



Fonte: ash.atozviews.com

Compacto dos melhores momentos

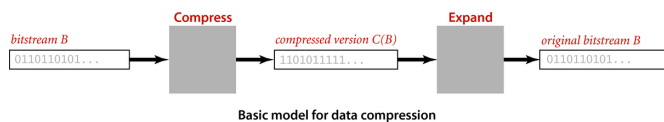
AULA 17

Esquema

representar um dado **fluxo de bits** (*bitstream*) por outro mais curto.

Esquema básico de compressão de dados:

- ▶ um **compressor** transforma um fluxo de bits B em um fluxo $C(B)$ e
- ▶ um **expansor** transforma $C(B)$ de volta em B .



BinaryDump, HexDump e PictureDump

```
% more abra.txt
ABRACADABRA!

% java BinaryDump 16 < abra.txt
0100000101000010
0101001001000001
010001101000001
0100010001000001
010001001010010
0100000100100001
96 bits
```

Compressão de dados

Problema: representar um arquivo **GRANDE** por outro **menor**.

Exemplo:

arquivo **GRANDE:** ababababababababababababababab
arquivo **menor:** 12ab

Por que comprimir?

Menor espaço de armazenamento.

Menor tempo de transmissão.

Software: gzip, bzip, 7z, etc.

Entradas e saídas binárias

Cadeia de bits (= *bitstring*) é uma sequência de bits:

```
110001000001110101010011111011001110001010000
1100000000001111110000011101000111
```

fluxo de bits (= *bitstream*) é uma cadeia de bits na **entrada** ou na **saída** de um programa.

A classe **BinaryStdIn** lê um fluxo de bits a partir da **entrada padrão**.

A classe **BinaryStdOut** escreve um fluxo de bits na **saída padrão**.

Genomas

Podemos usar apenas **2 bits** por caractere:

```
% more genomeTiny.txt
ATAGATGCATAGCGCATAGCTAGATGTGCTAGC

% java Genome - < genomeTiny.txt | java
BinaryDump 32
0000000000000000000000000000000000000000000100001
00110010001110010011001001100100
11001001110010001110111001110010
01000000
104 bits
```

Codificação de comprimento de carreira

Em inglês: *run-length encoding* (=RLE).

Exemplo: cadeia de bits abaixo tem uma carreira de 15 0s, uma carreira de 7 1s, uma de 7 0s, e uma de 11 1s:

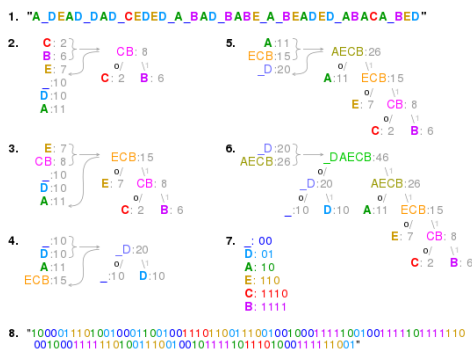
000000000000000011111111000000111111111111

Pode ser representada pela sequência 15 7 7 11. Usando **8 bits** para cada um desses números, teremos uma cadeia de apenas 32 bits (ignore os espaços):

00001111000001110000011100001011

AULA 18

Algoritmo de Huffman



Fonte: Huffman coding

Referências: Algoritmo de Huffman para compressão de dados (PF), Data Compression (SW), slides (SW), video (SW)

Ideias

Tudo se passa como se o algoritmo transformasse uma string em uma cadeia de bits.

Exemplo: transforma ABRACADABRA! em 011111110011001000111111100101.

Cada caractere é convertido em uma pequena cadeia de bits, que é o seu código. Por exemplo, C é convertido em 110.

Suponha que temos um arquivo com 100000 mil caracteres sobre o alfabeto "!ABCDR".

Ideias

O algoritmo de Huffman recebe um fluxo de bits e devolve um fluxo de bits.

Fluxo de bits original é lido de 8 em 8 bits

0100000101000010010100100100000101000011

ABRAC

0101001010001000100000100100001001010010

ADABR

0100000100100001

A!

Compressão ou codificação

Uma tabela de códigos leva cada caractere de 8 bits no seu código.

Exemplo de códigos de comprimento fixo:

caractere	código
!	001
A	010
B	011
C	100
D	101
R	110

A tabela de códigos é uma ST em que as chaves são os caracteres e os valores são os códigos.

Compressão ou codificação

Usando a **tabela de códigos** anterior gastaríamos

$$100000 \times 3 = 300000 \text{ bits}$$

para codificar o arquivo.

Examinando o arquivo observamos a seguinte **frequência de símbolos**.

caractere	frequência
!	5000
A	45000
B	13000
C	9000
D	16000
R	12000

Compressão ou codificação

Ideia do algoritmo de Huffman: usar **códigos curtos** para os caracteres que ocorrem com **frequência** e deixar os **códigos mais longos** para os caracteres mais **raros**.

Mesmo princípio que o **código de Morse**:

... the length of each character in Morse is approximately inverse to its frequency of occurrence in English ...

Codificação

A **tabela de códigos** será um simples vetor de strings **st[0..255]** indexado pelos **256** caracteres **ASCII**.

É fácil produzir o fluxo de bits codificado a partir da tabela **st[]**...

Compressão ou codificação

Exemplo de **códigos de comprimento variável**:

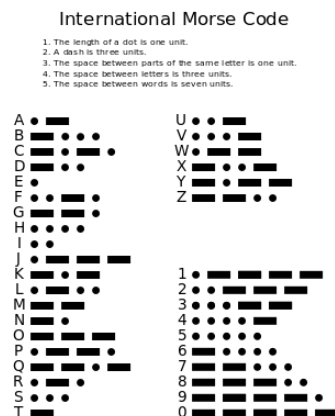
caractere	código
!	1010
A	0
B	111
C	1011
D	100
R	110

Com essa nova **tabela de códigos** gastaríamos

$$5M \times 4 + 45M \times 1 + 13M \times 3 + 9M \times 4 + 16M \times 3 + 12M \times 3$$

bits = 224000 bits para representar o arquivo.

Compressão ou codificação



Fonte: [Morse Code \(Wikipedia\)](#)

Codificação

```
public static void compress() {
    String s = BinaryStdIn.readString();
    char[] input = s.toCharArray();
    // aqui vai a construção de st[]...
    BinaryStdOut.write(input.length);
    for (int i=0; i<input.length; i++){
        String code = st[input[i]];
        for(int j=0;j<code.length(); j++)
            if (code.charAt(j) == '1')
                BinaryStdOut.write(true);
            else
                BinaryStdOut.write(false);
    }
    BinaryStdOut.close(); }
```

Expansão (decodificação)

Na **decodificação**, cada **código** deve ser convertido no correspondente **caractere**.

Tabela de códigos deve ser **injetiva**. Mas isso não basta...

Expansão (decodificação)

Exemplo: a tabela de códigos

caractere	código
!	11
A	0
B	1
C	01
D	10
R	00

Transforma **ABRACADABRA!** em **01000010100100011**.

Expansão (decodificação)

Exemplo: a tabela de códigos

caractere	código
!	11
A	0
B	1
C	01
D	10
R	00

Transforma **ABRACADABRA!** em **01000010100100011**.
01000010100100011 também representa **CRRDDCRCB** 8-0

Expansão (decodificação)

A tabela deve ser *livre de prefixos*.

Uma tabela de códigos é **livre de prefixos** (*prefix-free*) se nenhum código é prefixo de outro.

Exemplo: a tabela abaixo é livre de prefixos.

caractere	código
!	101
A	0
B	1111
C	110
D	100
R	1110

Expansão (decodificação)

Exemplo: a tabela abaixo é livre de prefixos.

caractere	código
!	101
A	0
B	1111
C	110
D	100
R	1110

ABRACADABRA! é a única decodificação possível de

011111110011001000111111100101.

Tabelas inversas

A **tabela de códigos inversa** leva cada **código** no correspondente **caractere**. Exemplo:

código	caractere
101	!
0	A
1111	B
110	C
100	D
1110	R

A tabela inversa é uma **ST de strings**: as **chaves** são **strings** de 0s e 1s e os **valores** são **caracteres**.

Tabelas inversas

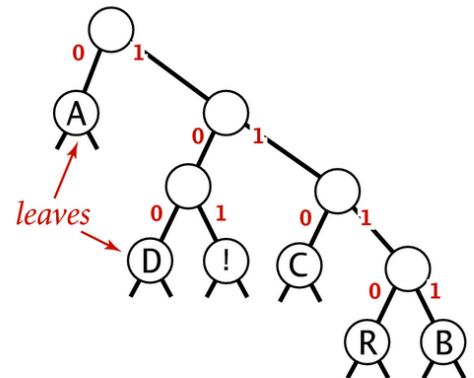
código	caractere
101	!
0	A
1111	B
110	C
100	D
1110	R

A tabela será representada por uma **trie binária**. Portanto, não há nós com apenas um filho. Como a tabela é livre de prefixos, as **chaves estão somente nas folhas**. Diremos que essa é a **trie do código**.

codeword table

key	value
!	101
A	0
B	1111
C	110
D	100
R	1110

trie representation



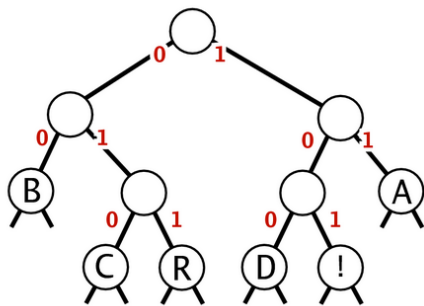
compressed bitstring

01111110011001000111111100101 ← 30 bits
A B RA CA DA B RA !

codeword table

key	value
!	101
A	11
B	00
C	010
D	100
R	011

trie representation



compressed bitstring

11000111101011100110001111101 ← 29 bits
A B R A C A D A B R A !

Nós de uma trie

```
private static class Node
    implements Comparable<Node> {
    // usado só nas folhas
    private char ch;
    // usado só para construção da trie
    private int freq;
    private final Node left;
    private final Node right;
```

Nós de uma trie

```
Node(char ch, int freq, Node left,
      Node right){
    this.ch = ch;
    this.freq = freq;
    this.left = left;
    this.right = right;
}
```

Nós de uma trie

```
public boolean isLeaf() {
    return left == null
        && right == null;
}

public int compareTo(Node that) {
    return this.freq - that.freq;
}
}
```

Decodificação

```
public static void expand() {
    Node root = readTrie();
    int n = BinaryStdIn.readInt();
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        Node x = root;
        while (!x.isLeaf())
            if(BinaryStdIn.readBoolean())
                x = x.right;
            else x = x.left;
        BinaryStdOut.write(x.ch);
    }
    BinaryStdOut.close();
}
```

Navigation icons

Construção de um trie

O algoritmo de construção da **trie** é **iterativo**.

No início de cada **iteração** temos um coleção de **tries** mutuamente disjuntas.

Dada a string a ser **codificada**, a coleção de **tries** inicial é construída assim:

1. determine a **frequência** de cada **caractere** da string original;
2. para cada **caractere**, crie um nó e armazene o **caractere** e sua **frequência** nos campos **ch** e **freq**
3. cada nó será uma **trie** da coleção inicial.

Assim, no início da primeira **iteração**, cada **trie** tem um único nó.

Navigation icons

Huffman coding demo

- Count frequency for each character in input.

char	freq	encoding
A		
B		
C		
D		
R		
!		

input

A B R A C A D A B R A !

Construção de um trie

O segredo do **algoritmo de Huffman** está na maneira de escolher a **tabela de códigos**.

A **tabela de códigos** de Huffman não é universal.

Ela é construída **sob medida** para a string a ser codificado de tal modo que o comprimento da **cadeia codificada** seja o **menor possível** quando comparado com outros códigos livres de prefixos.

Primeiro, construímos a **trie do código**, depois extraímos dela a **tabela de códigos**.

Navigation icons

Construção de um trie

Repita a seguinte iteração até que a coleção de **tries** tenha apenas uma:

1. **escolha** duas **tries** cujas raízes, digamos **x** e **y**, tenham **freq** mínima;
2. **crie** um novo nó **parent** e faça com que **x** e **y** sejam filhos desse nó;
3. **faça** **parent.freq** igual a **x.freq + y.freq**;
4. **insira** essa nova **trie** na coleção

Navigation icons

Huffman coding demo

- Count frequency for each character in input.

char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	
D	1	
R	2	
!	1	

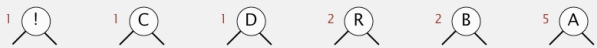
input

A B R A C A D A B R A !

Huffman coding demo

- Start with one node corresponding to each character with weight equal to frequency.

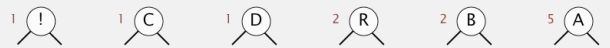
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	
D	1	
R	2	
!	1	



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

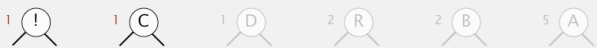
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	
D	1	
R	2	
!	1	



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

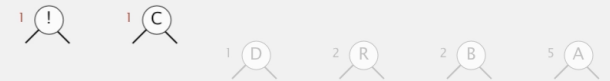
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	
D	1	
R	2	
!	1	



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

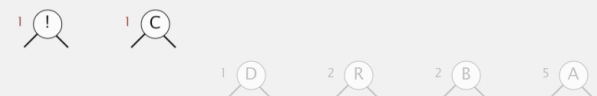
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	
D	1	
R	2	
!	1	



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

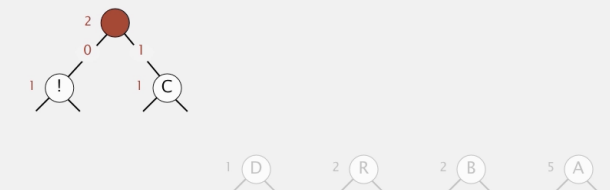
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	
D	1	
R	2	
!	1	



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

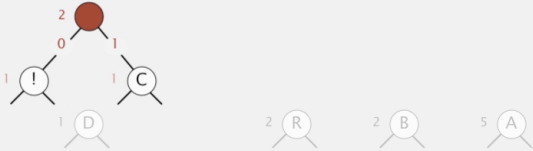
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	1
D	1	
R	2	
!	1	0



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

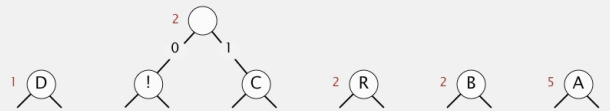
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	1
D	1	
R	2	
!	1	0



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

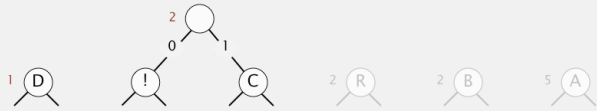
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	1
D	1	
R	2	
!	1	0



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

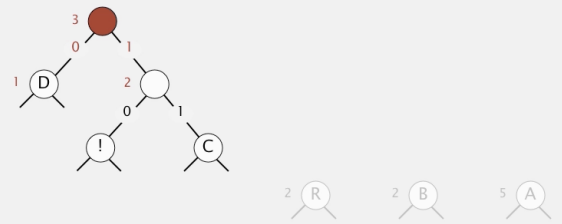
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	1
D	1	
R	2	
!	1	0



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

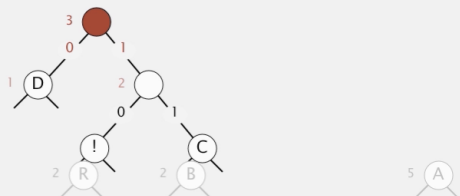
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	1 1
D	1	0
R	2	
!	1	1 0



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

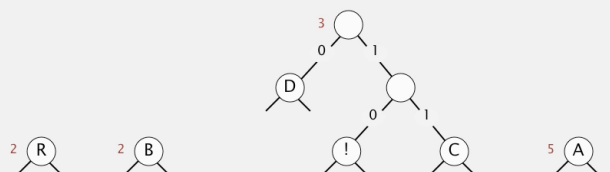
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	1 1
D	1	0
R	2	
!	1	1 0



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

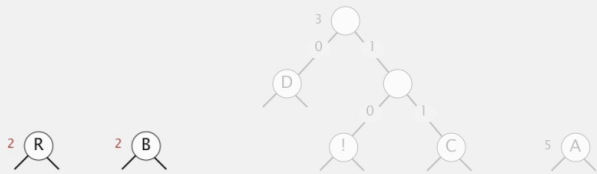
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	1 1
D	1	0
R	2	
!	1	1 0



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

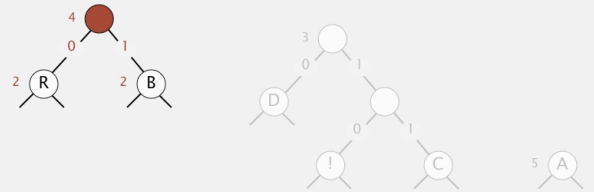
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	1 1
D	1	0
R	2	
!	1	1 0



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

char	freq	encoding
A	5	
B	2	1
C	1	1 1
D	1	0
R	2	0
!	1	1 0



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

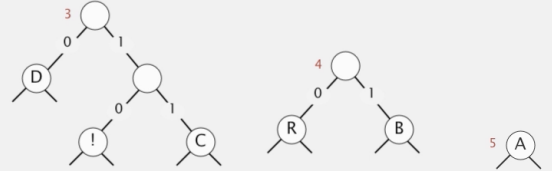
char	freq	encoding
A	5	
B	2	1
C	1	1 1
D	1	0
R	2	0
!	1	1 0



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

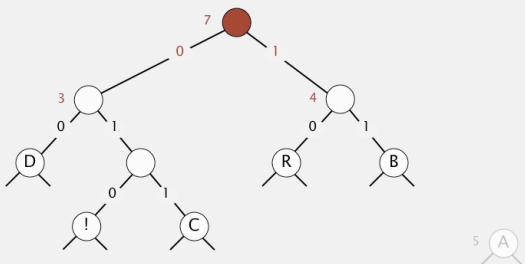
char	freq	encoding
A	5	
B	2	1
C	1	1 1
D	1	0
R	2	0
!	1	1 0



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

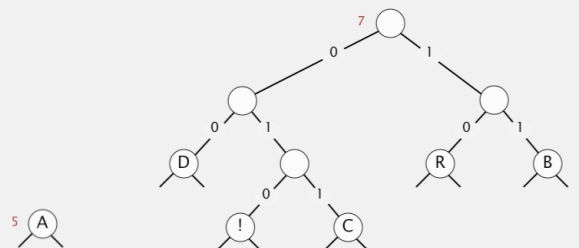
char	freq	encoding
A	5	
B	2	1 1
C	1	0 1 1
D	1	0 0
R	2	1 0
!	1	0 1 0



Huffman coding demo

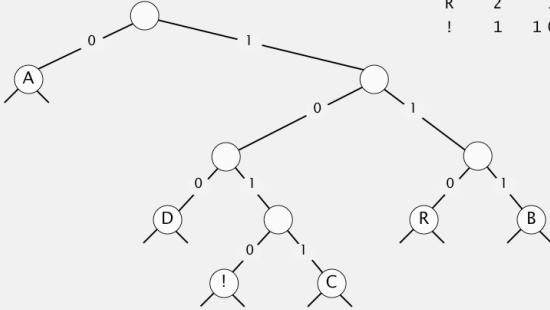
- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

char	freq	encoding
A	5	
B	2	1 1
C	1	0 1 1
D	1	0 0
R	2	1 0
!	1	0 1 0



Huffman coding demo

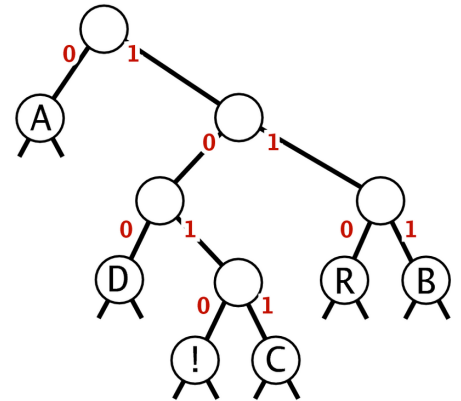
char	freq	encoding
A	5	0
B	2	111
C	1	1011
D	1	100
R	2	110
!	1	1010



Codeword table

key	value
!	1010
A	0
B	111
C	1011
D	100
R	110

Trie representation

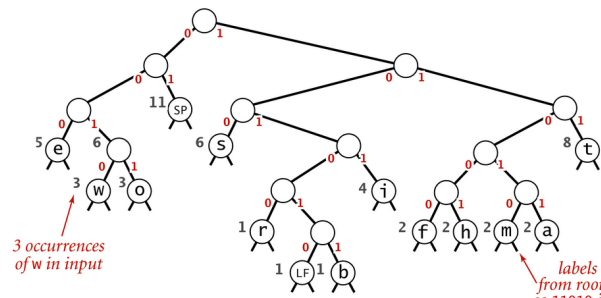


A Huffman code

```
private static Node buildTrie(int[] freq){
    MinPQ<Node> pq= new MinPQ<Node>();
    for (char c = 0; c < R; c++)
        if (freq[c] > 0)
            pq.insert(new Node(c, freq[c],
                null, null));
    while (pq.size() > 1) {
        Node x = pq.delMin();
        Node y = pq.delMin();
        Node parent = new Node('\0',
            x.freq + y.freq, x, y);
        pq.insert(parent);
    }
    return pq.delMin();
}
```

Mais um código de Huffman

trie representation



codeword table

key	value
LF	101010
SP	01
a	11011
b	101011
e	000
f	11000
h	11001
i	1011
m	11010
o	0011
r	10100
s	100
t	111
w	0010

Huffman code for the character stream "it was the best of times it was the worst of times"

buildCode()

A tabela de códigos `st[]` usada na codificação é calculada a partir da `trie`:

```
private static String[]
buildCode(Node root) {
    String[] st = new String[R];
    buildCode(st, root, '');
    return st;
}
```

buildCode()

A tabela de códigos `st[]` usada na codificação é calculada a partir da `trie`:

```
private static void
buildCode(String[] st, Node x, String s) {
    if (x.isLeaf()) {
        st[x.ch] = s;
        return;
    }
    buildCode(st, x.left, s + '0');
    buildCode(st, x.right, s + '1');
}
```

A trie de Huffman é ótima

Proposição. A cadeia de bits produzida pelo algoritmo de Huffman é **mínima** no seguinte sentido:

nenhuma outra cadeia produzida por um código livre de prefixos é mais curta que a cadeia produzida pelo algoritmo de Huffman.

Em **MAC0338 Análise de Algoritmos** lembrar disto quando estiverem vendo **Algoritmos Gulosos**.

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ 🔍

A trie de Huffman é ótima?

```
% more abra.txt
ABRACADABRA!
% java Huffman - < abra.txt |
    java BinaryDump 30
010100000100101000100010010000
110100001101010100101010000100
000000000000000000000000000110
001111100101101000111110010100
120 bits
```

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ 🔍

A trie de Huffman é ótima?

```
010100000100101000100010010000
11010000110101010010101000010
```

	código	caractere
0 1	01000001	A
0 0 1	01000100	D
0 1	00100001	!
1	01000011	C
0 1	01010010	R
1	01000010	B

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ 🔍

A trie de Huffman é ótima?

```
% more abra.txt | java BinaryDump 0
96 bits
% java Huffman - < abra.txt |
    java BinaryDump 0
120 bits
```

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ 🔍

A trie de Huffman é ótima?

```
% java Huffman - < abra.txt |
    java BinaryDump 30
010100000100101000100010010000
110100001101010100101010000100
0000000000000000000000000001100
01111100101101000111110010100
120 bits
```

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ 🔍

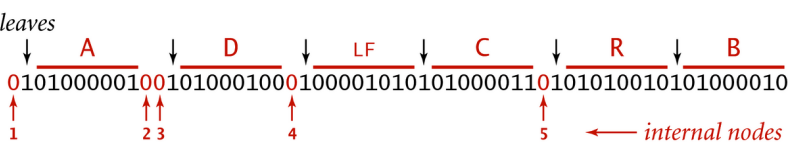
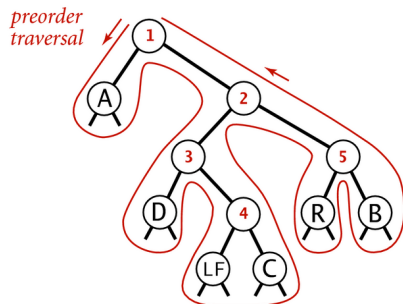
Codificação da trie

A cadeia de bits produzida pelo **algoritmo de Huffman** não pode ser decodificada sem a correspondente **trie**.

É preciso acrescentar a **trie** à cadeia codificada.

◀ ▶ ⏪ ⏩ ⏴ ⏵ 🔍

Codificação da trie



Using preorder traversal to encode a trie as a bitstream

Codificação da trie

```
private static void writeTrie(Node x) {
    if (x.isLeaf()) {
        BinaryStdOut.write(true);
        BinaryStdOut.write(x.ch);
        return;
    }
    BinaryStdOut.write(false);
    writeTrie(x.left);
    writeTrie(x.right);
}
```

Codificação da trie

```
private static Node readTrie() {
    if (BinaryStdIn.readBoolean()) {
        char c = BinaryStdIn.readChar();
        return new Node(c, 0, null, null);
    }
    return new Node('\0', 0,
        readTrie(), readTrie());
}
```

Compressão completa

Com `buildTrie()`, `buildCode()` e `writeTrie()`, podemos completar o método de compressão

```
public static void compress() {
    String s = BinaryStdIn.readString();
    char[] input = s.toCharArray();
    // aqui vai a construção de st[...]
    int[] freq = new int[R];
    for (int i = 0; i < input.length; i++)
        freq[input[i]]++;
    Node root = buildTrie(freq);
    String[] st = buildCode(root);
}
```

Compressão completa

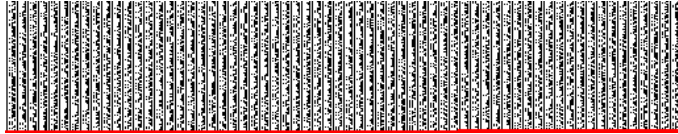
```
writeTrie(root);
BinaryStdOut.write(input.length);
for (int i=0; i<input.length; i++){
    String code = st[input[i]];
    for(int j=0;j<code.length(); j++){
        if (code.charAt(j) == '1')
            BinaryStdOut.write(true);
        else}
            BinaryStdOut.write(false);
    }
}
BinaryStdOut.close();
}
```

Esqueleto da classe Huffman

```
public class Huffman {
    private static int R = 256; // alfabeto
    private static class Node implements...
    public static void compress() {...}
    public static void expand() {...}
    private static Node buildTrie(int[] freq)
    private static String[] buildCode(Node...
    private static void writeTrie(Node x)
    private static Node readTrie() {...}
}
```

Genome versus Huffman

```
% java PictureDump 512 100 < genomeVirus.txt
```



50008 bits

Genome versus Huffman

```
% java Genome - < genomeVirus.txt | java PictureDump 512 25
```



12536 bits

```
% java Huffman - < genomeVirus.txt | java PictureDump 512 25
```



12576 bits

RunLength versus Huffman

```
% java PictureDump 32 48 < q32x48.bin
```

1536 bits

Q

```
% java RunLength - < q32x48.bin | java BinaryDump 0
```

1144 bits

```
% java Huffman - < q32x48.bin | java BinaryDump 0
```

816 bits