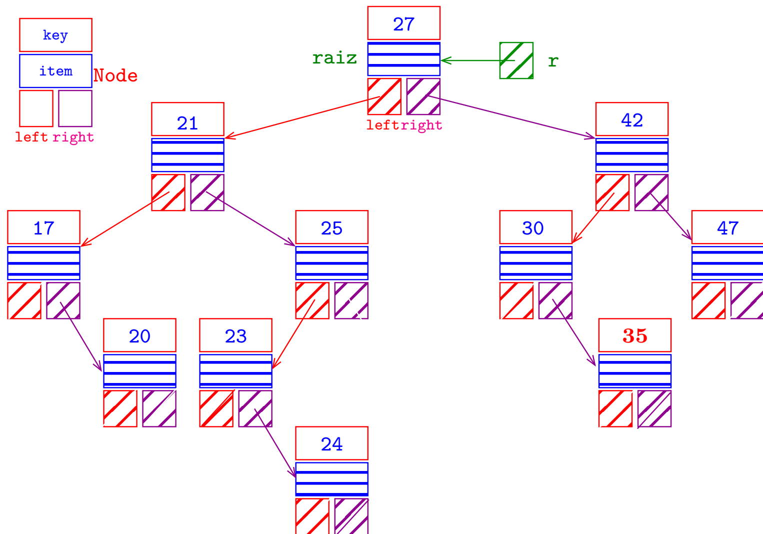
ordem put(): 27 21 17 42 47 25 20 23 **30**

Ilustração de put()



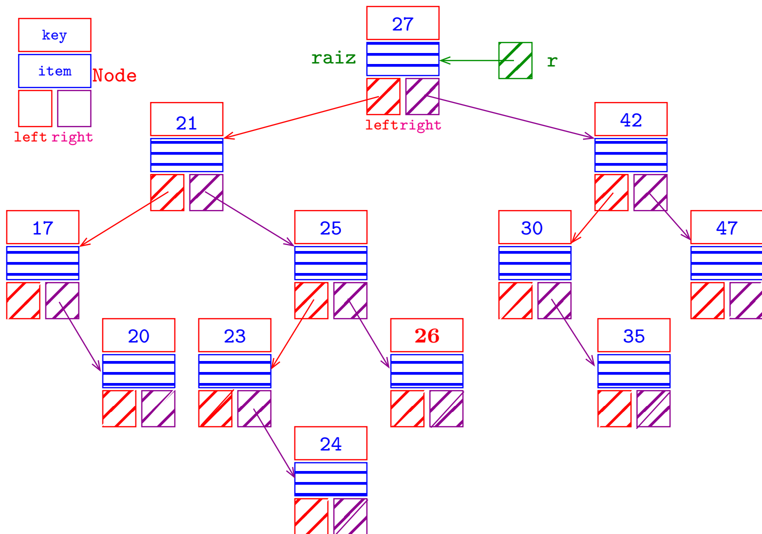
ordem put(): 27 21 17 42 47 25 20 23 30 **24**

Ilustração de put()



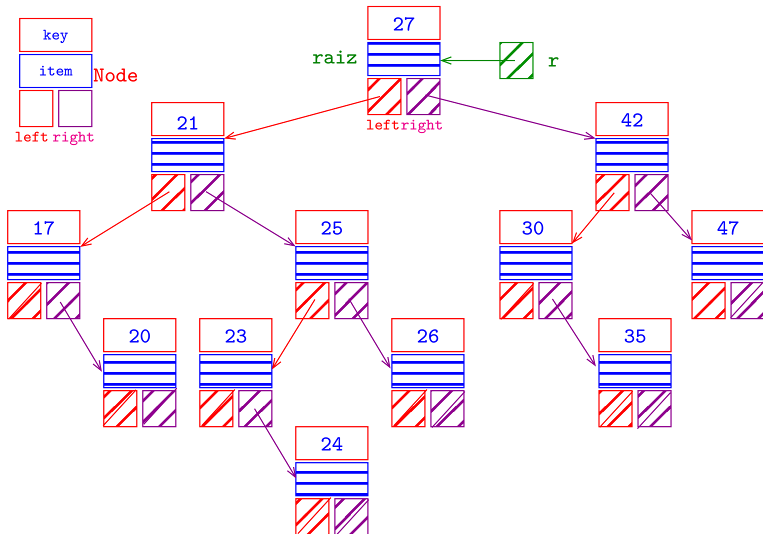
ordem put(): 27 21 17 42 47 25 20 23 30 24 **35**

Ilustração de put()



ordem put(): 27 21 17 42 47 25 20 23 30 24 35 **26**

Ilustração de put()



ordem put(): 27 21 17 42 47 25 20 23 30 24 35 26

BST: put(key, val)

Recebe key e val r e insere um novo nó no lugar correto da árvore de modo que a árvore continue sendo de busca. Se key está na BST o seu valor é atualizado.

```
public void put(Key key, Value val) {
    r = put(r, key, val);
}
```

BST: put(key, val)

```
private Node put(Node x, Key key,
                         Value val) {
   if (x == null)
      return new Node(key, val);
   int cmp = key.compareTo(x.key);
   if (cmp < 0)
      x.left = put(x.left, key, val);
   else if (cmp > 0)
      x.right = put(x.right, key, val);
   else x.val = val;
   return x;
}
```

Ilustração de min()

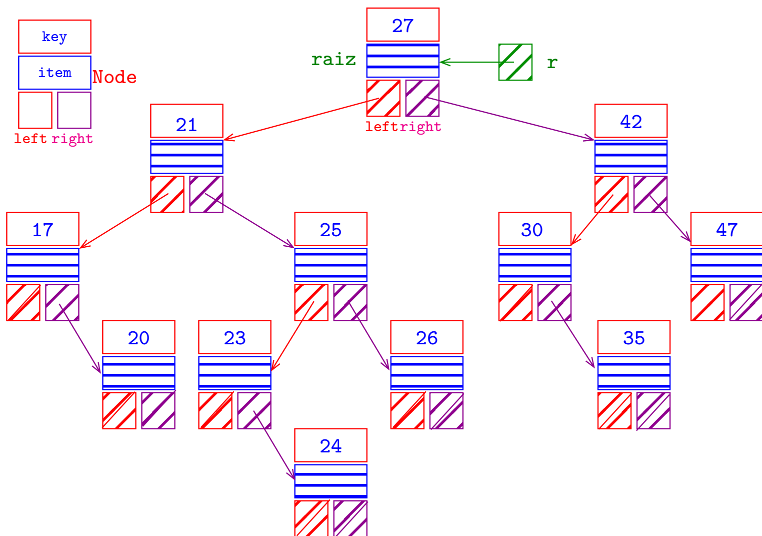
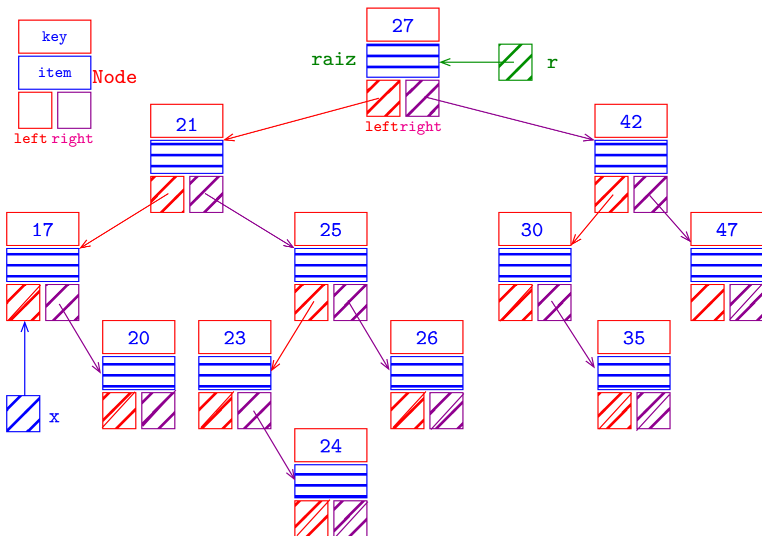


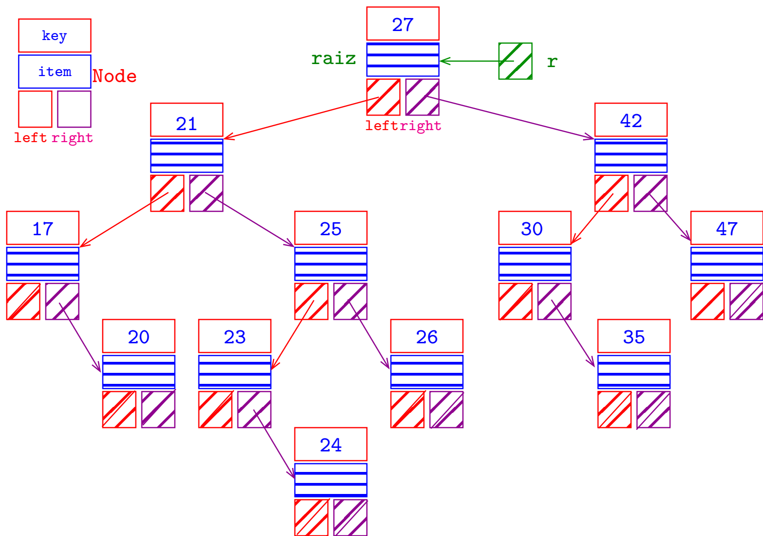
Ilustração de min()



BST: min(key)

```
// Retorna a menor chave na ST.
public Key min() {
   if (r == null) return null;
   return min(r).key;
}

// Retorna o nó da menor chave da
// subárvore cuja raiz é x.
private Node min(Node x) {
   if (x == null) return null;
   if (x.left == null) return x;
   return min(x.left);
}
```

Ilustração de deleteMin()



$\mathtt{x} \leftarrow$ nó com a menor chave

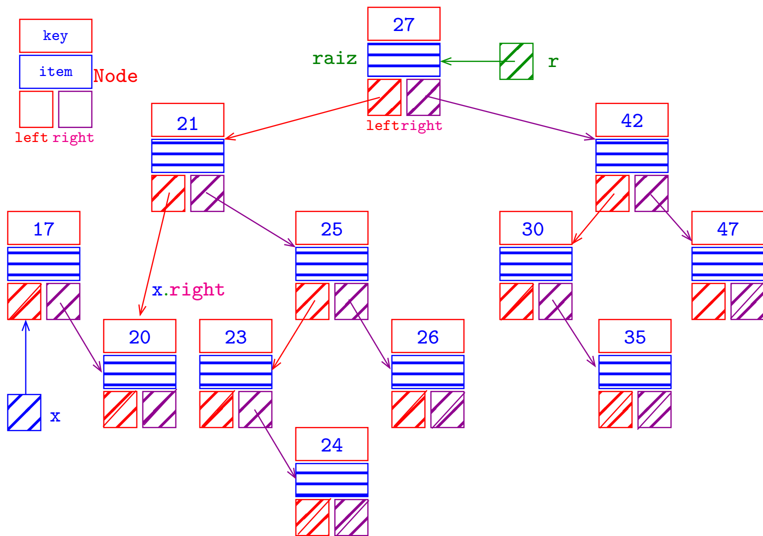
Ilustração de deleteMin()

key
item
Node
left right

raiz
r
27
leftright
21
42
17
25
30
47
20
23
26
35
24
x

remova x da BST

Ilustração de deleteMin()



coletor de lixo em ação

Ilustração de deleteMin()

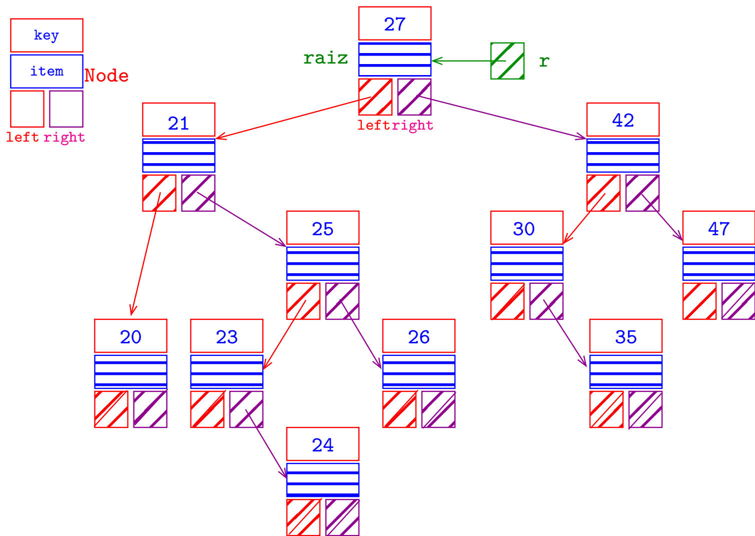
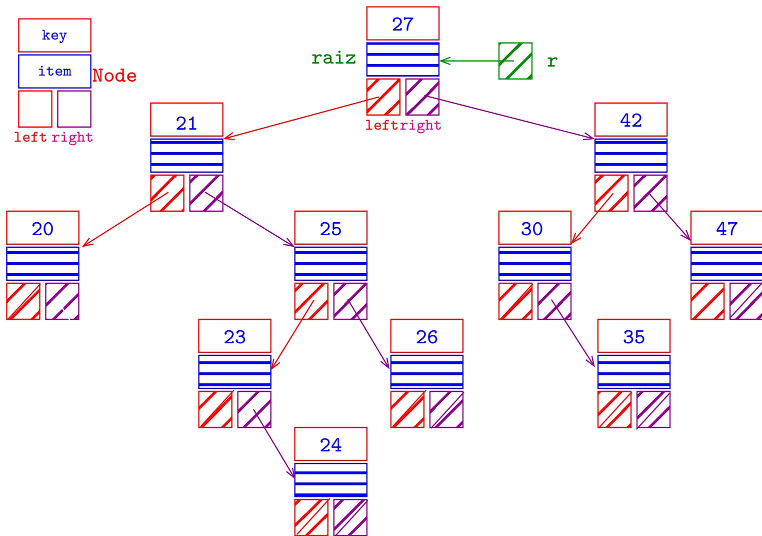


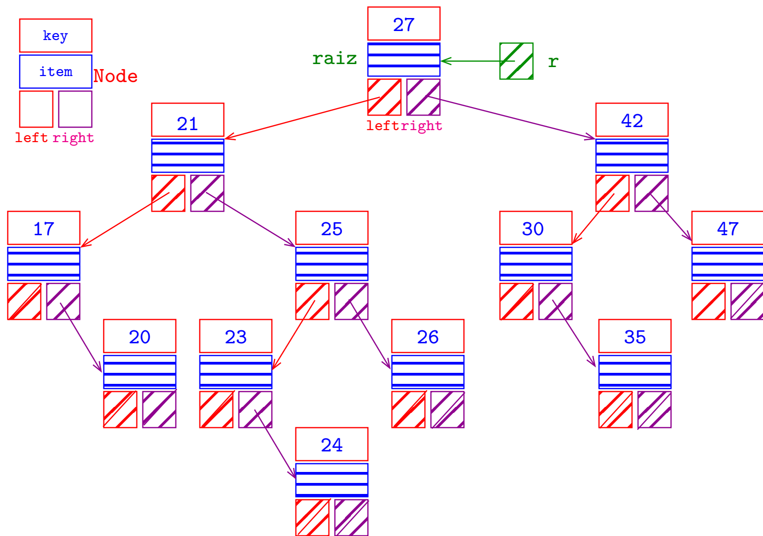
Ilustração de deleteMin()



BST: deleteMin()

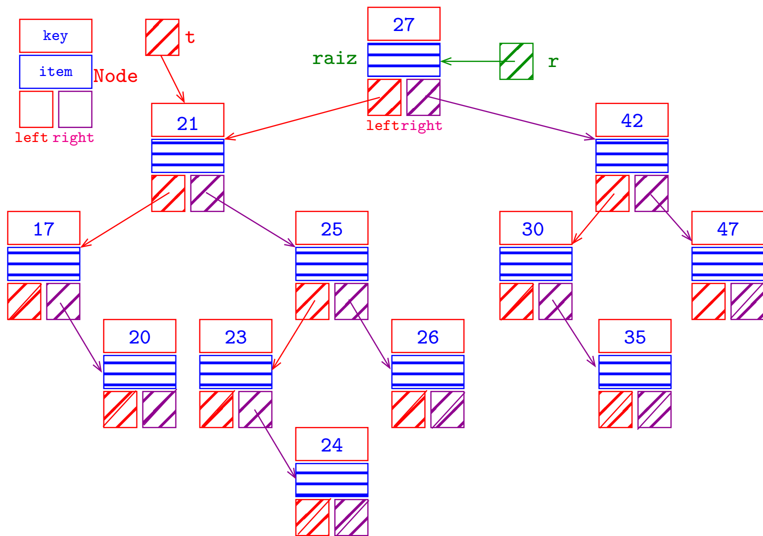
```
// Remove o nó que tem a menor chave.
public void deleteMin() {
   if (r == null) return;
   r = deleteMin(r);
}

// Remove o nó que tem a menor chave
// na subárvore (não vazia) cuja raiz é x
// e retorna a raiz da sub.  resultante.
private Node deleteMin(Node x) {
   if (x == null) return null;
   if (x.left == null) return x.right;
   x.left = deleteMin(x.left);
   return x;
}
```

Ilustração de delete(21)



t ← nó com 21

Ilustração de delete(21)

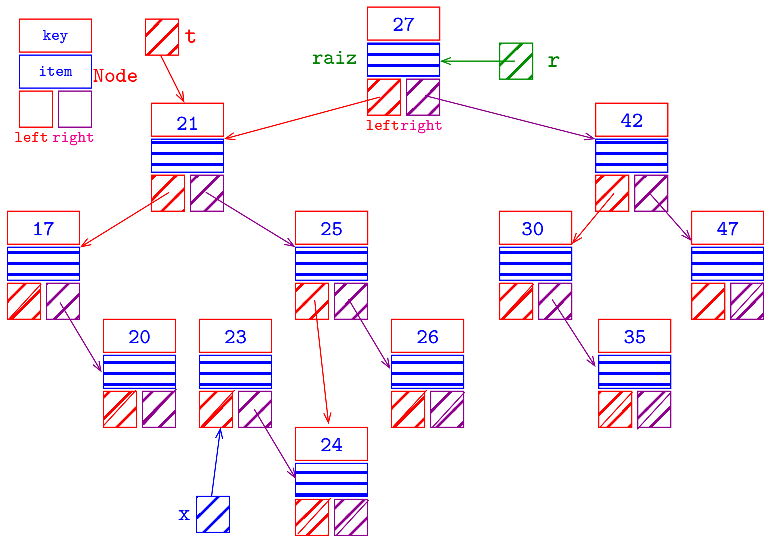


x ← menor nó em t.right (=min(t.right))

Ilustração de delete(21)

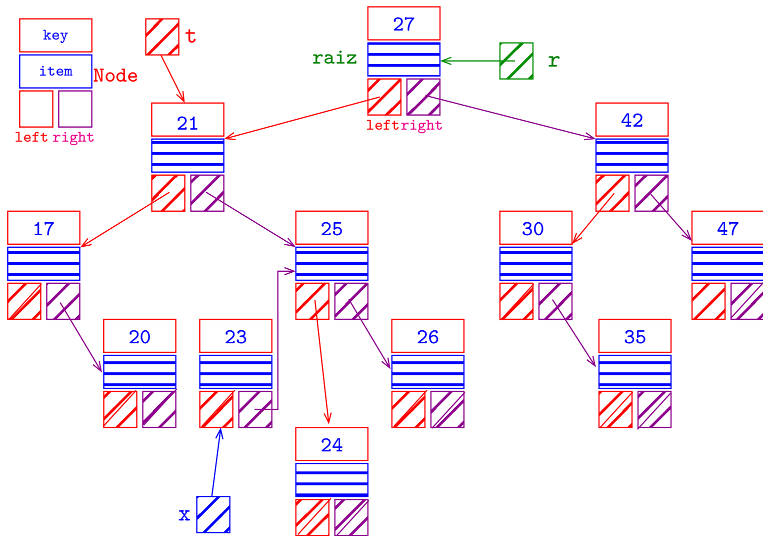
remova x da árvore (=deleteMin(t.right))

Ilustração de delete(21)



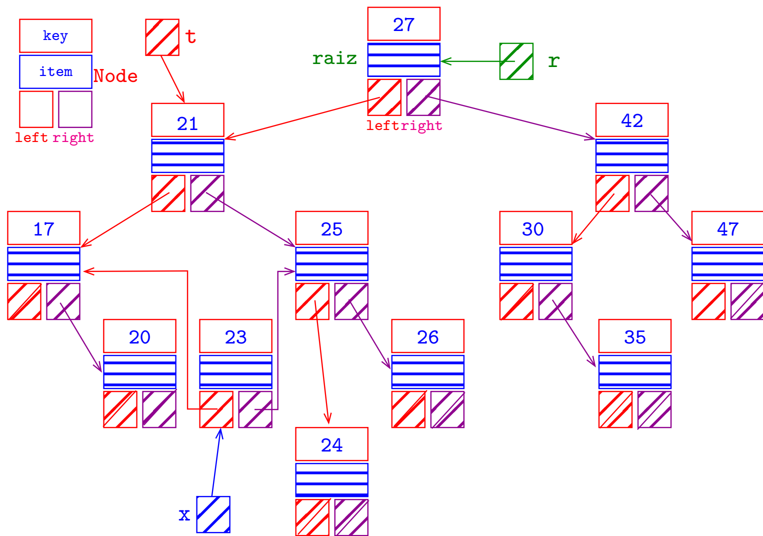
ajuste x.right (x.right ← deleteMin(t.right))

Ilustração de delete(21)



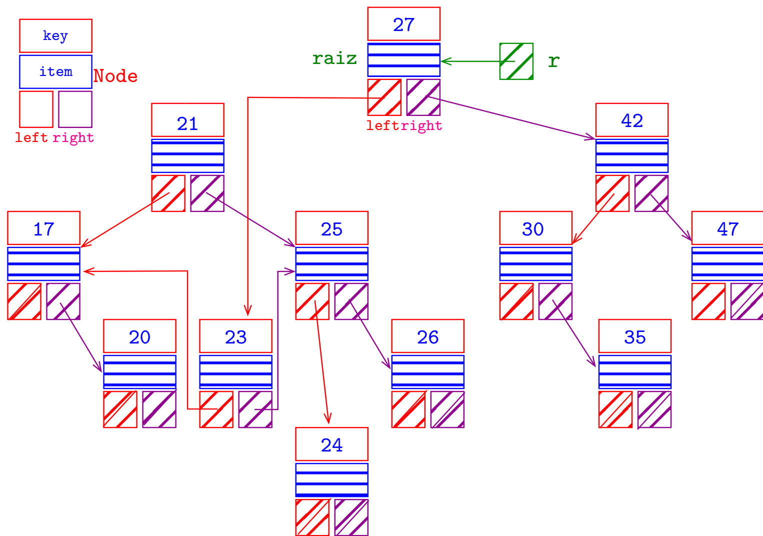
ajuste x.left (x.left ← t.left)

Ilustração de delete(21)



retorne x para ajustar a referência que era para t

Ilustração de delete(21)



coletor de lixo em ação

Ilustração de delete(21)

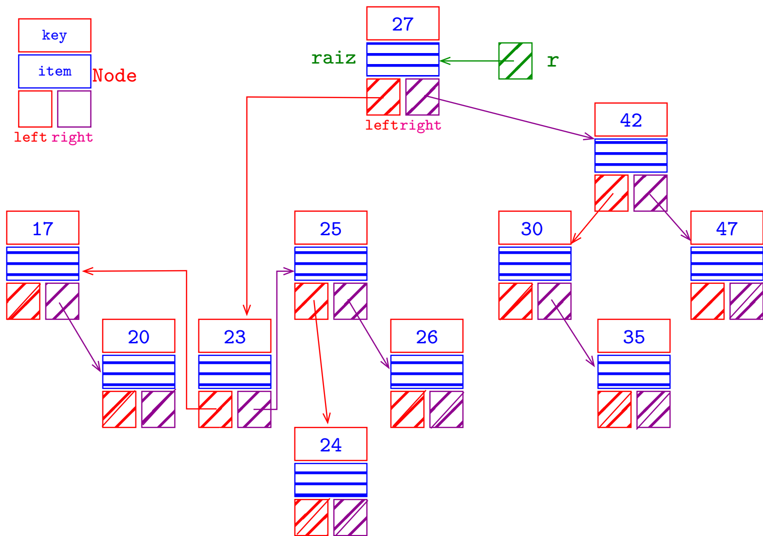
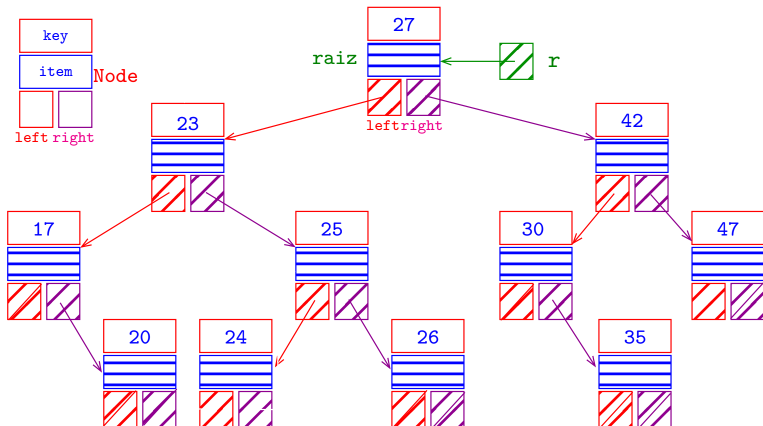


Ilustração de delete(21)



BST: delete(key)

Remove o nó que contém a chave key.
Se nenhum nó contém key, não faz nada.

```
public void delete(Key key) {
   r = delete(r, key);
}
```

BST: delete(key)

```
private Node delete(Node x, Key key) {
   if (x == null) return null;
   int cmp = key.compareTo(x.key);
   if (cmp < 0)
      x.left = delete(x.left, key);
   else if (cmp > 0)
      x.right = delete(x.right, key);
   else{
      // não tem algum filho
      if (x.right == null) return x.left;
      if (x.left == null) return x.right;
```

BST: delete(key)

```
    // x tem ambos os filhos
    Node t = x;
    x = min(t.right); // x.left == null
    x.right = deleteMin(t.right);
    x.left = t.left;
  }
  return x;
}
```

BST aumentada

```
public class BST <Key extends
                  Comparable<Key>, Value> {
  private Node r; // raiz
  private class Node {
     private Key key;
     private Value val;
     private int n;
     private Node left, right;
     public Node(Key key, Value val,
                     int n) {
        this.key = key; this.val = val;
        this.n = n;
     }
  }
```

BST: size()

Retorna o número de pares key-val na BST.

```
public int size() {
   return size(r);
}

// retorna o número de nós na BST
// de raiz x
private int size(Node x) {
   if (x == null) return 0;
   return x.n;
}
```

BST: rank()

Retorna o número de chaves estritamente menores que key.

```
public int rank(Key key) {
   return rank(key, r);
}
```

BST: rank()

Retorna o número de chaves estritamente menores que key.

```
private int rank(Key key, Node x) {
   if (x == null) return0;
   int cmp = x.key.compareTo(key);
   if (cmp > 0) return rank(key, x.left);
   if (cmp < 0)
       return 1 + size(x.left)
                   + rank(key, x.right);
   return size(x.left);
}
```

BST: put(key, val) aumentado

```
private Node put(Node x, Key key,
                         Value val) {
   if (x == null)
       return new Node(key, val, 1);
   int cmp = key.compareTo(x.key);
   if (cmp < 0)
       x.left = put(x.left, key, val);
   else if (cmp > 0)
       x.right = put(x.right, key, val);
   else x.val = val;
   x.n = 1 + size(x.left)
             + size(x.right);
   return x;
}
```

BST: put(key, val) aumentado

```
private Node deleteMin(Node x) {
   if (x.left == null) return x.right;
   x.left = deleteMin(x.left);
   x.n = size(x.left) + size(x.right) + 1;
   return x;
}
```

Consumo de tempo

O consumo de tempo das funções `get()`, `put()` e `delete()` é, no pior caso, proporcional à altura da árvore.

Conclusão: interessa trabalhar com árvores balanceadas: árvores AVL, árvores rubro-negras, árvores ...

Mais experimentos

Consumo de tempo para se criar um ST em que a chaves são as palavras em `les_miserables.txt` e os valores o número de ocorrências.

estrutura	ST	tempo
vetor	não-ordenada	59.5
vetor MTF	não-ordenada	7.6
vetor	ordenada	1.5
lista ligada	não-ordenada	147.1
lista ligada MTF	não-ordenada	15.3
lista ligada	ordenada	115.2
skiplist	ordenada	1.1
arvore binária de busca ♡	ordenada	0.7

Tempos em segundos obtidos com StopWatch.

Desempenho esperado

A ideia de `BST` é realizarmos uma espécie de "*busca binária dinâmica*".

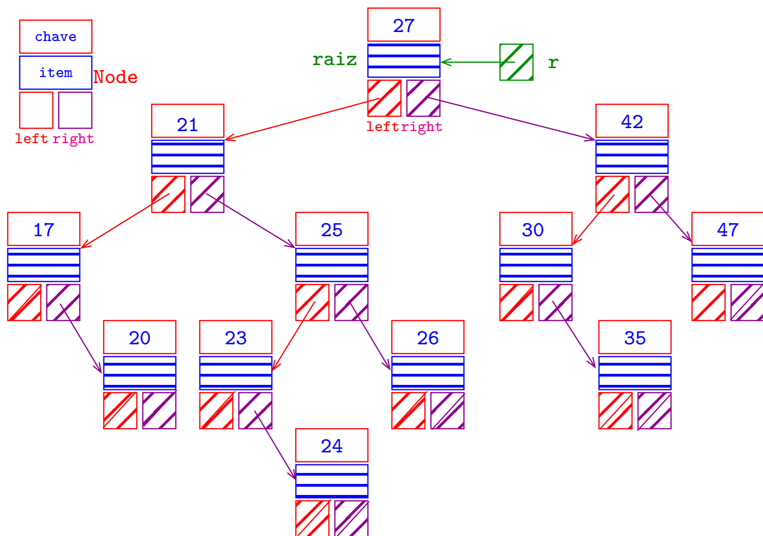
Gostaríamos de combinar a eficiência da busca por chaves ordenados (`get()`) com a eficiência da inserção (`put()`) e remoção (`delete()`).

Qual é o número de chaves examinadas/comparadas em uma busca com sucesso?

Busca com sucesso = busca em que a chave procurada está na `BST`.

Toda operação de busca ou inserção visita $1 + \texttt{p}$ nós, sendo `p` a profundidade do último nó visitado.

Desempenho esperado



Desempenho esperado

Na BST acima:

- a busca por 27 requer 1+0 comparações
- a busca por 21 requer 1+1 comparações
- a busca por 42 requer 1+1 comparações
- a busca por 17 requer 1+2 comparações
- a busca por 25 requer 1+2 comparações
- a busca por 30 requer 1+2 comparações
- a busca por 47 requer 1+2 comparações
- a busca por 20 requer 1+3 comparações
- a busca por 23 requer 1+3 comparações
- a busca por 26 requer 1+3 comparações
- a busca por 35 requer 1+3 comparações
- a busca por 24 requer 1+4 comparações

Desempenho esperado

Assim, o número médio de comparações necessários para uma busca com sucesso na BST acima é

$$(1+2+2+3+3+3+3+4+4+4+4+5)/12 \approx 3.17$$

O **comprimento interno** (= *internal path length*) de uma BT é a soma das profundidades dos seus nós.

O comprimento interno da árvore mostrada anteriormente é

$$0+1+1+2+2+2+2+3+3+3+3+4 = 26$$

BST aleatória

Uma **BST aleatória** é uma BST que se obtém inserindo `n` chaves distintas em ordem aleatória numa árvore inicialmente vazia.

Qual é o número esperado de comparações em uma busca com sucesso em uma BST aleatória com `n` chaves?

BST aleatória

Fato. Buscas com sucesso numa BST aleatória com $\mathtt{n}$ chaves requer cerca de $2\lg \mathtt{n}$ comparações na média.

Demonstração: O número de comparações para encontrados uma dada chave é 1 mais a profundidade do nó que contém a chave. Se somarmos todas as profundidades dos nós de uma árvore obtemos o comprimento interno $\mathtt{C}$ da árvore.

O número médio de comparações para uma busca com sucesso nessa árvore é portanto $1 + \mathtt{C}/\mathtt{n}$.

BST aleatória

Seja C_n o comprimento interno de uma BST aleatória com n chaves. Temos que $C_0 = 0$, $C_1 = 0$ e

$$\begin{aligned} C_n &= ((C_0 + C_{n-1} + n-1) \\ &+ \quad (C_1 + C_{n-2} + n-1) \\ &+ \cdots \\ &+ \quad (C_{n-1} + C_0 + n-1))/n. \end{aligned}$$

Cada $n-1$ é devido a contribuição da raiz às profundidades das duas subárvores.
Reescrevendo a terceira igualdade obtemos

$$nC_n = 2(C_0 + C_1 + \ldots + C_{n-1}) + n(n-1).$$

BST aleatória

Agora vem um truque meio manjado. Primeiro, trocando n por $n-1$ na última igualdade temos que

$$(n-1)C_{n-1} = 2(C_0 + C_1 + \ldots + C_{n-2}) + (n-1)(n-2).$$

Segundo, fazemos

$$nC_n - (n-1)C_{n-1} = 2C_{n-1} + 2(n-1).$$

Rearranjando os termos e dividindo por $n(n+1)$ obtemos

$$\frac{C_n}{n+1} = \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)} < \frac{C_{n-1}}{n} + 2\frac{1}{n}$$

BST aleatória

A última recorrência que pode ser "*desenrolada*" até o caso base

$$\frac{C_n}{n+1} < \frac{C_1}{2} + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right).$$

Assim,

$$C_n < 2(n+1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right).$$

Sabemos que

$$\sum_{2}^{n} \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln n - \ln 1 = \ln n.$$

BST aleatória

Logo, como $2/\lg e = 1.3862\ldots$

$$C_n < 2(n+1)\ln n \ = 2(n+1)\frac{\lg n}{\lg e} < 1.39(n+1)\lg n$$

Portanto, concluímos que na média o número de comparações em uma BST aleatória é

$$1 + \frac{1.39(n+1)\lg n}{n} \sim 2\lg n.$$

Consumo de tempo

O número esperado de nós visitados durante uma busca em uma BST aleatória não passa de $2 \lg \mathtt{n}$