Fonte: ash.atozviews.com

Compacto dos melhores momentos

AULA 17

Compressão de dados

Problema: representar um arquivo GRANDE por outro menor.

Exemplo:
arquivo GRANDE: `abababababababababababababab`
arquivo menor: `12ab`

Por que comprimir?
Menor espaço de armazenamento.
Menor tempo de transmissão.

Software: `gzip`, `bzip`, `7z`, etc.

Esquema

representar um dado fluxo de bits (*bitstream*) por outro mais curto.

Esquema básico de compressão de dados:

- um compressor transforma um fluxo de bits `B` em um fluxo `C(B)` e
- um expansor transforma `C(B)` de volta em `B`.

Basic model for data compression

Entradas e saídas binárias

Cadeia de bits (=*bitstring*) é uma sequência de bits:

```
1100010000011101010100111111011001110001010000
1100000000001111110000011101000111
```

fluxo de bits (=*bitstream*) é uma cadeia de bits na entrada ou na saída de um programa.

A classe `BinaryStdIn` lê um fluxo de bits a partir da entrada padrão.

A classe `BinaryStdOut` escreve um fluxo de bits na saída padrão.

BinaryDump, HexDump e PictureDump

```
% more abra.txt
ABRACADABRA!

% java BinaryDump 16 < abra.txt
0100000101000010
0101001001000001
0100001101000001
0100010001000001
0100001001010010
0100000100100001
96 bits
```

Genomas

Podemos usar apenas 2 bits por caractere:

```
% more genomeTiny.txt
ATAGATGCATAGCGCATAGCTAGATGTGCTAGC

% java Genome - < genomeTiny.txt | java
BinaryDump 32

00000000000000000000000000100001
00110010001110010011001001100100
11001001110010001110111001110010
01000000
104 bits
```

Codificação de comprimento de carreira

Em inglês: *run-length encoding* (=RLE).

Exemplo: cadeia de bits abaixo tem uma carreira de 15 0s, uma carreira de 7 1s, uma de 7 0s, e uma de 11 1s:

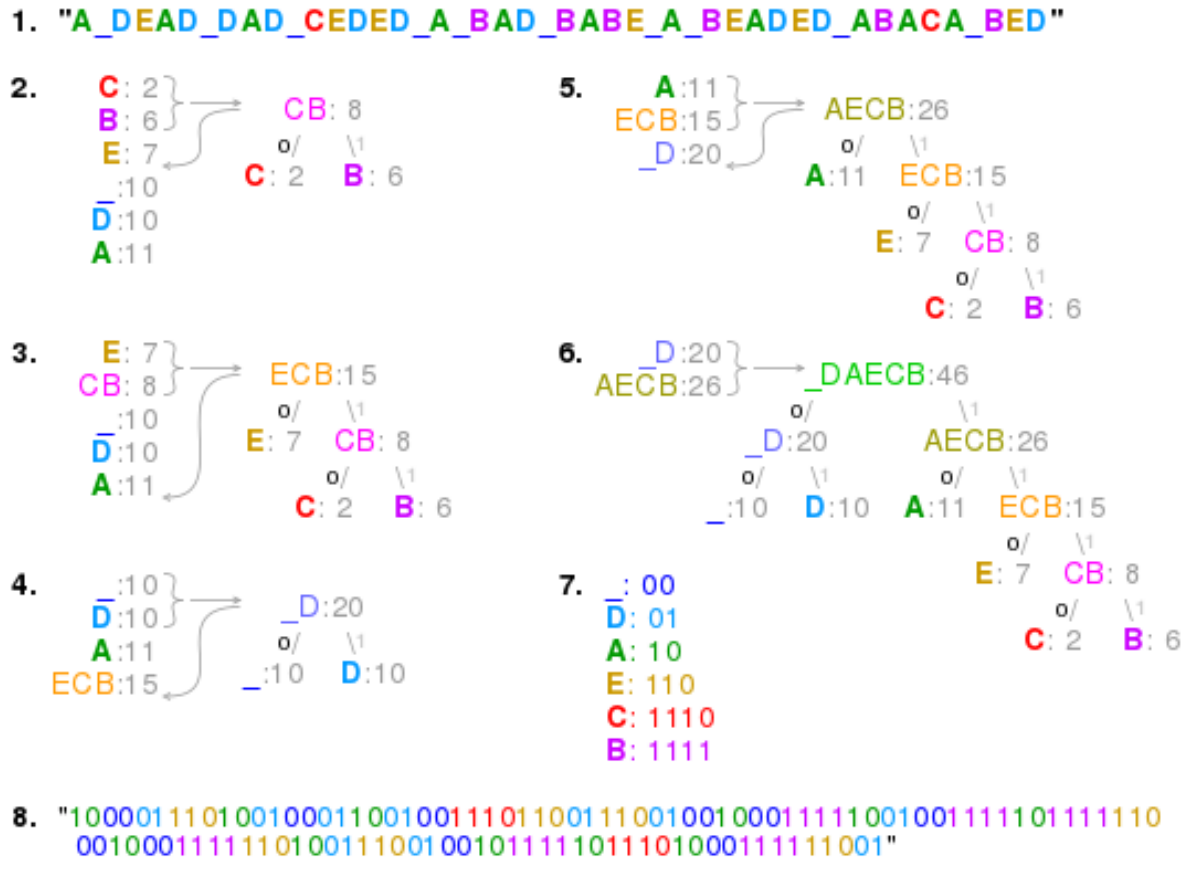
000000000000000111111100000011111111111

Pode ser representada pela sequência 15 7 7 11. Usando **8 bits** para cada um desses números, teremos uma cadeia de apenas 32 bits (ignore os espaços):

00001111000001110000011100001011

AULA 18

Algoritmo de Huffman



Fonte: `Huffman coding`

Referências: Algoritmo de Huffman para compressão de dados (PF), Data Compression (SW), slides (SW), video (SW)

Ideias

O algoritmo de Huffman recebe um fluxo de bits e devolve um fluxo de bits.

Fluxo de bits original é lido de 8 em 8 bits

```
01000001010000100101001001000001010000011
ABRAC

01010010100010001000010010000100101010010
ADABR

0100000100100001
A!
```

Ideias

Tudo se passa como se o algoritmo transformasse uma string em uma cadeia de bits.

Exemplo: transforma `ABRACADABRA!` em `01111111001100100011111111100101`.

Cada caractere é convertido em uma pequena cadeia de bits, que é o seu código. Por exemplo, `C` é convertido em `110`.

Suponha que temos um arquivo com 100000 mil caracteres sobre o alfabeto `"!ABCDR"`.

Compressão ou codificação

Uma tabela de códigos leva cada caractere de 8 bits no seu código.
Exemplo de códigos de comprimento fixo:

caractere	código
!	001
A	010
B	011
C	100
D	101
R	110

A tabela de códigos é uma ST em que as chaves são os caracteres e os valores são os códigos.

Compressão ou codificação

Usando a tabela de códigos anterior gastaríamos

$$100000 \times 3 = 300000 \quad \text{bits}$$

para codificar o arquivo.

Examinando o arquivo observamos a seguinte frequência de símbolos.

caractere	frequência
!	5000
A	45000
B	13000
C	9000
D	16000
R	12000

Compressão ou codificação

Exemplo de códigos de comprimento variável:

caractere	código
!	1010
A	0
B	111
C	1011
D	100
R	110

Com essa nova tabela de códigos gastaríamos

$$5\mathtt{M} \times 4 + 45\mathtt{M} \times 1 + 13\mathtt{M} \times 3 + 9\mathtt{M} \times 4 + 16\mathtt{M} \times 3 + 12\mathtt{M} \times 3$$

bits $=$ 224000 bits para representar o arquivo.

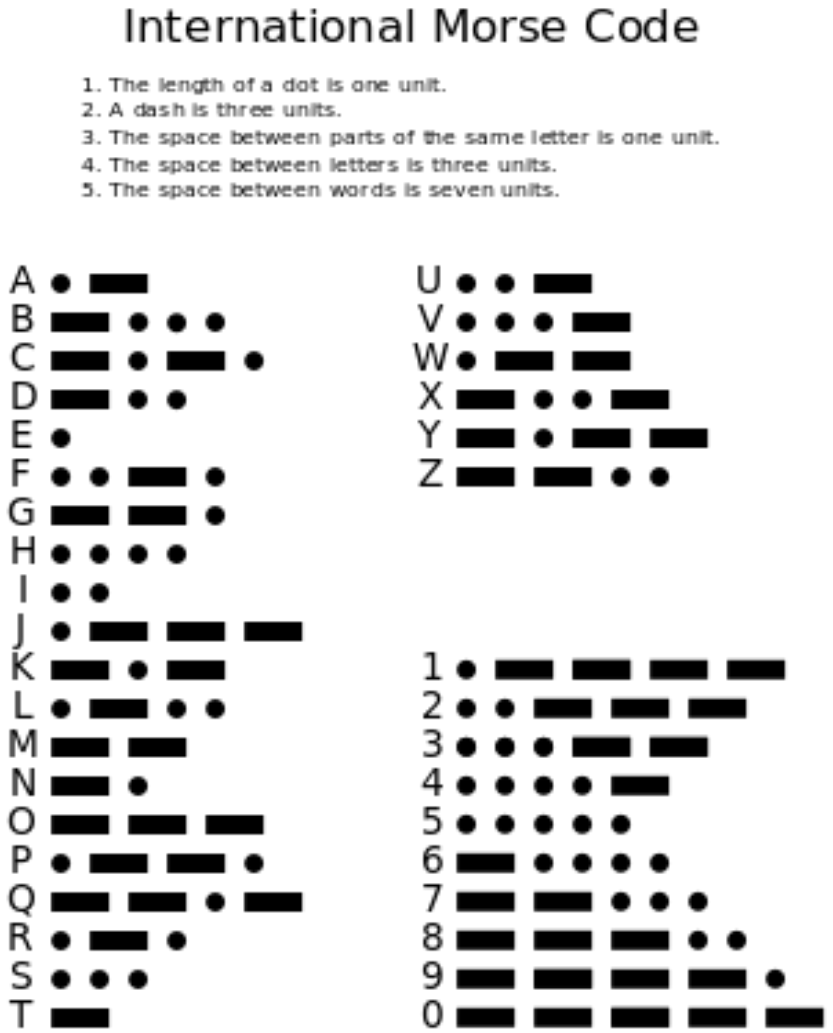
Compressão ou codificação

Ideia do algoritmo de Huffman: usar códigos **curtos** para os caracteres que ocorrem com **frequência** e deixar os códigos mais **longos** para os caracteres mais **raros**.

Mesmo princípio que o código de Morse:

> *. . . the length of each character in Morse is approximately inverse to its frequency of occurrence in English . . .*

Compressão ou codificação



Fonte: Morse Code (Wikipedia)

Codificação

A tabela de códigos será um simples vetor de strings `st[0..255]` indexado pelos 256 caracteres ASCII.

É fácil produzir o fluxo de bits codificado a partir da tabela `st[]`...

Codificação

```
public static void compress() {
   String s = BinaryStdIn.readString();
   char[] input = s.toCharArray();
   // aqui vai a construção de st[]...
   BinaryStdOut.write(input.length);
   for (int i=0; i<input.length; i++){
       String code = st[input[i]];
       for(int j=0;j<code.length(); j++)
           if (code.charAt(j) == '1')
              BinaryStdOut.write(true);
           else
              BinaryStdOut.write(false);
   }
   BinaryStdOut.close(); }
```

Expansão (decodificação)

Na decodificação, cada código deve ser convertido no correspondente caractere.

Tabela de códigos deve ser injetiva. Mas isso não basta...

Expansão (decodificação)

Exemplo: a tabela de códigos

caractere	código
!	11
A	0
B	1
C	01
D	10
R	00

Transforma ABRACADABRA! em
01000010100100011.

Expansão (decodificação)

Exemplo: a tabela de códigos

caractere	código
!	11
A	0
B	1
C	01
D	10
R	00

Transforma ABRACADABRA! em
01000010100100011.
01000010100100011 também representa
CRRDDCRCB 8-0

Expansão (decodificação)

A tabela deve ser *livre de prefixos*.

Uma tabela de códigos é **livre de prefixos** (*prefix-free*) se nenhum código é prefixo de outro.
Exemplo: a tabela abaixo é livre de prefixos.

caractere	código
!	101
A	0
B	1111
C	110
D	100
R	1110

Expansão (decodificação)

Exemplo: a tabela abaixo é livre de prefixos.

caractere	código
!	101
A	0
B	1111
C	110
D	100
R	1110

ABRACADABRA! é a única decodificação possível de

01111111001100100011111111100101.

Tabelas inversas

A tabela de códigos inversa leva cada código no correspondente caractere. Exemplo:

código	caractere
101	!
0	A
1111	B
110	C
100	D
1110	R

A tabela inversa é uma ST de strings: as chaves são strings de 0s e 1s e os valores são caracteres.

Tabelas inversas

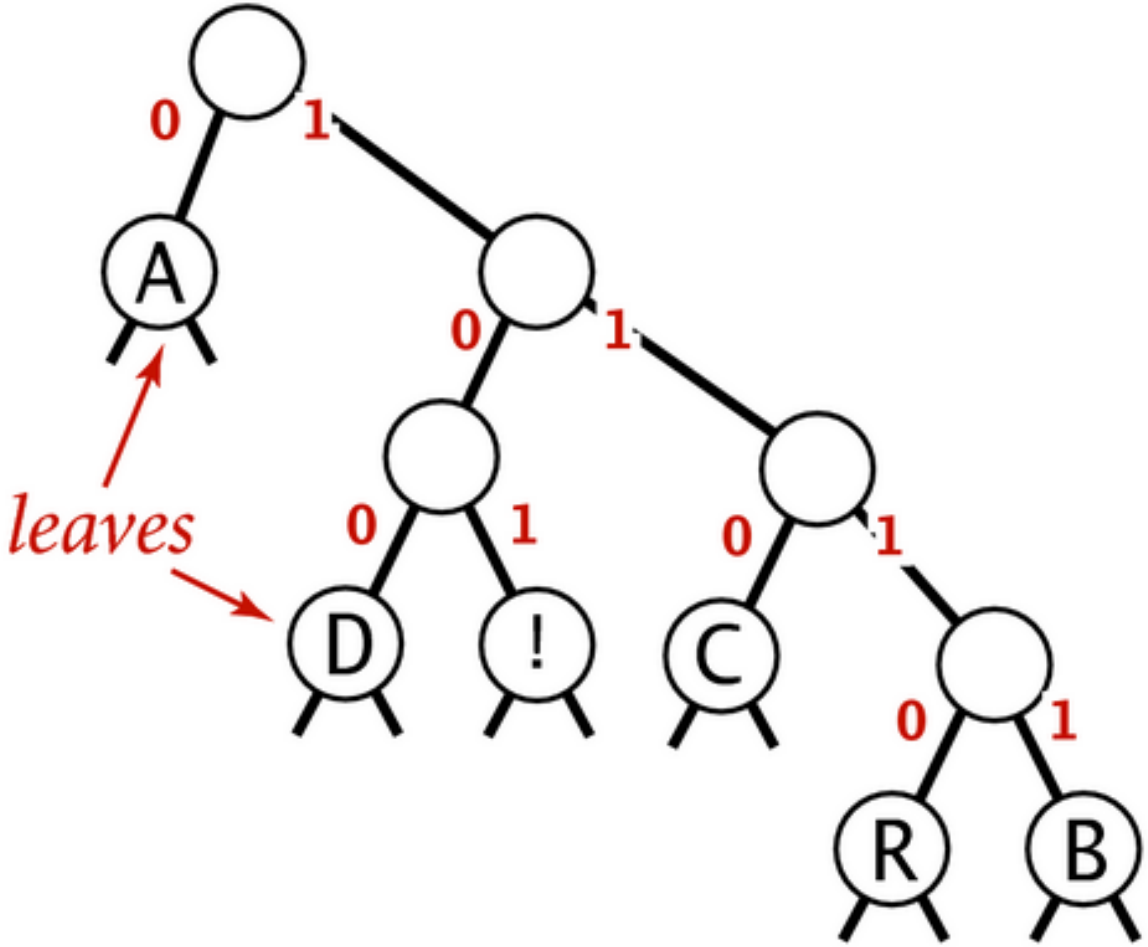
código	caractere
101	!
0	A
1111	B
110	C
100	D
1110	R

A tabela será representada por uma trie binária. Portanto, não há nós com apenas um filho. Como a tabela é livre de prefixos, as chaves estão somente nas folhas. Diremos que essa é a **trie do código**.

codeword table

key	*value*
!	101
A	0
B	1111
C	110
D	100
R	1110

trie representation



compressed bitstring

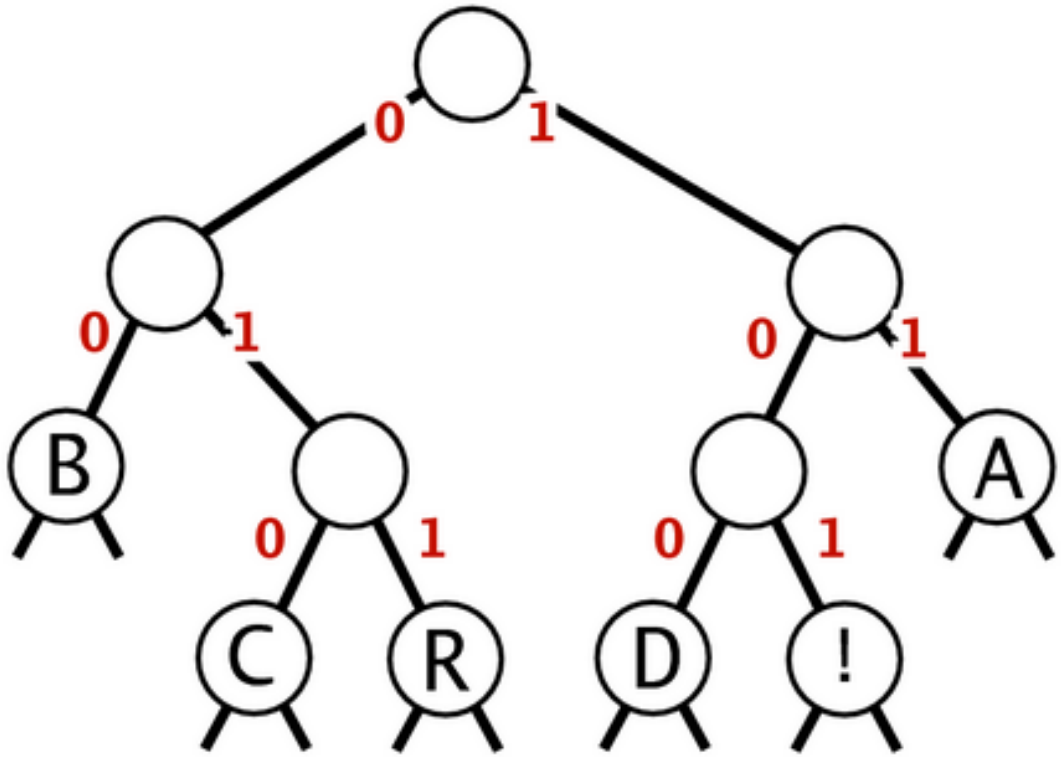
01111111001100100011111100101 ← *30 bits*

A B RA CA DA B RA !

codeword table

key	*value*
!	101
A	11
B	00
C	010
D	100
R	011

trie representation



compressed bitstring

1100011110101110011000111101 ← *29 bits*

A B R A C A D A B R A !

Nós de uma trie

```
private static class Node
        implements Comparable<Node> {
   // usado só nas folhas
   private char ch;
   // usado só para construção da trie
   private int freq;
   private final Node left;
   private final Node right;
```

Nós de uma trie

```
Node(char ch, int freq, Node left,
      Node right){
   this.ch = ch;
   this.freq = freq;
   this.left = left;
   this.right = right;
}
```

Nós de uma trie

```
    public boolean isLeaf() {
        return left == null
            && right == null;
    }

    public int compareTo(Node that) {
        return this.freq - that.freq;
    }
}
```

Decodificação

```
public static void expand() {
   Node root = readTrie();
   int n = BinaryStdIn.readInt();
   for (int i = 0; i < n; i++) {
       Node x = root;
       while (!x.isLeaf())
           if(BinaryStdIn.readBoolean())
              x = x.right;
           else x = x.left;
       BinaryStdOut.write(x.ch);
   }
   BinaryStdOut.close();
}
```

Construção de um `trie`

O segredo do algoritmo de Huffman está na maneira de escolher a tabela de códigos.

A tabela de códigos de Huffman não é universal.

Ela é construída sob medida para a string a ser codificado de tal modo que o comprimento da cadeia codificada seja o menor possível quando comparado com outros códigos livres de prefixos.

Primeiro, construímos a trie do código, depois extraímos dela a tabela de códigos.

Construção de um `trie`

O algoritmo de construção da `trie` é iterativo.
No início de cada iteração temos um coleção de `tries` mutuamente disjuntas.
Dada a string a ser codificada, a coleção de `tries` inicial é construída assim:

1. determine a frequência de cada caractere da string original;
2. para cada caractere, crie um nó e armazene o caractere e sua frequência nos campos `ch` e `freq`
3. cada nó será uma `trie` da coleção inicial.

Assim, no início da primeira iteração, cada `trie` tem um único nó.

Construção de um `trie`

Repita a seguinte iteração até que a coleção de `tries` tenha apenas uma:

1. escolha duas `tries` cujas raízes, digamos `x` e `y`, tenham `freq` mínima;
2. crie um novo nó `parent` e faça com que `x` e `y` sejam filhos desse nó;
3. faça `parent.freq` igual a `x.freq + y.freq`;
4. insira essa nova `trie` na coleção

Huffman coding demo

- Count frequency for each character in input.

char	freq	encoding
A		
B		
C		
D		
R		
!		

input

A B R A C A D A B R A !

Huffman coding demo

- Count frequency for each character in input.

char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	
D	1	
R	2	
!	1	

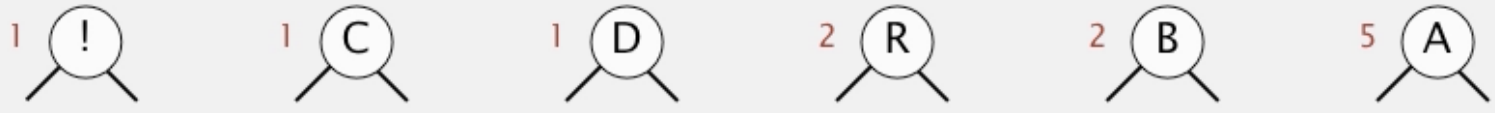
input

A B R A C A D A B R A !

Huffman coding demo

- Start with one node corresponding to each character with weight equal to frequency.

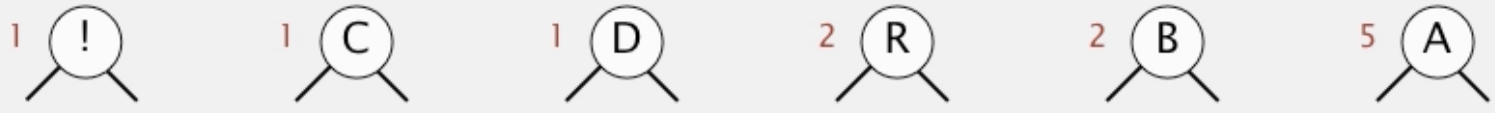
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	
D	1	
R	2	
!	1	



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

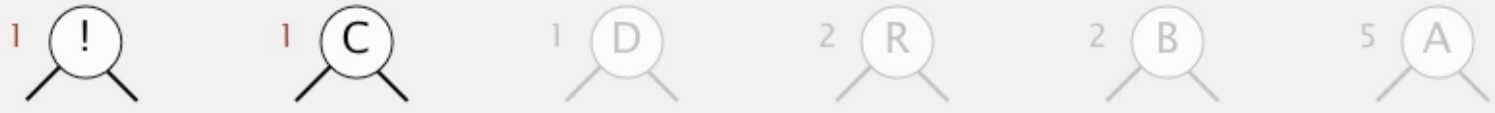
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	
D	1	
R	2	
!	1	



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	
D	1	
R	2	
!	1	



Huffman coding demo

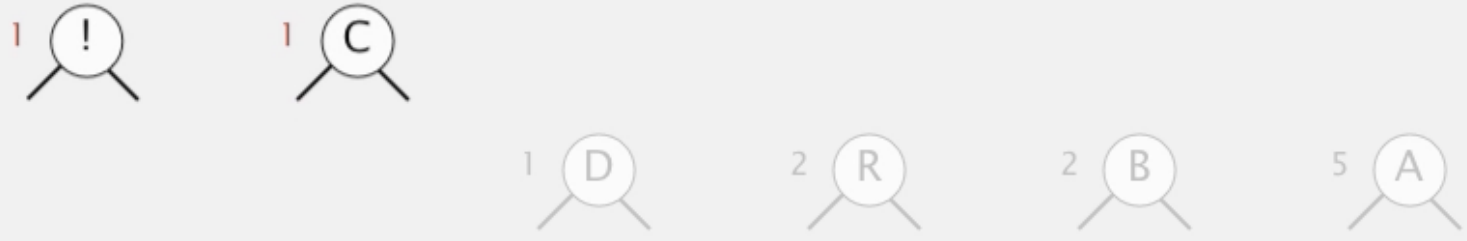
- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	
D	1	
R	2	
!	1	

Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

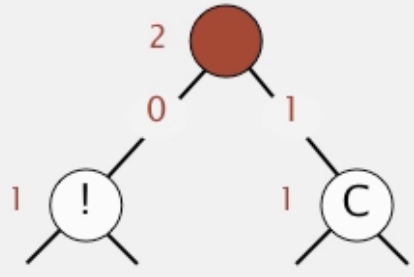
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	
D	1	
R	2	
!	1	

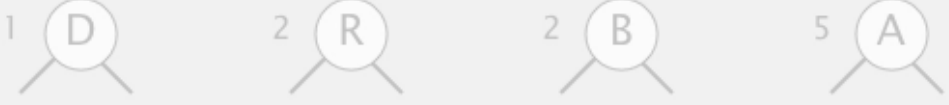


Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	1
D	1	
R	2	
!	1	0

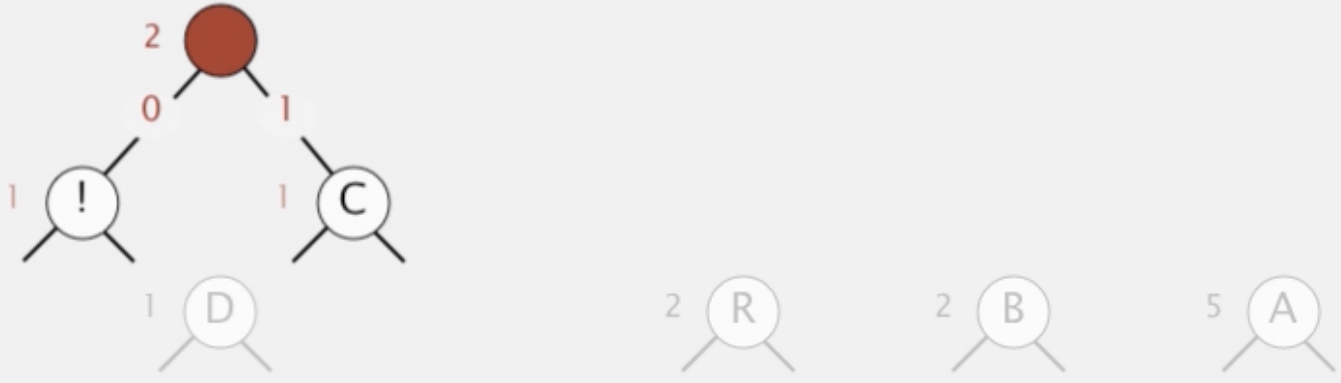




Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

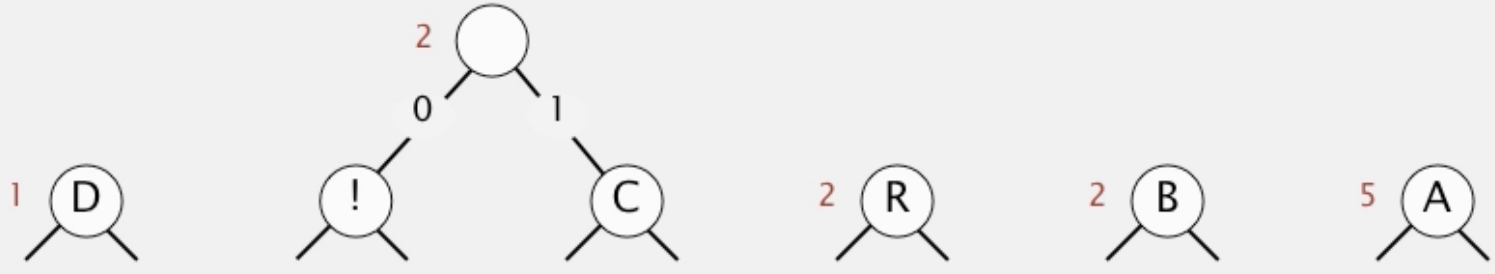
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	1
D	1	
R	2	
!	1	0



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

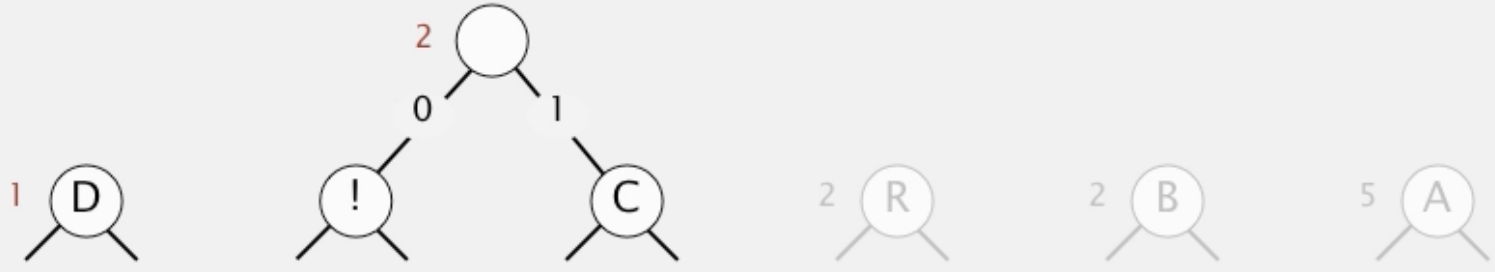
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	1
D	1	
R	2	
!	1	0



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

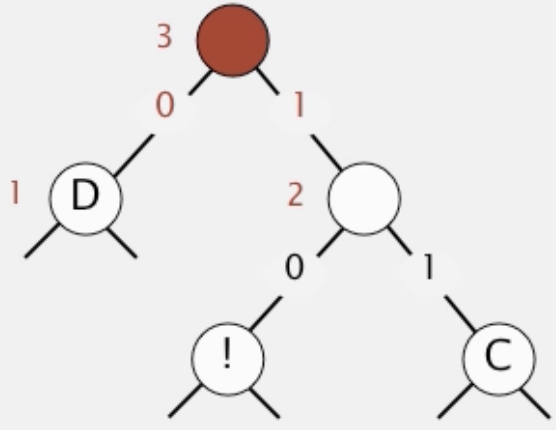
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	1
D	1	
R	2	
!	1	0



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

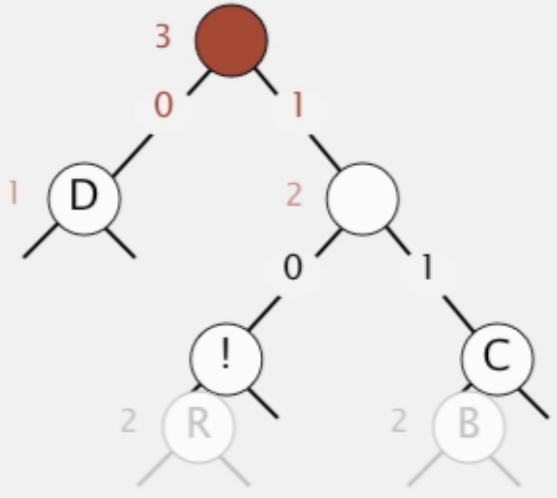
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	1 1
D	1	0
R	2	
!	1	1 0



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

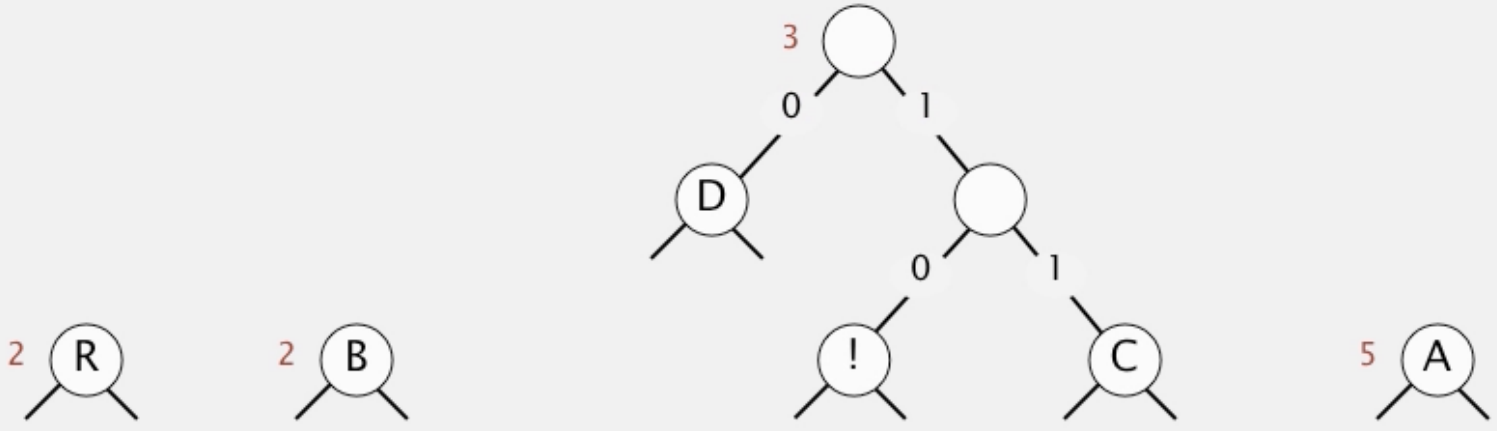
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	1 1
D	1	0
R	2	
!	1	1 0



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

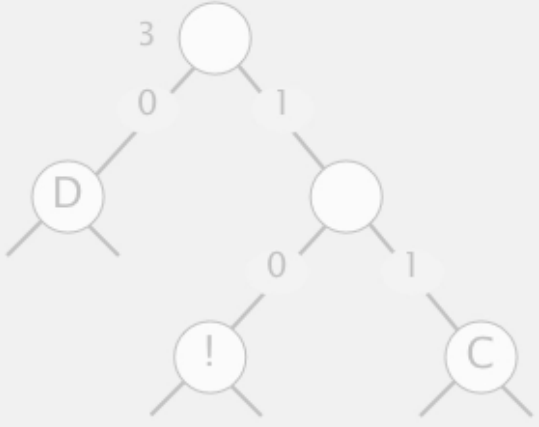
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	1 1
D	1	0
R	2	
!	1	1 0



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

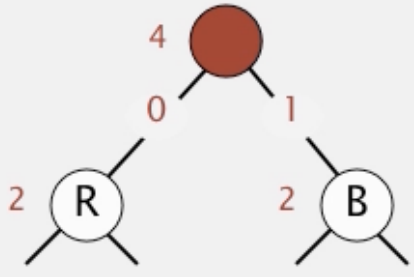
char	freq	encoding
A	5	
B	2	
C	1	1 1
D	1	0
R	2	
!	1	1 0



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

char	freq	encoding
A	5	
B	2	1
C	1	1 1
D	1	0
R	2	0
!	1	1 0



Huffman coding demo

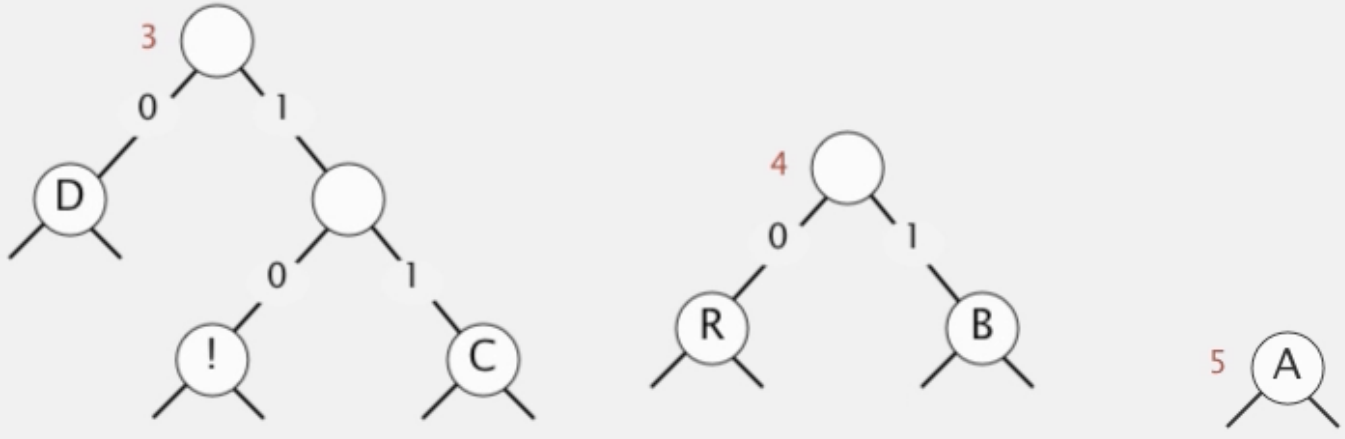
- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

char	freq	encoding
A	5	
B	2	1
C	1	1 1
D	1	0
R	2	0
!	1	1 0

Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

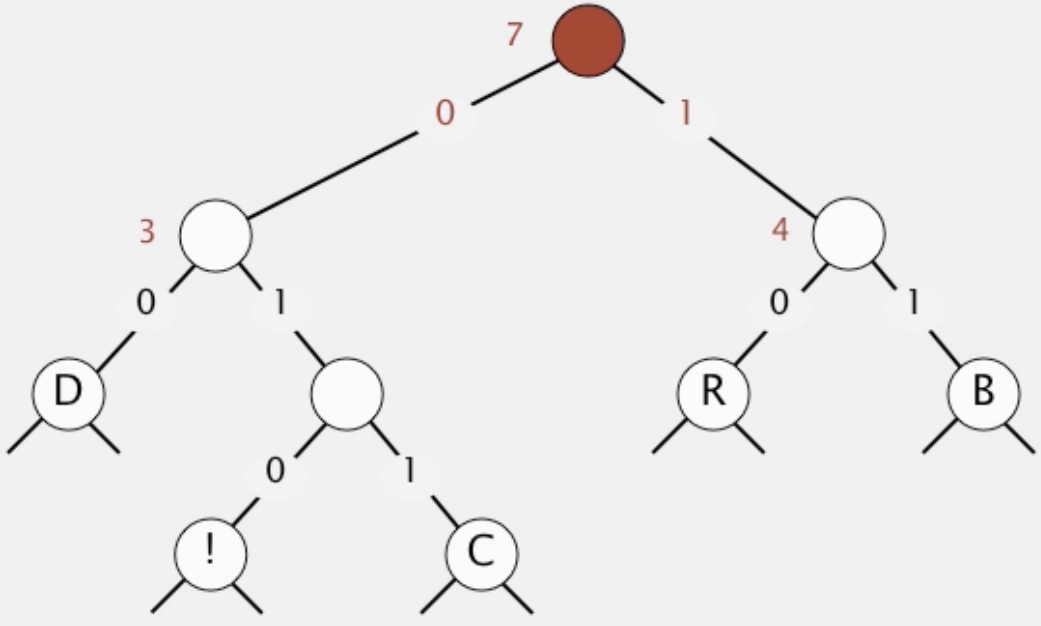
char	freq	encoding
A	5	
B	2	1
C	1	1 1
D	1	0
R	2	0
!	1	1 0



Huffman coding demo

- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

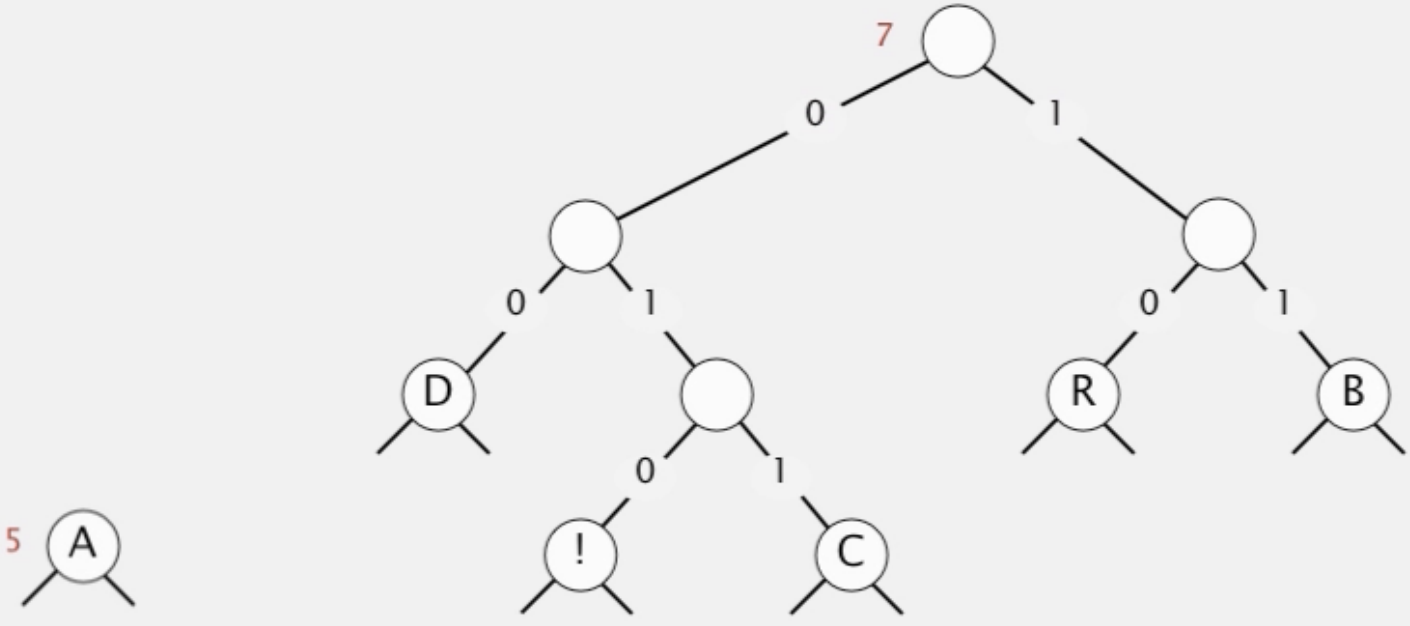
char	freq	encoding
A	5	
B	2	1 1
C	1	0 1 1
D	1	0 0
R	2	1 0
!	1	0 1 0



Huffman coding demo

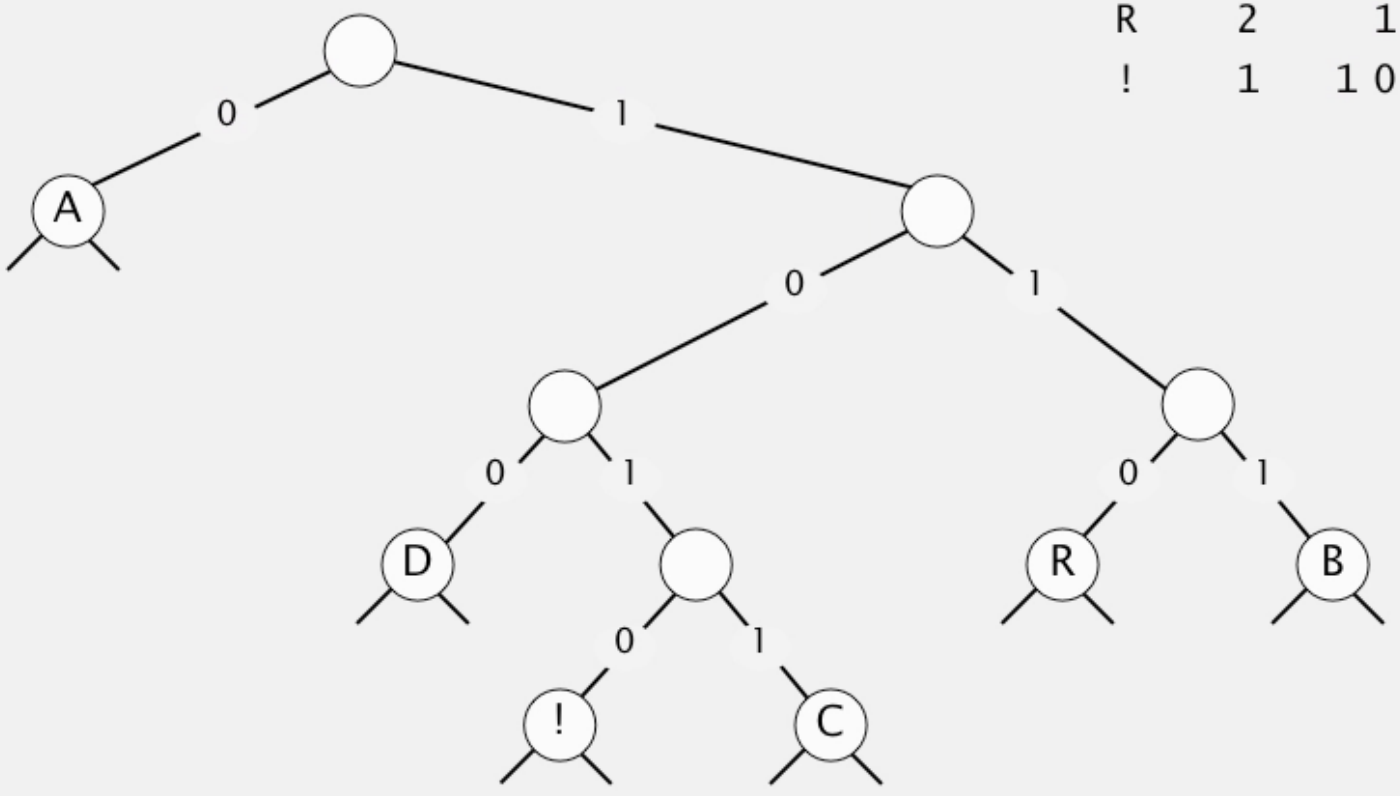
- Select two tries with min weight.
- Merge into single trie with cumulative weight.

char	freq	encoding
A	5	
B	2	1 1
C	1	0 1 1
D	1	0 0
R	2	1 0
!	1	0 1 0



Huffman coding demo

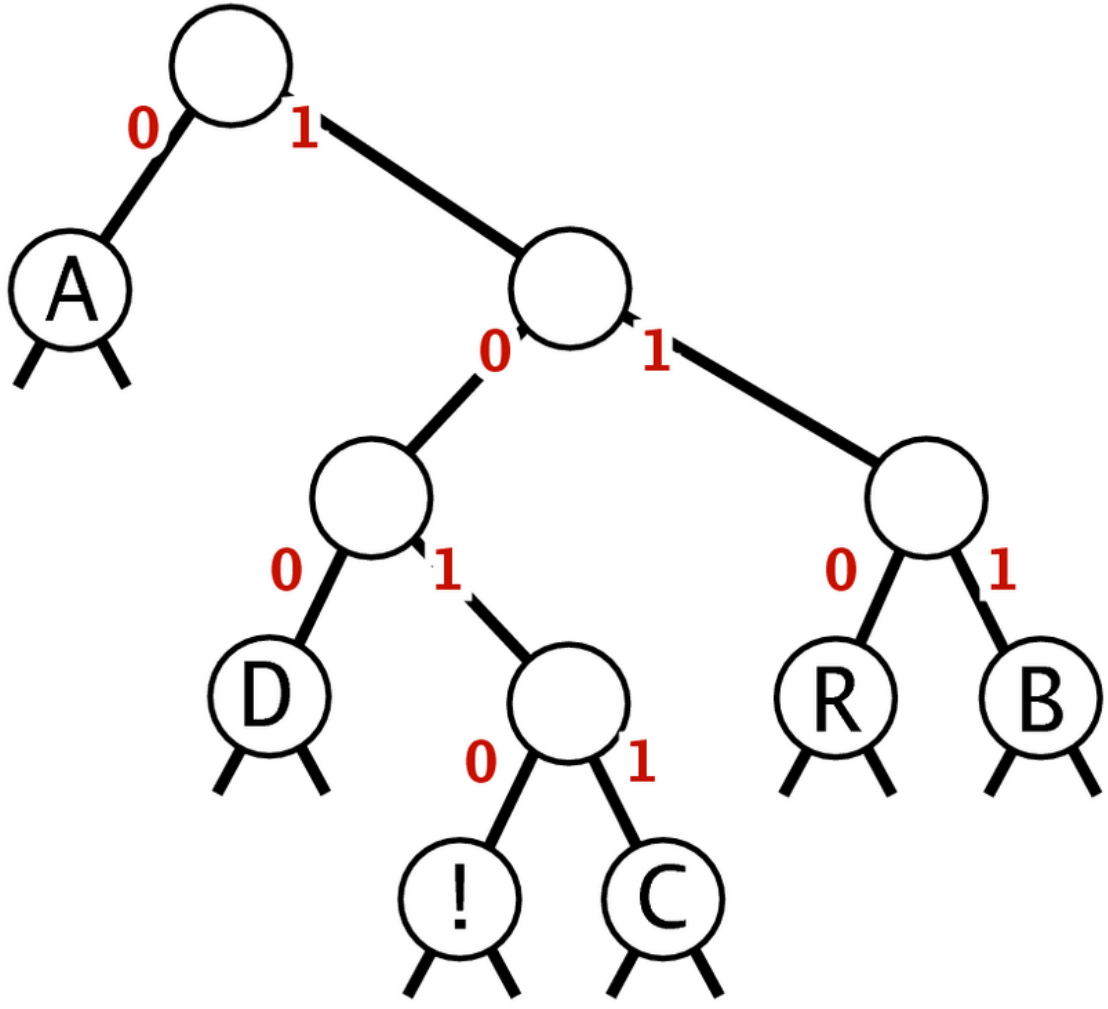
char	freq	encoding
A	5	0
B	2	1 1 1
C	1	1 0 1 1
D	1	1 0 0
R	2	1 1 0
!	1	1 0 1 0



Codeword table

key	*value*
!	1010
A	0
B	111
C	1011
D	100
R	110

Trie representation

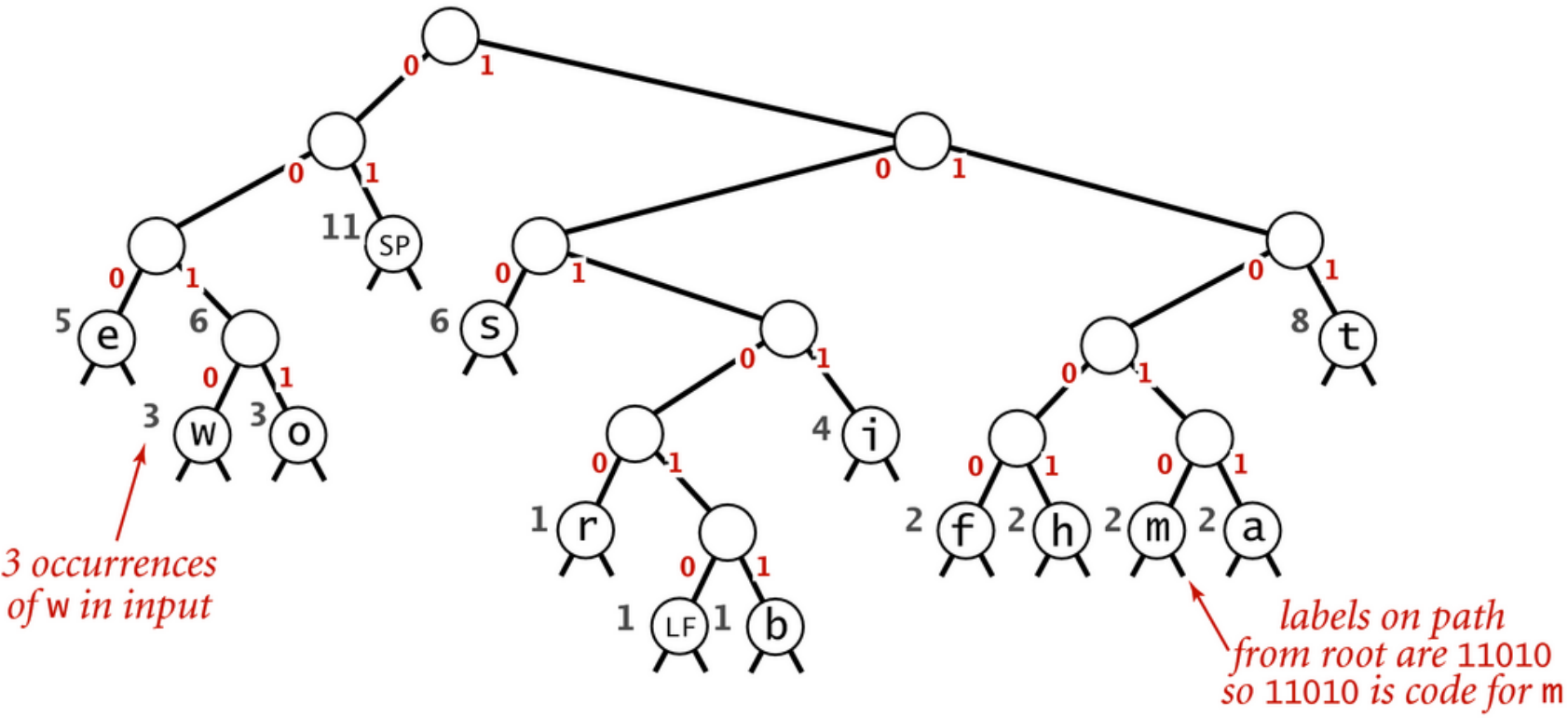


A Huffman code

```
private static Node buildTrie(int[]freq){
   MinPQ<Node> pq= new MinPQ<Node>();
   for (char c = 0; c < R; c++)
       if (freq[c] > 0)
           pq.insert(new Node(c, freq[c],
                             null, null));
   while (pq.size() > 1) {
       Node x = pq.delMin();
       Node y = pq.delMin();
       Node parent = new Node('\0',
              x.freq + y.freq, x, y);
       pq.insert(parent);
   }
   return pq.delMin();
}
```

Mais um código de Huffman

trie representation



codeword table

key	*value*
LF	101010
SP	01
a	11011
b	101011
e	000
f	11000
h	11001
i	1011
m	11010
o	0011
r	10100
s	100
t	111
w	0010

Huffman code for the character stream "it was the best of times it was the worst of times LF"

buildCode()

A tabela de códigos st[] usada na codificação é calculada a partir da trie:

```
private static String[]
buildCode(Node root) {
   String[] st = new String[R];
   buildCode(st, root, '');
   return st;
}
```

buildCode()

A tabela de códigos `st[]` usada na codificação é calculada a partir da `trie`:

```
private static void
buildCode(String[] st, Node x, String s) {
   if (x.isLeaf()) {
      st[x.ch] = s;
      return;
   }
   buildCode(st, x.left, s + '0');
   buildCode(st, x.right, s + '1');
}
```

A `trie` de Huffman é ótima

Proposição. A cadeia de bits produzida pelo algoritmo de Huffman é mínima no seguinte sentido:

> *nenhuma outra cadeia produzida por um código livre de prefixos é mais curta que a cadeia produzida pelo algoritmo de Huffman.*

Em MAC0338 Análise de Algoritmos lembrar disto quando estiverem vendo Algoritmos Gulosos.

A trie de Huffman é ótima?

```
% more abra.txt | java BinaryDump 0
96 bits

% java Huffman - < abra.txt |
          java BinaryDump 0
120 bits
```

A trie de Huffman é ótima?

```
% more abra.txt
ABRACADABRA!

% java Huffman - < abra.txt |
          java BinaryDump 30
010100000100101000100010010000
110100001101010100101010000100
000000000000000000000000000110
001111110010110100011111100101 00
120 bits
```

A trie de Huffman é ótima?

```
% java Huffman - < abra.txt |
          java BinaryDump 30
010100000100101000100010010000
110100001101010100101010000010

000000000000000000000000001100

011111001011010001111110010100
120 bits
```

A `trie` de Huffman é ótima?

```
01010000010010100010001001010000
11010000110101010010101000010
```

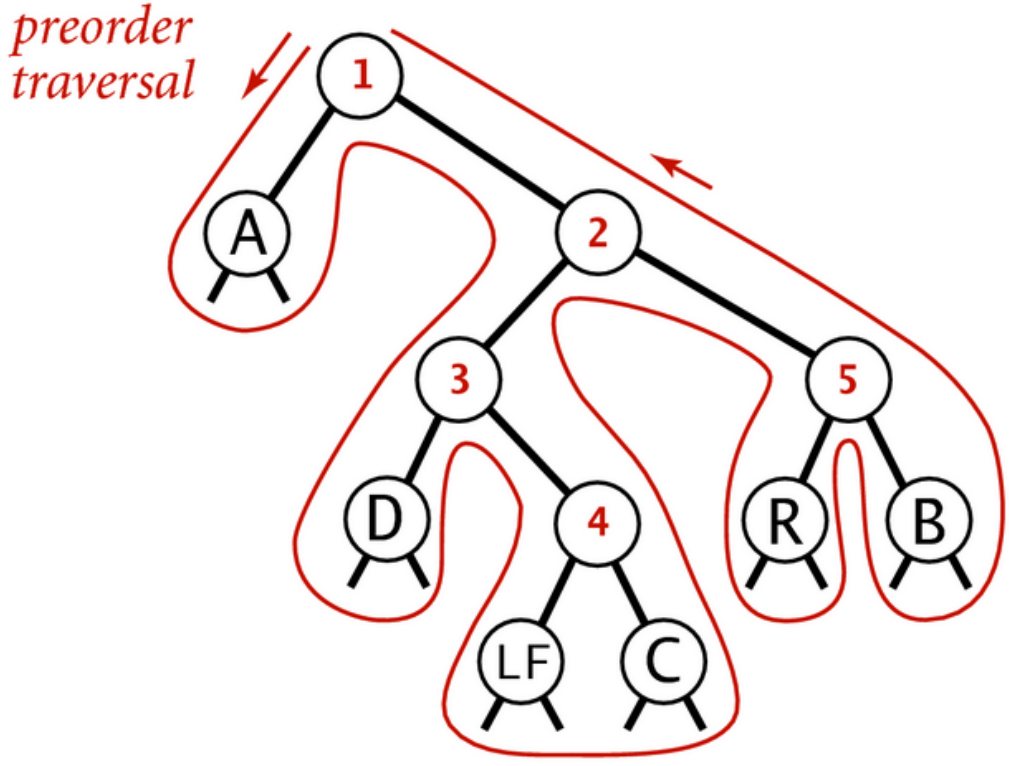
	código	caractere
0 1	01000001	A
0 0 1	01000100	D
0 1	00100001	!
1	01000011	C
0 1	01010010	R
1	01000010	B

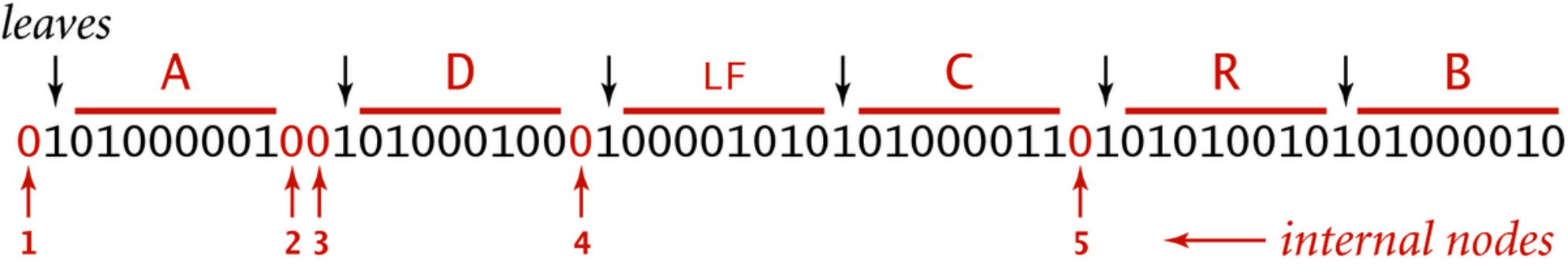
Codificação da `trie`

A cadeia de bits produzida pelo algoritmo de Huffman não pode ser decodificada sem a correspondente `trie`.

É preciso acrescentar a `trie` à cadeia codificada.

Codificação da `trie`





Using preorder traversal to encode a trie as a bitstream

Codificação da trie

```
private static void writeTrie(Node x) {
   if (x.isLeaf()) {
      BinaryStdOut.write(true);
      BinaryStdOut.write(x.ch);
      return;
   }
   BinaryStdOut.write(false);
   writeTrie(x.left);
   writeTrie(x.right);
}
```

Codificação da trie

```
private static Node readTrie() {
   if (BinaryStdIn.readBoolean()) {
      char c = BinaryStdIn.readChar();
      return new Node(c, 0, null, null);
   }
   return new Node('\0', 0,
      readTrie(), readTrie());
}
```

Compressão completa

Com `buidTrie()`, `buildCode()` e `writeTrie()`, podemos completar o método de compressão

```
public static void compress() {
   String s = BinaryStdIn.readString();
   char[] input = s.toCharArray();
   // aqui vai a construção de st[]...
   int[] freq = new int[R];
   for (int i = 0; i < input.length; i++)
       freq[input[i]]++;
   Node root = buildTrie(freq);
   String[] st = buildCode(root);
```

Compressão completa

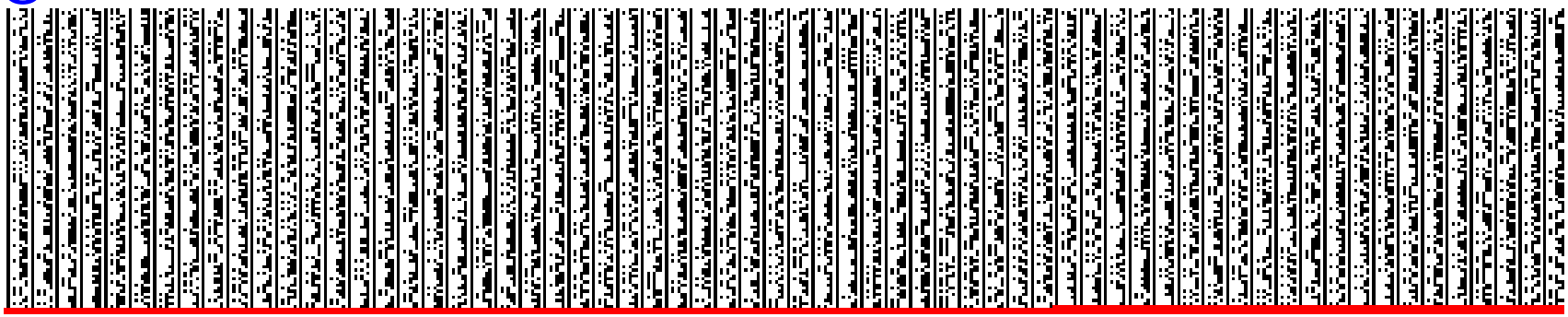
```
    writeTrie(root);
    BinaryStdOut.write(input.length);
    for (int i=0; i<input.length; i++){
        String code = st[input[i]];
        for(int j=0;j<code.length(); j++)
            if (code.charAt(j) == '1')
                BinaryStdOut.write(true);
            else}
                BinaryStdOut.write(false);
    }
    BinaryStdOut.close();
}
```

Esqueleto da classe Huffman

```
public class Huffman {
   private static int R = 256; // alfabeto
   private static class Node implements...
   public static void compress() {...}
   public static void expand() {...}
   private static Node buildTrie(int[] freq)
   private static String[] buildCode(Node...
   private static void writeTrie(Node x)
   private static Node readTrie() {...}
}
```

Genome versus Huffman

```
% java PictureDump 512 100 <
genomeVirus.txt
```



50008 bits

Genome versus Huffman

```
% java Genome - < genomeVirus.txt | java
PictureDump 512 25
```

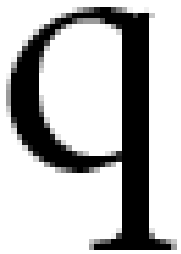
12536 bits

```
% java Huffman - < genomeVirus.txt | java
PictureDump 512 25
```

12576 bits

RunLength versus Huffman

```
% java PictureDump 32 48 < q32x48.bin
1536 bits
```



```
% java RunLength - < q32x48.bin | java
BinaryDump 0
1144 bits

% java Huffman - < q32x48.bin | java
BinaryDump 0
816 bits
```