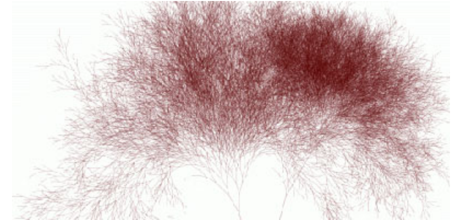
Fonte: ash.atozviews.com

Compacto dos melhores momentos

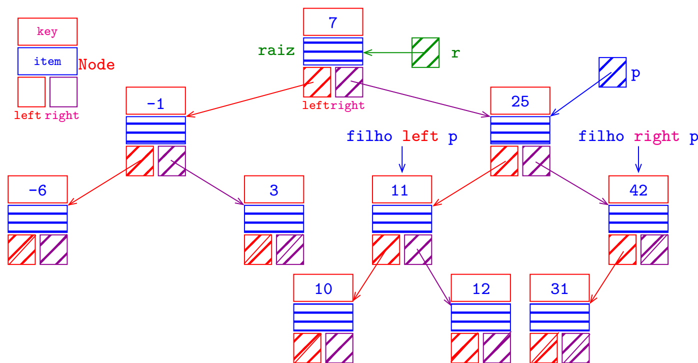
das últimas aulas

Árvores binárias de busca



Fonte: http://infosthetics.com/archives/

Árvore binárias de busca



in-ordem (e-r-d): -6 -1 3 7 10 11 12 25 31 42

Consumo de tempo

O consumo de tempo das operações `get()`, `put()` e `delete()` é, no pior caso, proporcional à altura da árvore.

Consumo de tempo no pior caso

No pior caso a altura de um BST é proporcional ao número `n` de nós BST.

Conclusão:

O consumo de tempo das operações `get()`, `put()` e `delete()` em uma BST é, no pior caso, proporcional ao número `n` de nós.

Consumo de tempo esperado

A altura esperada de BST aleatória é aproximadamente $2 \lg n$.

Conclusão:

O consumo de tempo esperado das operações `get()`, `put()` e `delete()` em uma BST aleatória é proporcional $\lg n$, onde `n` é o número de nós.

Árvores binárias de busca ótima

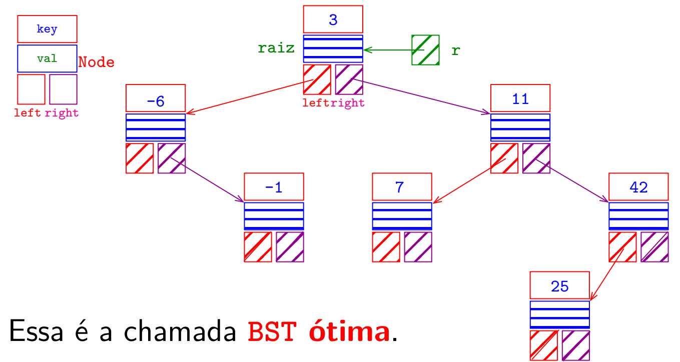
Devemos realizar um série de operação `get()` em uma BST com chaves

$$\texttt{key}[0] < \texttt{key}[1] < \texttt{key}[2] < \ldots < \texttt{key}[\texttt{n}-1].$$

Busca bem-sucedida: suponha que `p[i]` é a probabilidade de `key[i]` ser argumento de `get()`.

Problema. construir uma BST que minimize o número esperado de comparações.

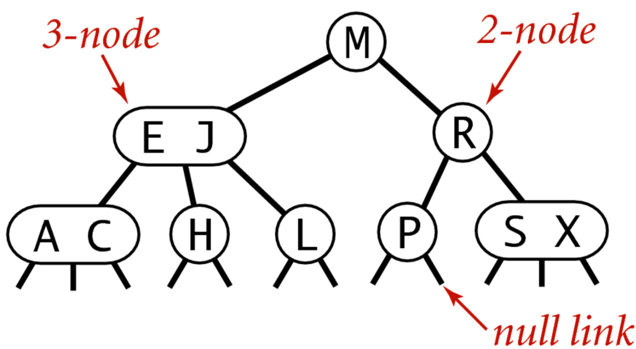
BST ótima



Essa é a chamada **BST ótima**.

$0.2+2(0.22+0.25)+3(0.18+0.05+0.08)+4(0.02) = 2.15$ comparações

Árvore 2-3 de busca



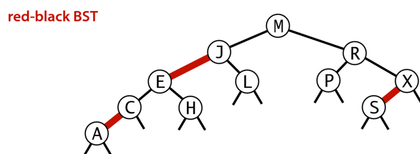
Anatomy of a 2-3 search tree

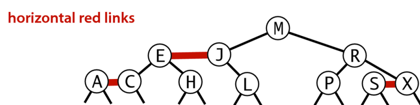
Fonte: `algs4`

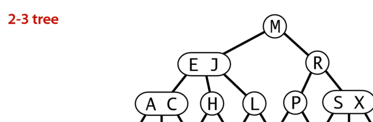
Consumo de tempo

Numa árvore 2-3 com `n` nós, busca e inserção nunca visitam mais que $\lg(\texttt{n}+1)$. Cada visita faz no máximo 2 comparações de chaves.

BST rubro-negra





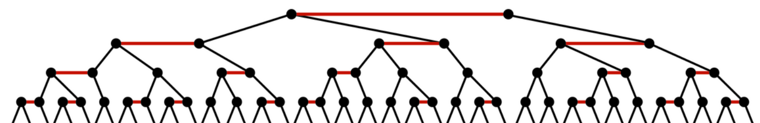


Fonte: `algs4`

1-1 correspondence between red-black BSTs and 2-3 trees

Árvore 2-3 para rubro-negra

Se os links rubros forem desenhados horizontalmente e depois contraídos, teremos uma árvore 2-3:



A red-black tree with horizontal red links is a 2-3 tree

Fonte: `algs4`

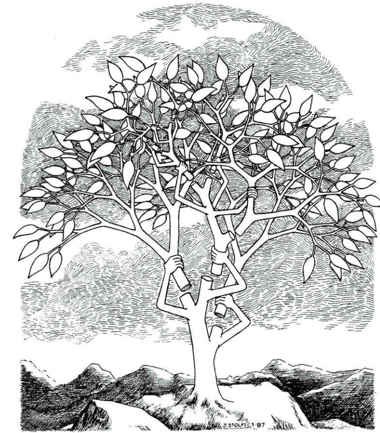
Consumo de tempo

A altura esperada de BST rubro-negra é aproximadamente $\leq 2 \lg n$.

Conclusão:

O consumo de tempo das operações `get()`, `put()` e `delete()` em uma BST rubro-negra é $O(\lg n)$.

Self-adjusting BSTs



Fonte: Jorge Stolfi

Self-adjusting BSTs

Uma BST é de auto balanceamento/ajuste (*self-balancing*/*self-adjusting*) se **automaticamente** mantém a sua altura pequena diante de uma sequência de operações `put()`, `get()`, ...

Árvores rubro-negras são BSTs de auto balanceamento.

Splay trees

Uma **splay tree** é uma BSTde auto-balanceamento com a propriedade adicional que os elementos acessados recentemente são rapidamente acessados.

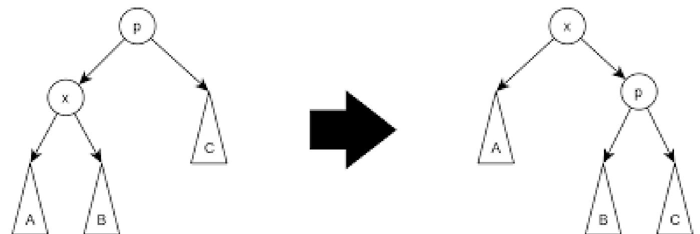
Splay trees implementam em BSTs a política *move to front*.

Splay trees

Uma **splay tree** é uma BSTde auto-balanceamento com a propriedade adicional que os elementos acessados recentemente são rapidamente acessados.

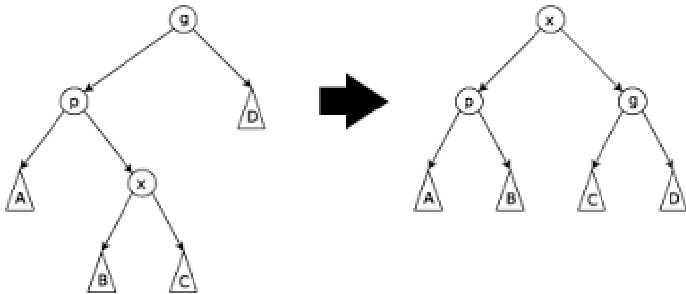
Splay trees implementam em BSTs a política *move to front*.

Splaying: zig



Fonte: Wikipedia

Splaying: zig-zag



Fonte: Wikipedia

Resumo

estrutura	consumo de tempo get(), put(), ...	observação
Skip list	$O(\lg n)$	esperado
BST	$O(n)$	pior caso
BST-aleatória	$O(\lg n)$	esperado
2-3 ST	$O(\lg n)$	pior caso
RedBlack BST	$O(\lg n)$	pior caso
Splay BST	$O(\lg n)$	amortizado
Treap BST	$O(\lg n)$	esperado

n = número de nós na estrutura

Mais experimentos ainda

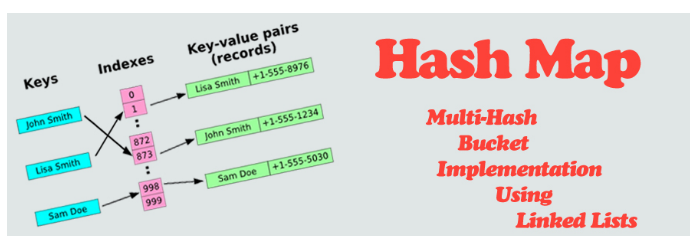
Consumo de tempo para se criar um ST em que a chaves são as palavras em `les_miserables.txt` e os valores o número de ocorrências.

estrutura	ST	tempo
vetor MTF	não-ordenada	7.6
vetor	ordenada	1.5
lista ligada MTF	não-ordenada	15.3
skiplist	ordenada	1.1
árvore binária de busca	ordenada	0.72
árvore rubro-**negra**	ordenada	0.76
splay tree	ordenada	0.68

Tempos em segundos obtidos com `StopWatch`.

AULA 13

Hashing



Fonte: `http://programmingnotes.freeweq.com`

Referências: Hashing (PF); Hash Tables (S&W); slides (S&W); Hashing Functions (S&W); CLRS, cap 12; TAOP, vol 3, cap. 6.4;

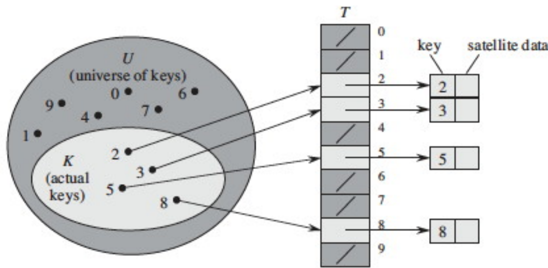
Endereçamento direto

Endereçamento direto (*directed-address*) é uma técnica que funciona bem quando o universo de chaves é razoavelmente pequeno.

Tabela indexada pelas chaves, uma posição para cada possível índice.

Cada posição armazena o valor correspondente a uma dada chave.

Endereçamento direto



Fonte: CLRS

Endereçamento direto

```
public class DirectAddressST<Value> {
  private Value[] vals;
  public DirectAddressST(int m) {
     vals = (Value[]) new Object[m];
  }
```

Endereçamento direto

```
  public Value get(Key key) {
     return vals[key];
  }
  public void put(Key key, Value val) {
     vals[key] = val;
  }
  public void delete(Key key) {
     vals[key] = null;
  }
}
```

Consumo de tempo

Em uma tabela se símbolos com endereçamento direto o consumo de tempo de get(), put() e delete() é $O(1)$.

Maiores defeitos

Os maiores defeitos dessa implementação são:

- Em geral, as chaves não são inteiros não-negativos pequenos...
- desperdício de espaço: é possível que a maior parte da tabela fique vazia

Tabelas de dispersão (*hash tables*)

Uma **tabela de dispensão** ($=$ *hash table*) é uma maneira de organizar uma tabela de símbolos.

Inventadas para funcionar bem (em $O(1)$) em média.

universo de chaves $=$ conjunto de **todas** as possíveis chaves

chaves *realmente usadas* são, em geral, uma *parte pequena* do universo.

A tabela terá a forma st[0...m-1], onde m é o tamanho da tabela.

Funções de dispersão

Uma **função de dispersão** (= *hash function*) é uma maneira de mapear o universo de chaves no conjunto de índices da tabela.

A função de dispersão recebe uma chave `key` e retorna um número inteiro `h`(`key`) no intervalo `0..m-1`.

O número `h`(`key`) é o **código de dispensão** (= *hash code*) da chave.

Queremos uma função de hashing que ...

Queremos uma função de hashing que:

- possa ser calculada eficientemente (em $O(1)$) e
- espalhe *bem* as chaves pelo intervalo $0, \dots, \mathtt{m}-1$.

Knuth, TAOC, pg. 514:

> *"The verb 'to hash' means to chop something up to make a mess out of it; the idea in hashing is to scramble some aspects of the key and to use this partial information as basis for searching..."*

Funções injetoras...

Funções que associam chaves diferentes a inteiros diferentes são difíceis de se encontrar.

Mesmo se conhecêssemos as chaves de antemão!

Exemplo:
Existem $41^{31} \equiv 10^{50}$ funções de 31 elementos em 41 elementos e somente $41!/10! \equiv 10^{43}$ são injetoras: uma em cada 10 milhões!

Funções injetoras...

Funções que associam chaves diferentes a inteiros diferentes são difíceis de se encontrar.

Mesmo se conhecêssemos as chaves de antemão!

Mesmo se o tamanho da tabela for razoavelmente maior que o número de chaves.

O paradoxo do aniversário nos diz se selecionarmos uniformemente ao acaso uma função que leva 23 chaves em uma tabela de tamanho 365, a probabilidade de que duas chaves sejam associadas a uma mesma posição é maior 0,5.

Conclusão: temos que conviver com **colisões**.

Função de hashing modular

Método da divisão (*division method*) ou hash modular: supondo que as chaves são inteiros positivos, podemos usar a função modular (resto da divisão por `m`):

```
private int hash(int key) {
  return key % m;
}
```

Função de hashing modular

Exemplos com $\mathtt{m} = 100$ e com $\mathtt{m} = 97$:

key	hash ($M = 100$)	hash ($M = 97$)
212	12	18
618	18	36
302	2	11
940	40	67
702	2	23
704	4	25
612	12	30
606	6	24
772	72	93
510	10	25
423	23	35
650	50	68
317	17	26
907	7	34
507	7	22
304	4	13
714	14	35
857	57	81
801	1	25
900	0	27
413	13	25

Fonte: algs4

Função de hashing modular

No caso de Strings, podemos iterar hashing modular sobre os caracteres da string:

```
private int hash(String key) {
  int h = 0;
  for (int i = 0; i < key.length(); i++)
     h = (31 * h + key.charAt(i)) % m;
  return h;
}
```

Função de hashing modular

Vantagens: rápida, faz apenas uma divisão.

Desvantagem: devemos evitar certos valores para m, por exemplo:

- se $m = 2^p$, então h(key) é os p bits menos significativos de key.
- se string de caracteres é interpretado como números na base 2^p, então $m = 2^p - 1$ é uma má escolha: permutações de caracteres são levadas ao mesmo valor de hash.

Um primo não "muito perto" de um potência de 2 parece ser uma boa escolha para m.

Função Multiplicativa

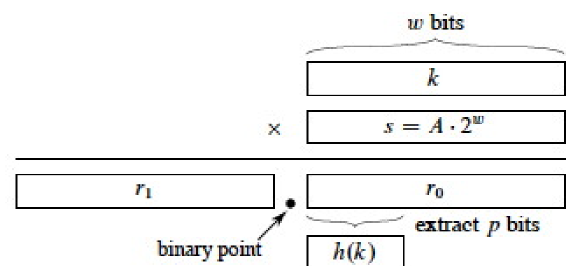
Método multiplicativo (*multiplicative method*):

- escolha uma constante A, $0 < A < 1$;
- multiplique key por A;
- extraia a parte fracional de key $\times$ A
- multiplique a parte fracionária por m
- o valor de hash é o chão dessa multiplicação

Função Multiplicativa

Nesse caso m é uma potência de 2.

Assim, h(key) contém os bits iniciais da metade menos significa de key $\times$ A.



Função Multiplicativa

Desvantagem: mais lenta que o hash modular

Vantagem: o valor de m não é crucial

O que Ubuntu tem a dizer...

http://releases.ubuntu.com/17.10/

MD5SUMS	2018-01-12 05:38	198
MD5SUMS-metalink	2018-01-12 05:38	213
MD5SUMS-metalink.gpg	2018-01-12 05:38	916
MD5SUMS.gpg	2018-01-12 05:38	916
SHA1SUMS	2018-01-12 05:38	222
SHA1SUMS.gpg	2018-01-12 05:38	916
SHA256SUMS	2018-01-12 05:38	294
SHA256SUMS.gpg	2018-01-12 05:38	916

O que Ubuntu tem a dizer...

https://en.wikipedia.org/wiki/MD5

```
773c839d24cf91c394aca6f1b9cd40da *ubuntu-17.10.1-desktop-amd64.iso
7fe25fa47bebc40f4e5007aa182eb627 *ubuntu-17.10.1-server-amd64.iso
f713724032a1b0fdbf3ebd90d2eec8d8 *ubuntu-17.10.1-server-i386.iso
```

O que Ubuntu tem a dizer...

https://en.wikipedia.org/wiki/SHA-2

```
1a3d2d32ada795e5df47293745a7479bcb3e4e29d8ee1eaa114350b691cf38d3 *ubur
8ff73f1b622276758475c3bd5190b382774626de5a82c50930519381f6c3a3f8 *ubur
eb921425349d2a51f90edc3977f83fb6fd8aed082b31515f1bde00d46b260492 *ubur
```

O que Java tem a dizer

Em Java, toda classe uma método padrão `hashCode()` que produz um inteiro entre -2^{31} e $2^{31}-1$,

Exemplo:

```
String s = StdIn.readString();
int h = s.hashCode();
```

O que Java tem a dizer

Outro exemplo:

```
public class Teste {
  private int val;

  public Teste(int val) {
     this.val = val;
  }
}
```

O que Java tem a dizer

```
Welcome to DrJava.
> Teste t = new Teste(5)
> t.hashCode()
22767675
> Teste t = new Teste(6)
> t.hashCode()
27103358
> Teste r = new Teste(27)
> r.hashCode()
5836093
```

O que Java tem a dizer

`hashCode()` deve ser consistente com `equals()`:

  se `a.equals(b) == true`, então
     `a.hashCode() == b.hashCode()`

Para converter o `hashCode()` em um número entre 0 e `m`-1, tome o resto da divisão por `m`.

Antes, é melhor desprezar o bit mais significativo para evitar que % lide com números negativos e produza um resultado negativo:

```
private int hash(Key key) {
  return(key.hashCode() & 0x7fffffff)% m;
}
```

O que Java tem a dizer

Chaves Integer

Em Java o valor de hash de um int é ele mesmo:

```
public class Integer {
  private final int val;

  public int hashCode() {
      return val;
  }
}
```

O que Java tem a dizer

```
Welcome to DrJava.
> Integer i = 15
> i.hashCode()
15
> i= -15
-15
> i.hashCode()
-15
```

O que Java tem a dizer

Chaves Double

Para Doubles o Java usa hashing modular na representação binária do double.

```
public class Double {
  private final double value;
  public int hashCode() {
      long bits=doubleToLongBits(value);
      return (int)(bits^(bits >> 32));
  }
}
```

O que Java tem a dizer

Chaves Boolean

```
public class Boolean {
  private final boolean val;
  public int hashCode() {
      if (val) return 1231;
      return 1237;
  }
}
```

1231 e 1237 são primos.

O que Java tem a dizer

Chaves String

Consideramos o string como um número muito grande na base R$(= 31)$.

Se s é um String de comprimento k, s.hashCode() é o valor

$$s[0] \times 31^{k-1} + s[1] \times 31^{k-2} + \cdots + s[k-2] \times 31 + s[k-1].$$

O método hashCode() utiliza o método de Horn para calcular esse valor.

O que Java tem a dizer

```
int h = 0;
for (int i = 0; i< s.length(); i++)
  h = (31 * h + s.charAt(i)) % m;
```

No lugar do multiplicador 31, poderia usar qualquer outro inteiro R, de preferência primo, mas suficientemente pequeno para que os cálculos não produzam overflow.

O que Java tem a dizer

```
Welcome to DrJava.
> "a".hashCode()
97
> "Como é bom estudar MAC0323!".hashCode()
-638314223
> ("Como é bom estudar
MAC0323!".hashCode())&0x7fffffff
1509169425
> Float x = (float)3.14
> x.hashCode()
1078523331
```

Boas e más funções de dispersão

Uma função só é eficiente se espalha as chaves pelo intervalo de índices de maneira *razoavelmente uniforme*.

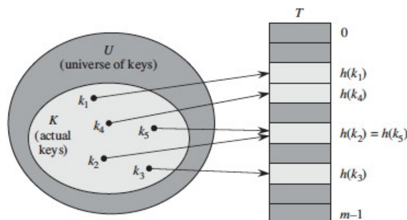
Por exemplos, se os dois últimos dígitos da chaves não variam muito, então "`key % 100`" é um péssima função de dispersão.

Em geral é recomendável que `m` seja um número primo.

Escolha de funções de dispersão é uma combinação de estatística, probabilidade, teoria dos números (primalidade), . . . ,

Colisões

Como o número de chaves é em geral maior que `m`, é inevitável que a função de dispersão leve várias chaves diferentes no mesmo índice.



Fonte: CLRS

Colisões

Dizemos que há uma **colisão** quando duas chaves diferentes são levadas no mesmo índice.

Algumas maneiras de tratar colisões:

- lista encadeadas (=*separating chaining*);
- sondagem linear (=*linear probing (open addressing)*);
- *double hashing (open addressing)*;