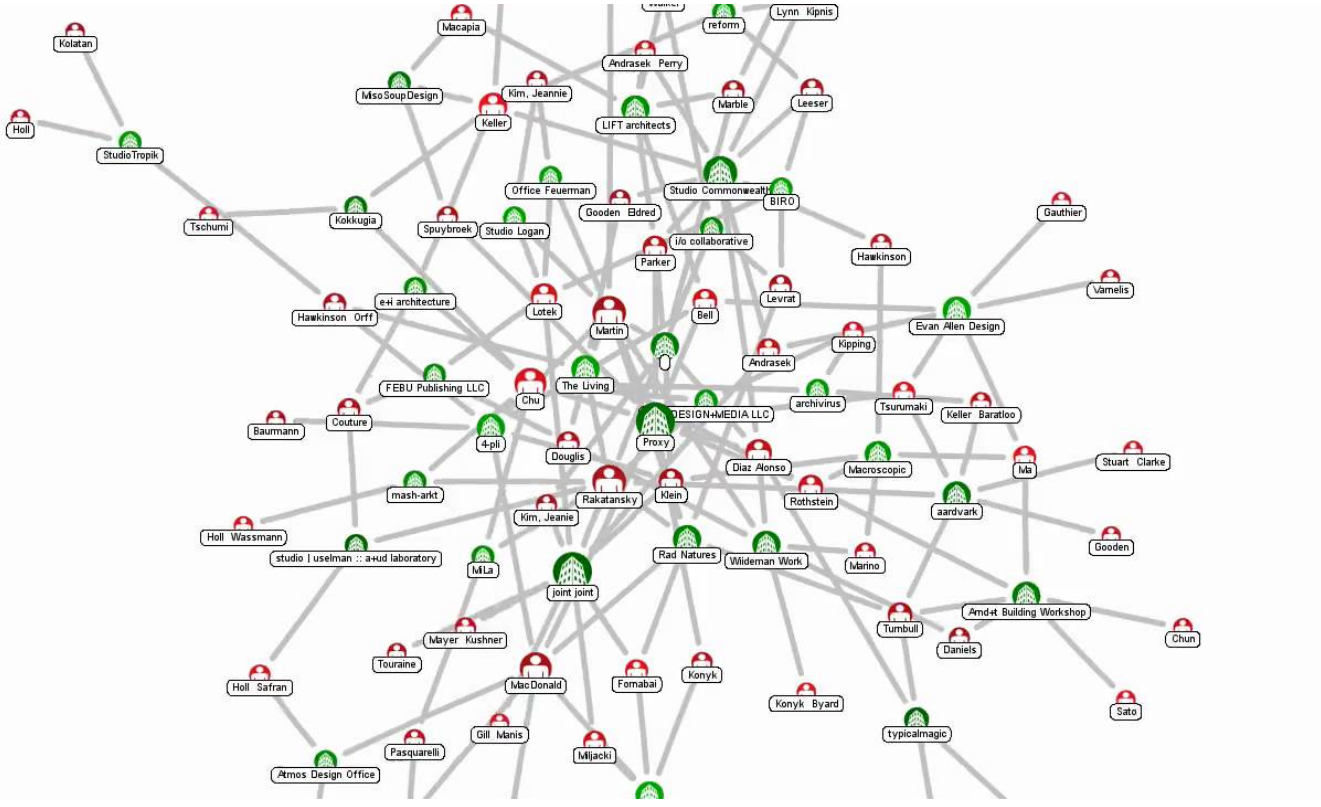
AULA 20

Digrafos



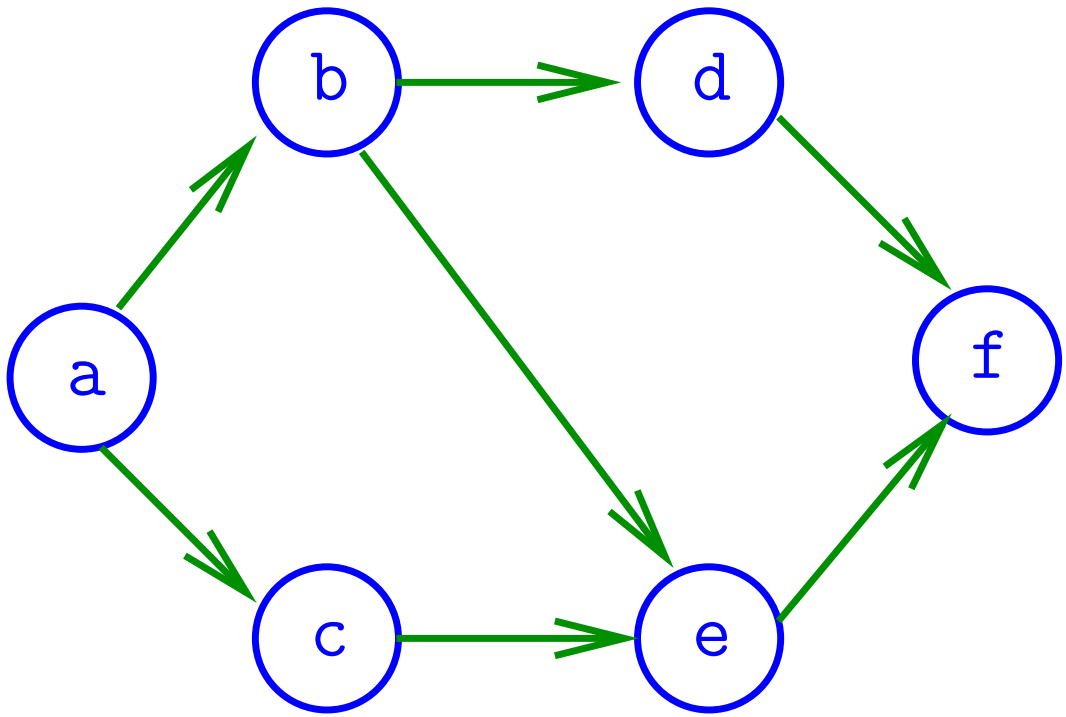
Fonte: `Force Directed Graph`

Referências: Directed graphs (SW): slides, vídeo.

Digrafos

Um **digrafo** (*directed graph*) consiste de um conjunto de vértices (bolas) e um conjunto de arcos (flechas)

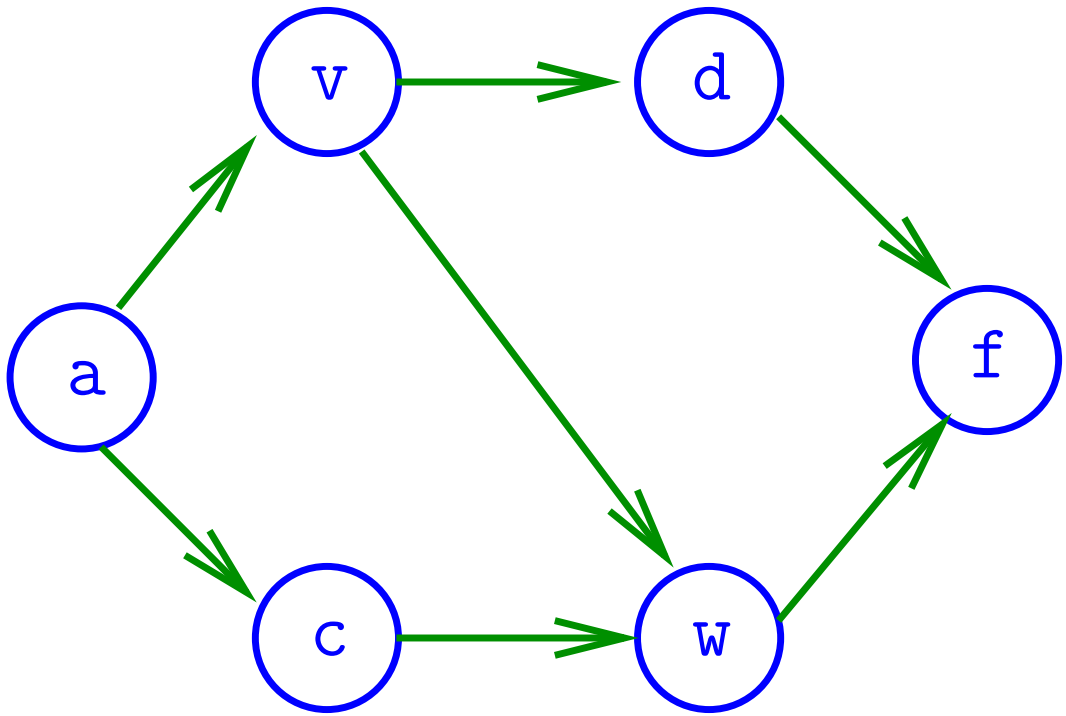
Exemplo: representação de um digrafo



Arcos

Um **arco** é um par ordenado de vértices

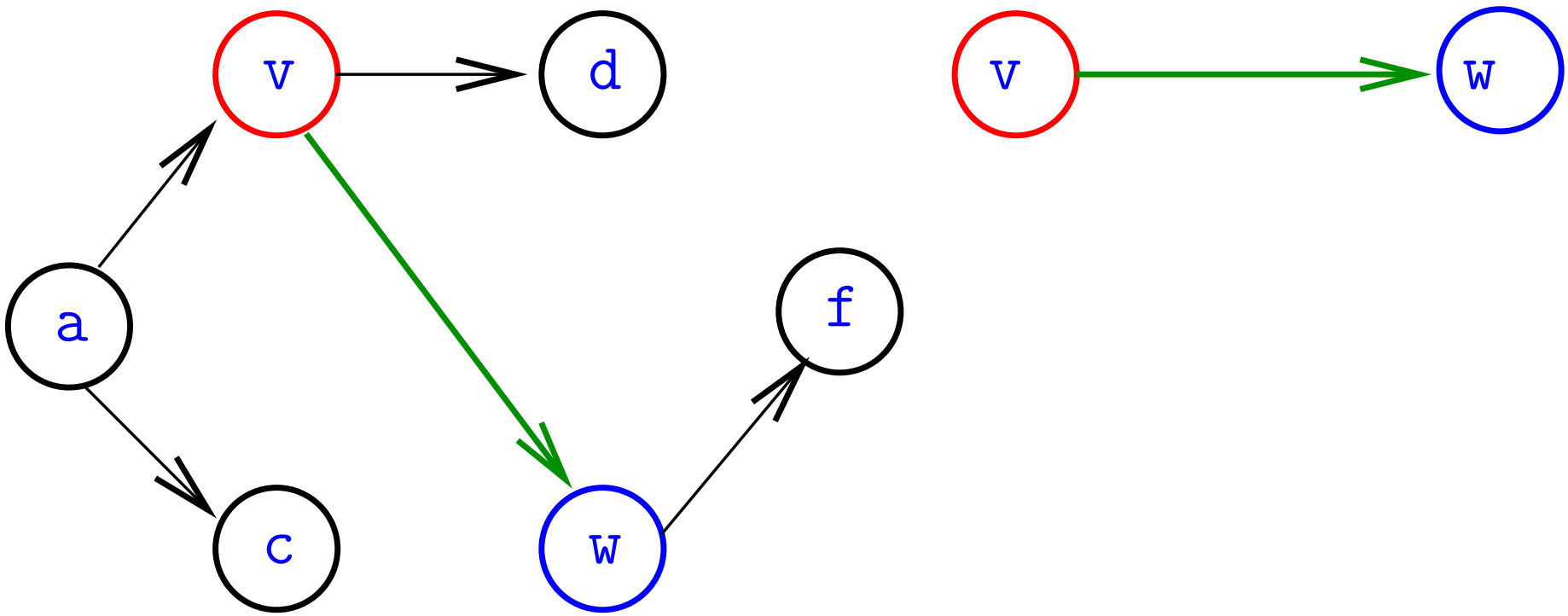
Exemplo: `v` e `w` são vértices e `v-w` é um arco



Ponta inicial e final

Para cada arco v-w, o vértice v é a **ponta inicial** e w é a **ponta final**

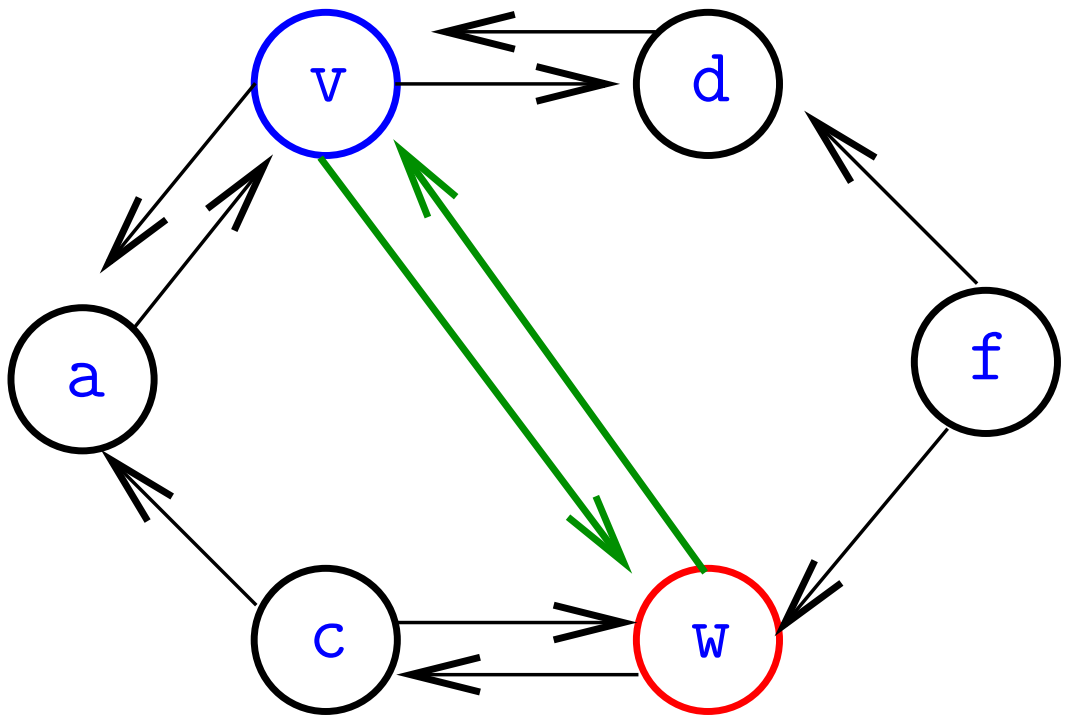
Exemplo: v é ponta inicial e w é ponta final de v-w



Arcos anti-paralelos

Dois arcos são **anti-paralelos** se a ponta inicial de um é ponta final do outro

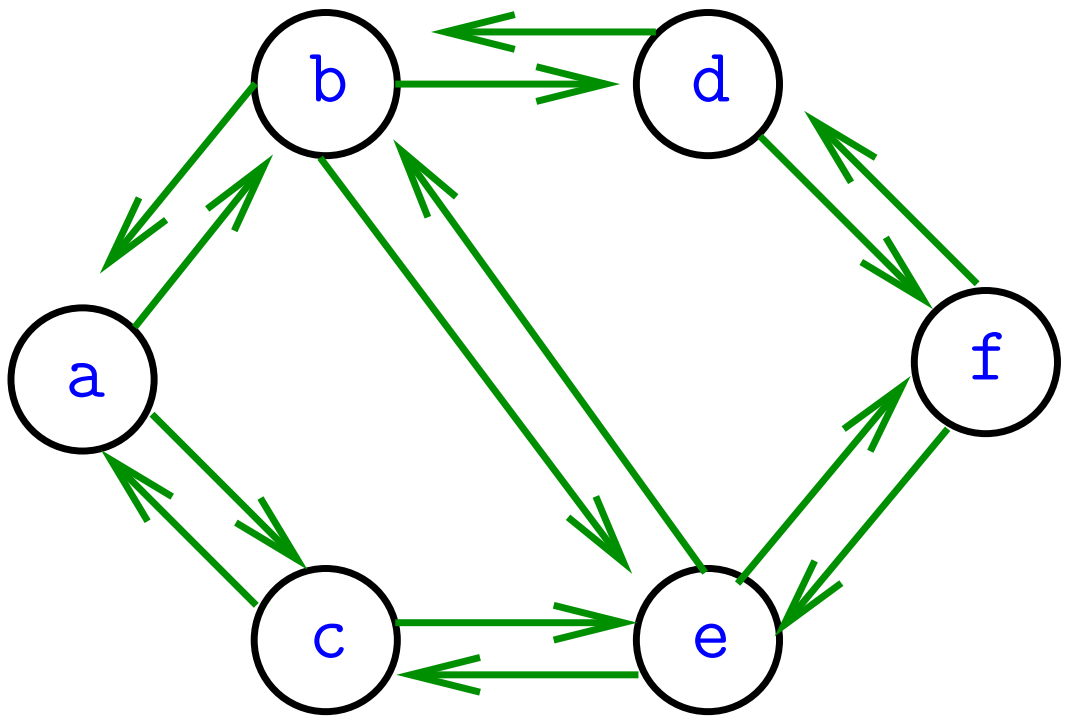
Exemplo: `v`-`w` e `w`-`v` são anti-paralelos



Digrafos simétricos

Um digrafo é **simétrico** se cada um de seus arcos é anti-paralelo a outro

Exemplo: digrafo simétrico

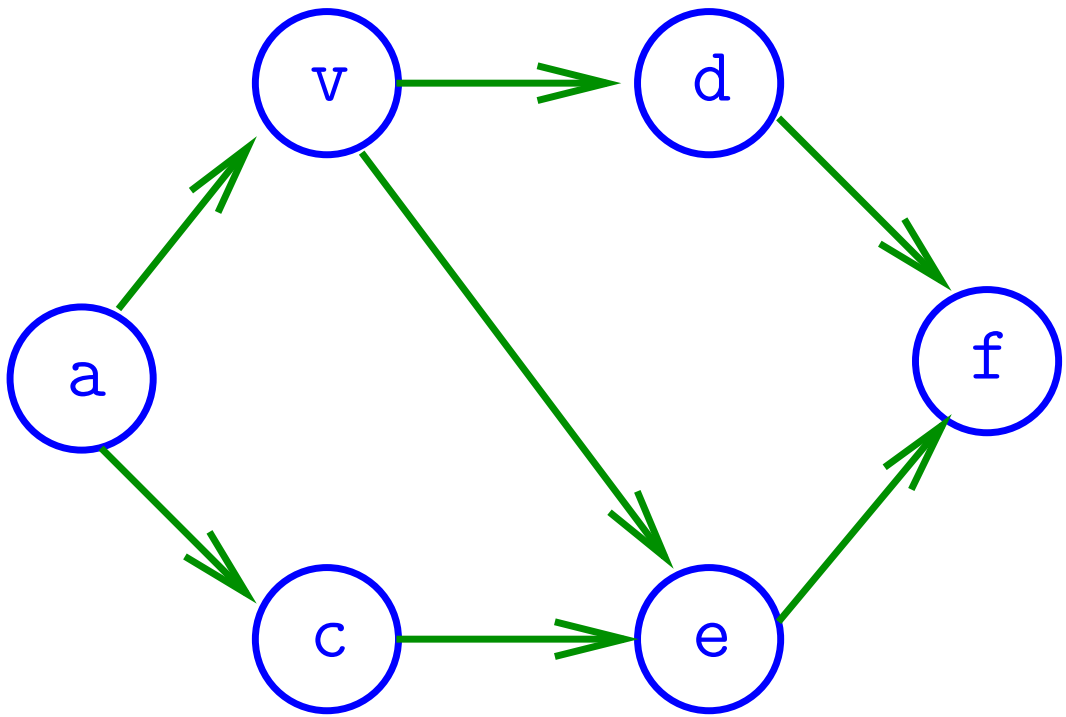


Graus de entrada e saída

grau de entrada de v= no. arcos com ponta final v

grau de saída de v = no. arcos com ponta inicial v

Exemplo: v tem grau de entrada 1 e de saída 2



Número de arcos

Quantos arcos, no máximo, tem um digrafo com `V` vértices?

Número de arcos

Quantos arcos, no máximo, tem um digrafo com $\mathtt{V}$ vértices?

A resposta é $\mathtt{V} \times (\mathtt{V} - 1) = \Theta(\mathtt{V}^2)$

digrafo **completo** = todo par ordenado de vértices distintos é arco

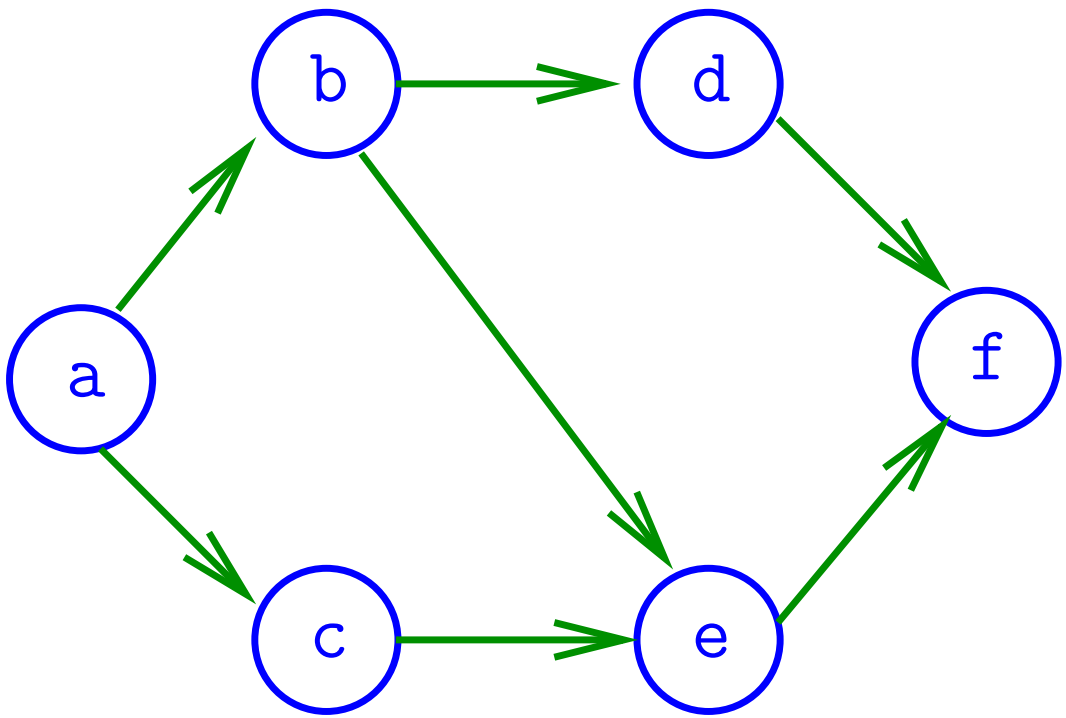
digrafo **denso** = tem "muitos" muitos arcos

digrafo **esparso** = tem "poucos" arcos

Especificação

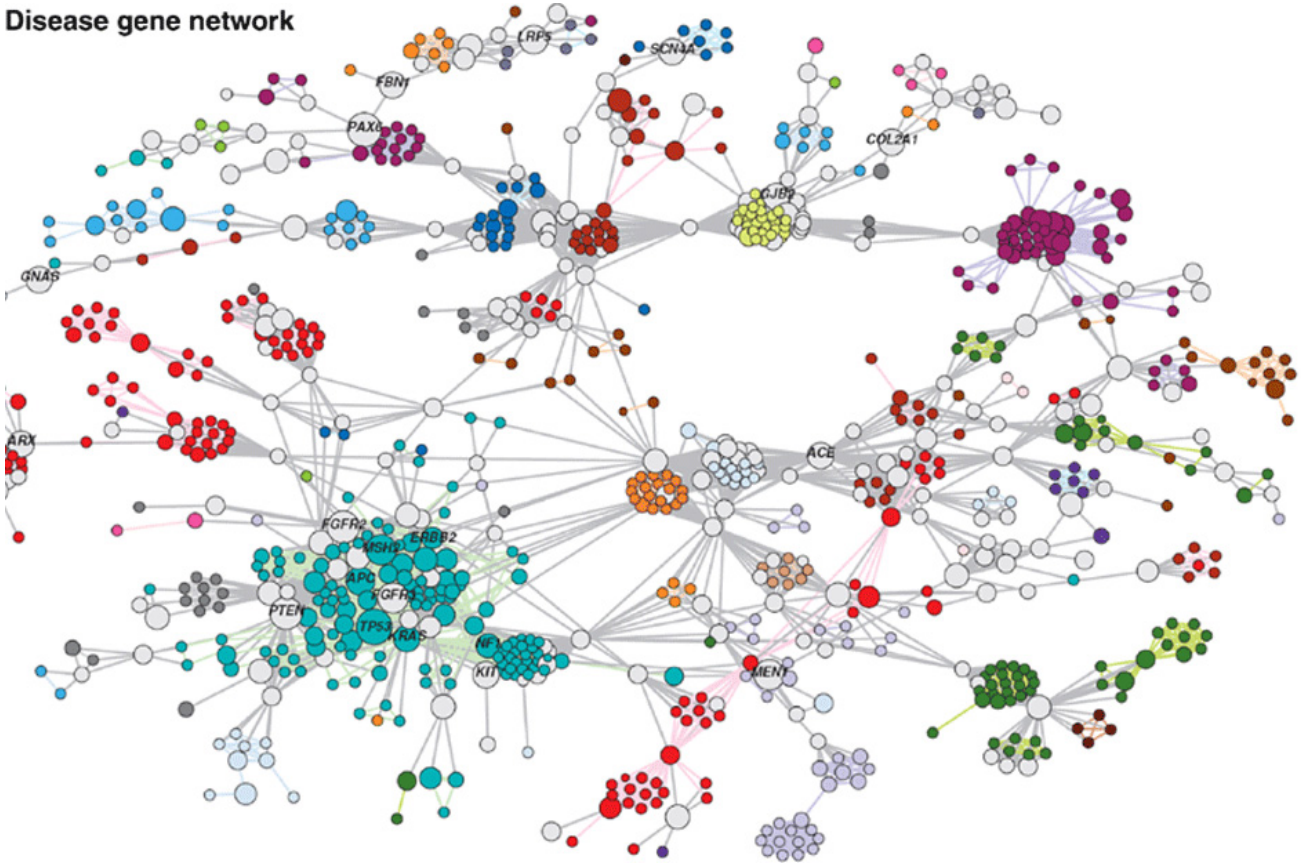
Digrafos podem ser especificados através de sua lista de arcos

Exemplo:




```
d-f
b-d
a-c
b-e
e-f
a-b
```

Grafos



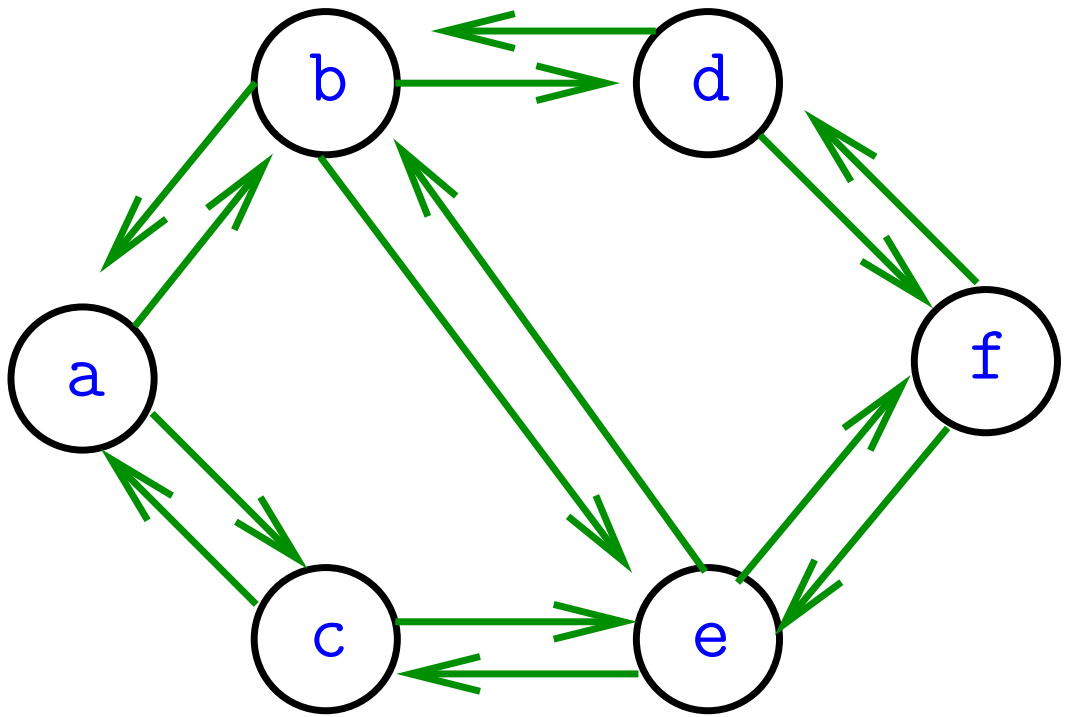
Fonte: Scaling Computation of Graph Structured Data with NScale

Referências: Undirected graphs (SW): slides, vídeo.

Grafos

Um **grafo** é um digrafo **simétrico**

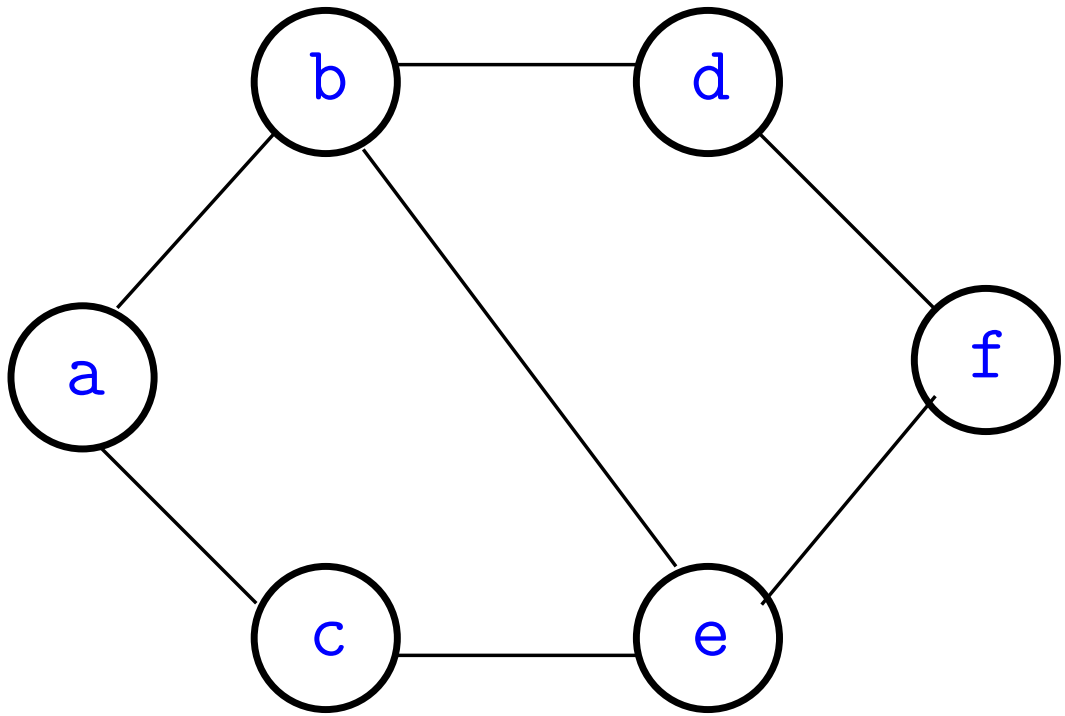
Exemplo: um grafo



Grafos

Um **grafo** é um digrafo **simétrico**

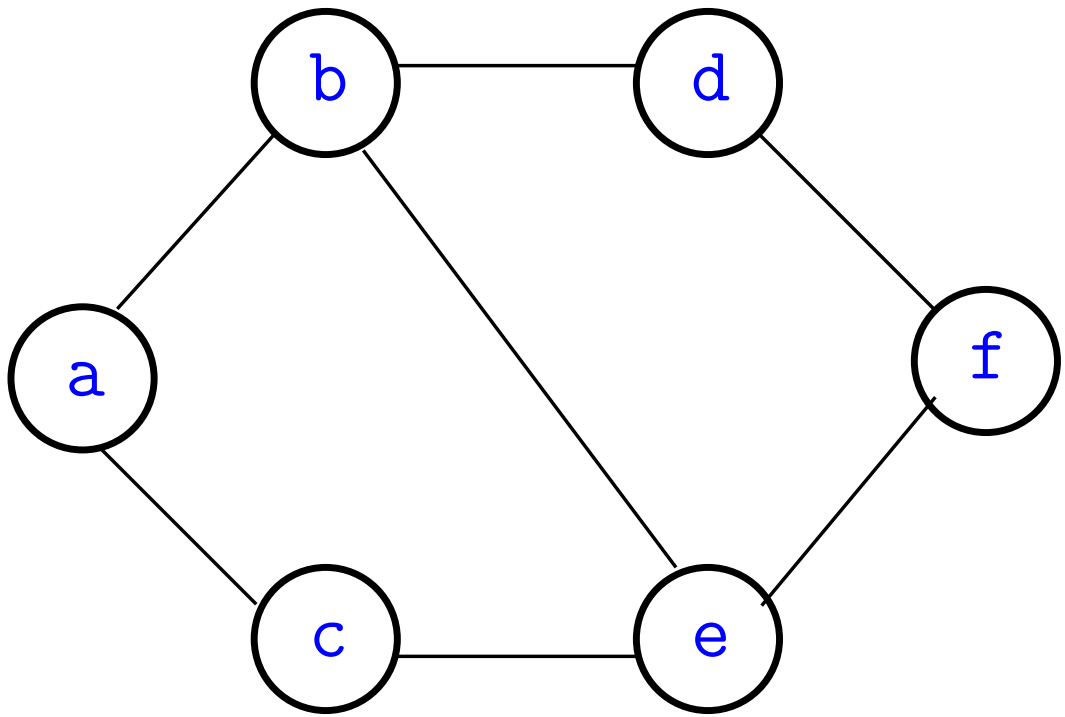
Exemplo: representação usual



Arestas

Uma **aresta** é um par de arcos anti-paralelos.

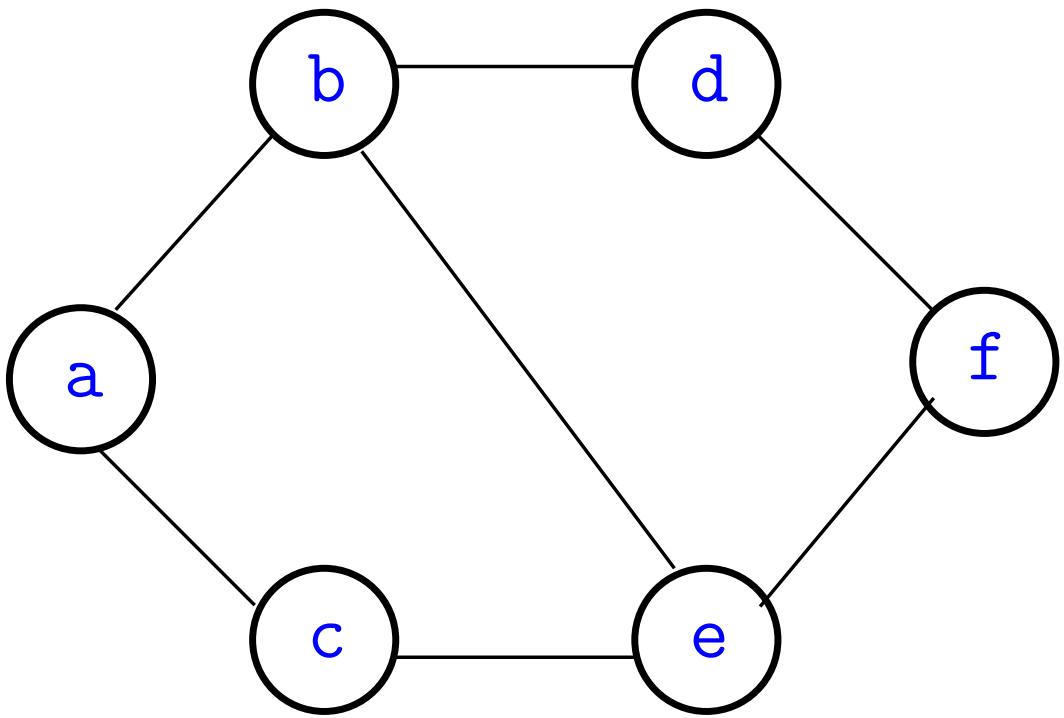
Exemplo: `b-a` e `a-b` são a **mesma** aresta



Especificação

Grafos podem ser especificados através de sua lista de arestas

Exemplo:



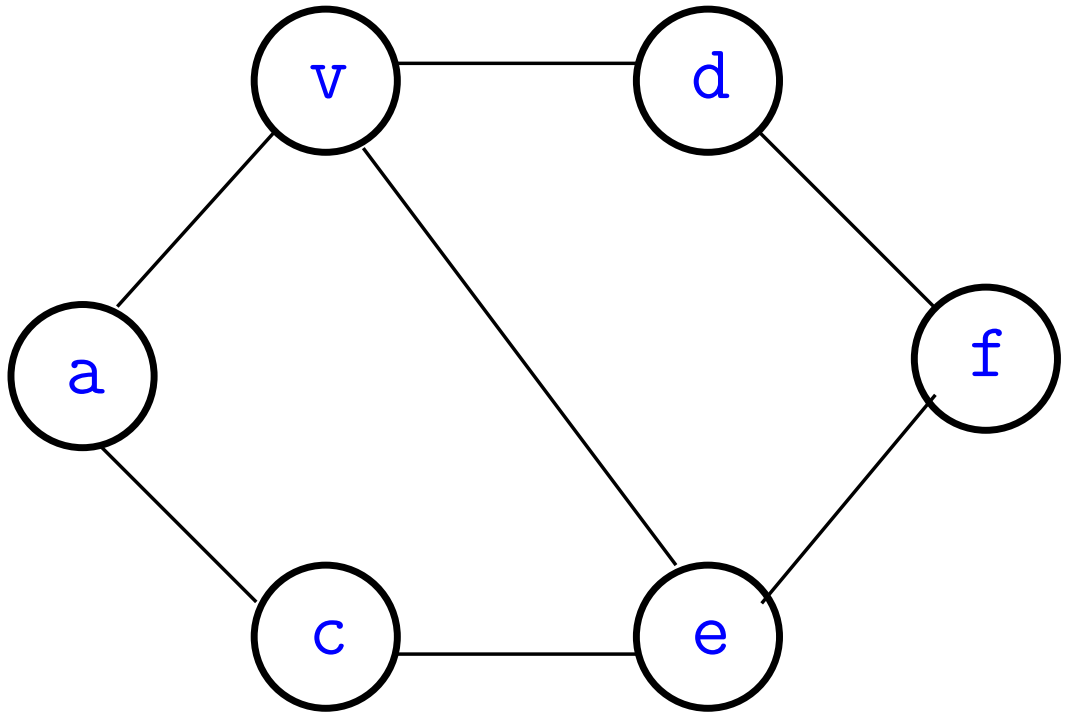

```
f-d
b-d
c-a
e-b
e-f
a-b
```

Graus de vértices

Em um grafo

grau de v = número de arestas com ponta em v

Exemplo: v tem grau 3



Número de arestas

Quantas arestas, no máximo, tem um grafo com `V` vértices?

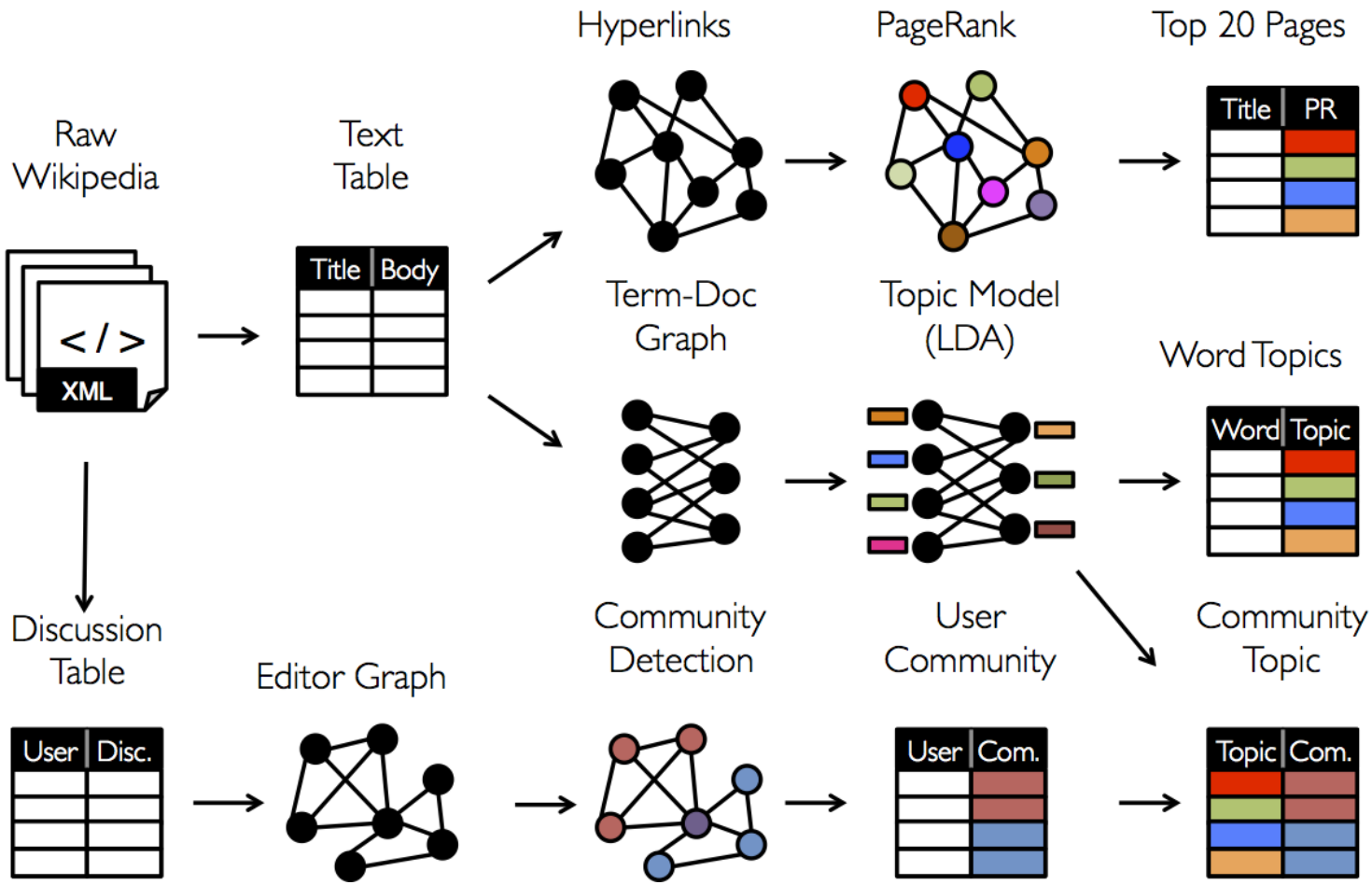
Número de arestas

Quantas arestas, no máximo, tem um grafo com $\mathtt{V}$ vértices?

A resposta é $\mathtt{V} \times (\mathtt{V} - 1)/2 = \Theta(\mathtt{V}^2)$

grafo **completo** = todo par **não**-ordenado de vértices distintos é aresta

Digrafos no computador



Fonte: GraphX Programming Guide

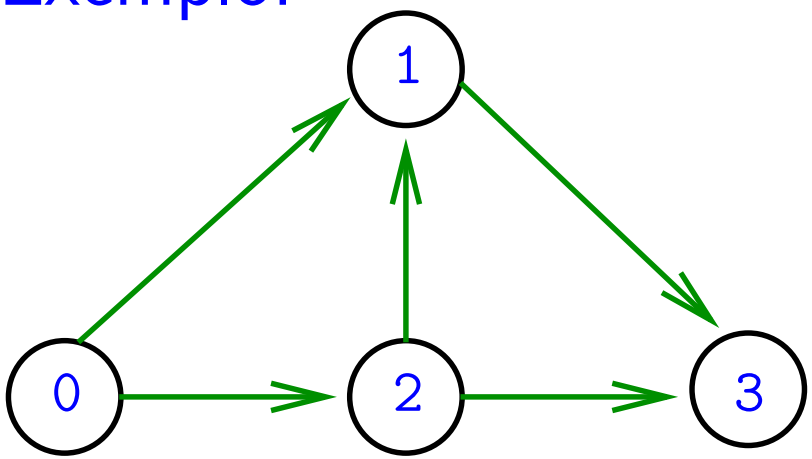
Matriz de adjacência de digrafos

Matriz de adjacência de um digrafo tem linhas e colunas indexadas por vértices:

`adj[v][w]` = 1 se `v`-`w` é um arco

`adj[v][w]` = 0 em caso contrário

Exemplo:



	0	1	2	3
0	0	1	1	0
1	0	0	0	1
2	0	1	0	1
3	0	0	0	0

Consumo de espaço: $\Theta(V^2)$ fácil de implementar

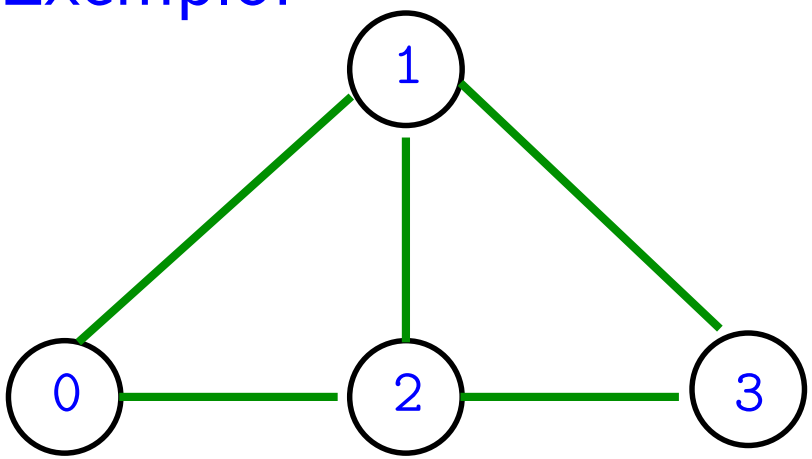
Matriz de adjacência de grafos

Matriz de adjacência de um grafo tem linhas e colunas indexadas por vértices:

`adj[v][w]` = 1 se `v`-`w` é um aresta

`adj[v][w]` = 0 em caso contrário

Exemplo:

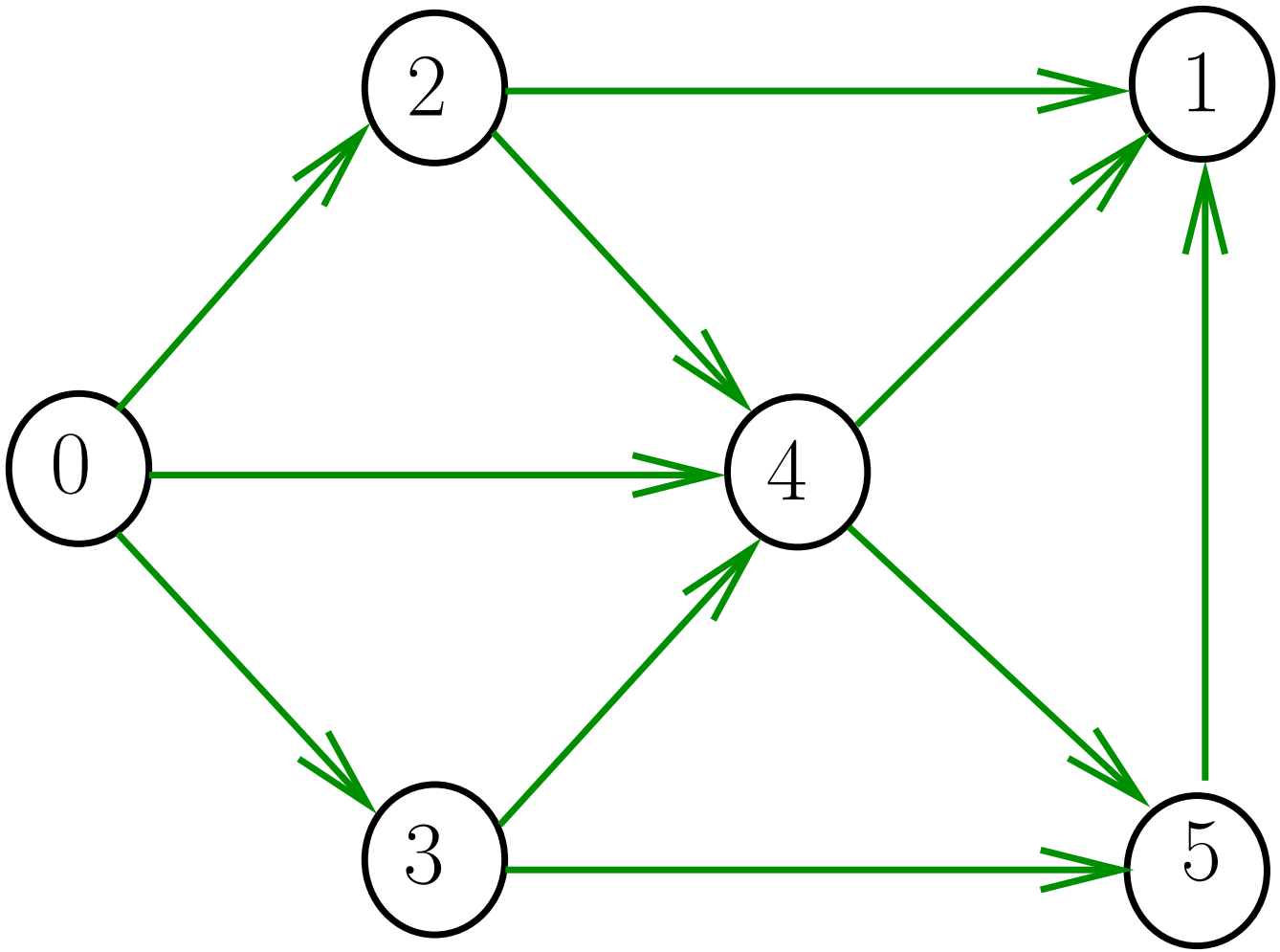


	0	1	2	3
0	0	1	1	0
1	1	0	1	1
2	1	1	0	1
3	0	1	1	0

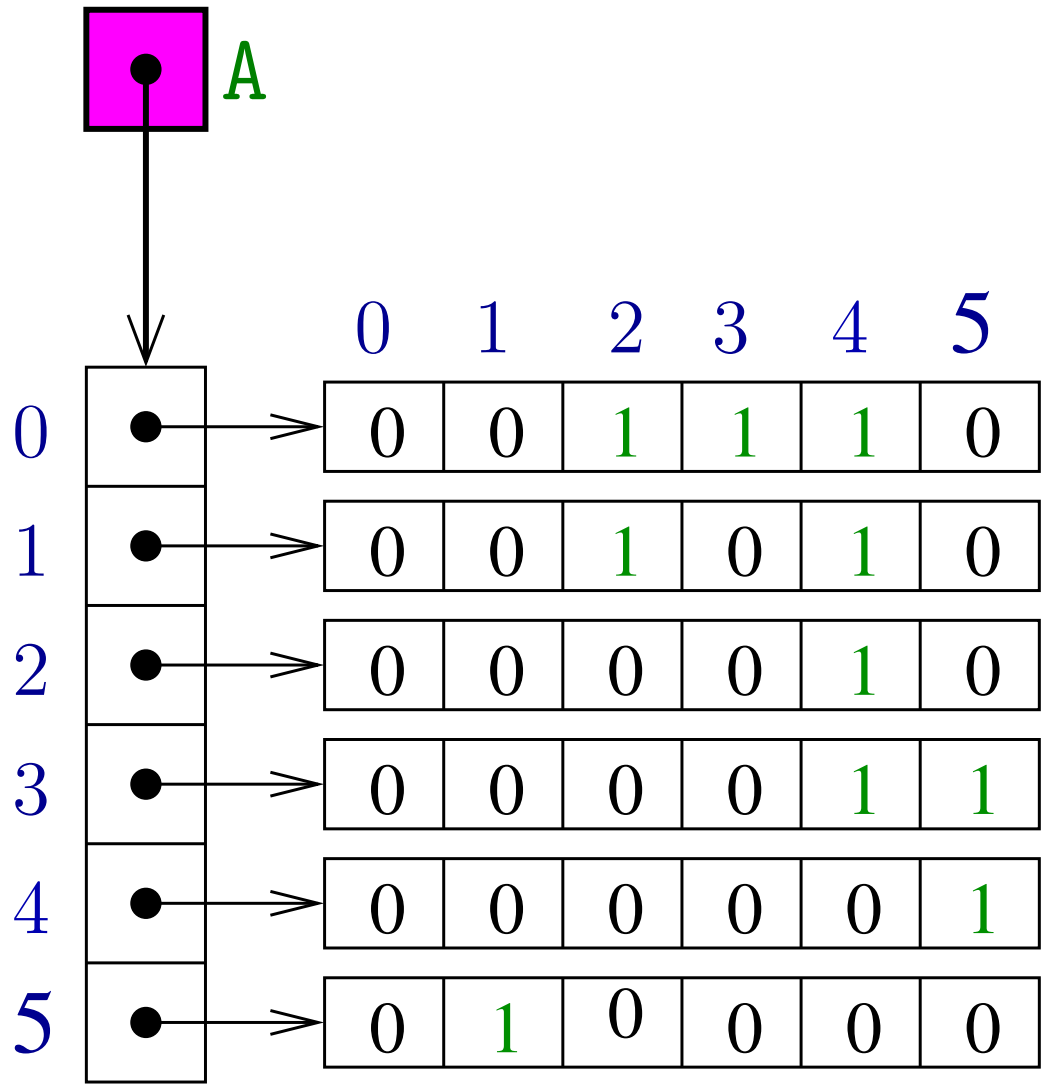
Consumo de espaço: $\Theta(V^2)$ fácil de implementar

Digrafo

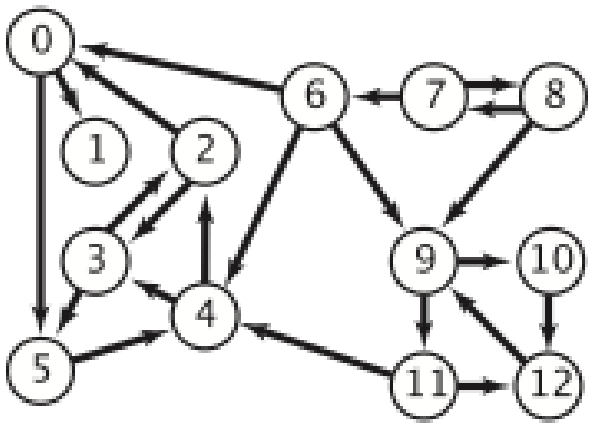
Digraph G



Estruturas de dados



Digrafos no `algs4`



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	T	T	T	T	T	T							
1		T											
2	T	T	T	T	T	T							
3	T	T	T	T	T	T							
4	T	T	T	T	T	T							
5	T	T	T	T	T	T							
6	T	T	T	T	T	T	T			T	T	T	T
7	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
8	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
9	T	T	T	T	T	T				T	T	T	T
10	T	T	T	T	T	T				T	T	T	T
11	T	T	T	T	T	T				T	T	T	T
12	T	T	T	T	T	T				T	T	T	T

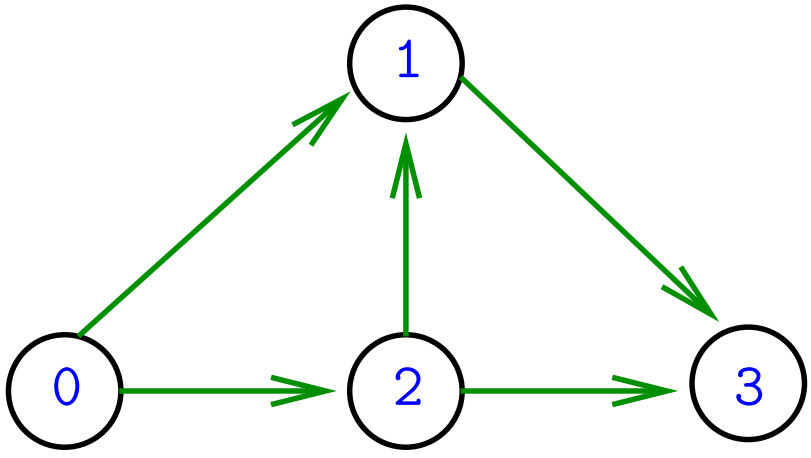
original edge (red)

self-loop (gray)

12 is reachable from 6

Matriz de incidência de digrafos

Uma **matriz de incidências** de um digrafo tem linhas indexadas por vértices e colunas por arcos e cada entrada `[k][vw]` é -1 se `k` $=$ `v`, $+1$ se `k` $=$ `w`, e 0 em caso contrário.



	0-1	0-2	2-1	2-3	1-3
0	-1	-1	0	0	0
1	+1	0	+1	0	-1
2	0	+1	-1	-1	0
3	0	0	0	+1	+1

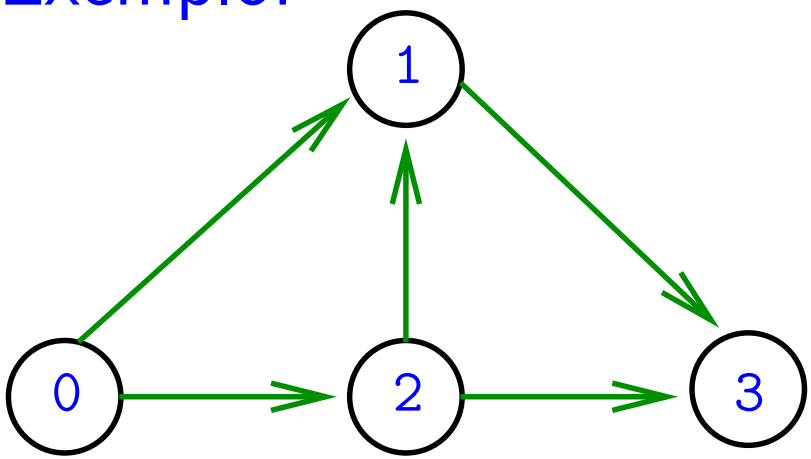
Consumo de espaço: $\Theta(\mathtt{nm})$

Interessante do ponto de vista de otimização linear.

Vetor de listas de adjacência de digrafos

Na representação de um digrafo através de **listas de adjacência** tem-se, para cada vértice `v`, uma lista dos vértices que são vizinhos `v`.

Exemplo:




```
0:  1,  2
1:   3
2:  1,  3
3:
```

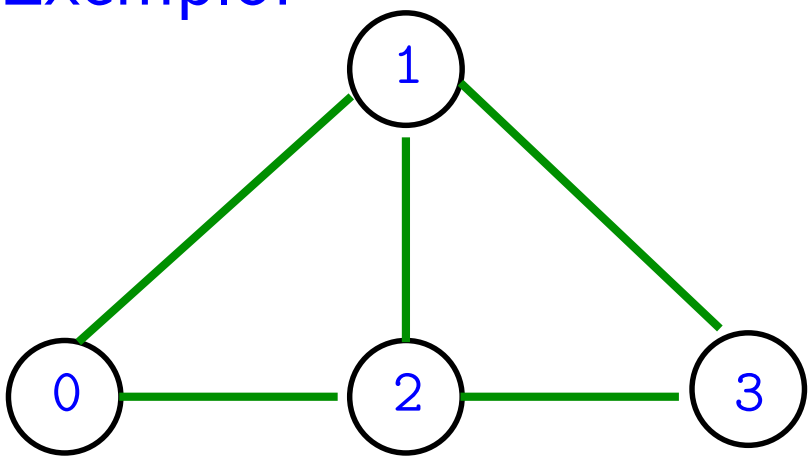
Consumo de espaço: $\Theta(\mathtt{V} + \mathtt{A})$ (linear)

Manipulação eficiente

Vetor de lista de adjacência de grafos

Na representação de um grafo através de **listas de adjacência** tem-se, para cada vértice v, uma lista dos vértices que são pontas de arestas incidentes a v

Exemplo:



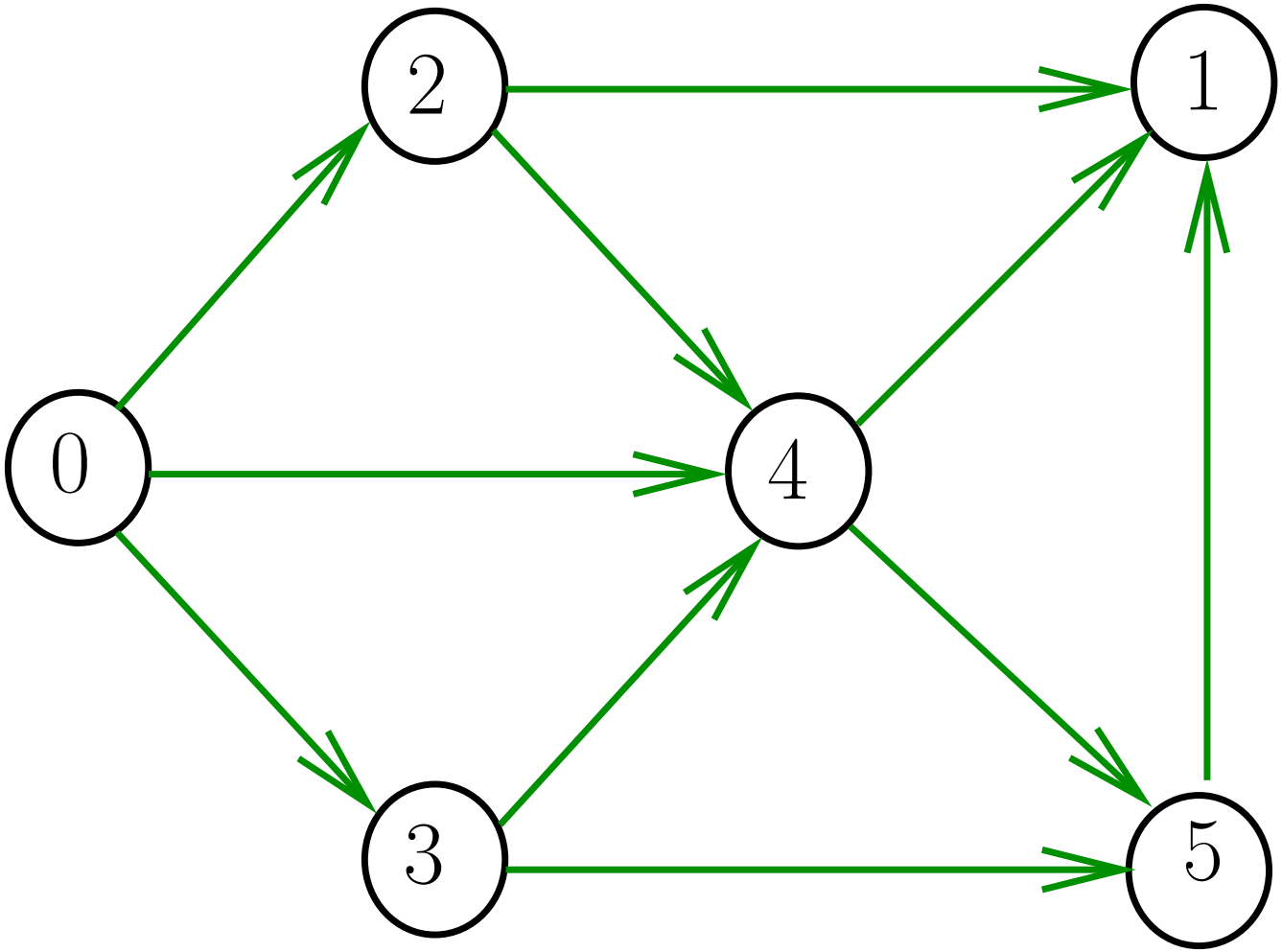

```
0:  1,  2
1:  3,  0,  2
2:  1,  3,  0
3:  1,  2
```

Consumo de espaço: $\Theta(V + A)$ (linear)

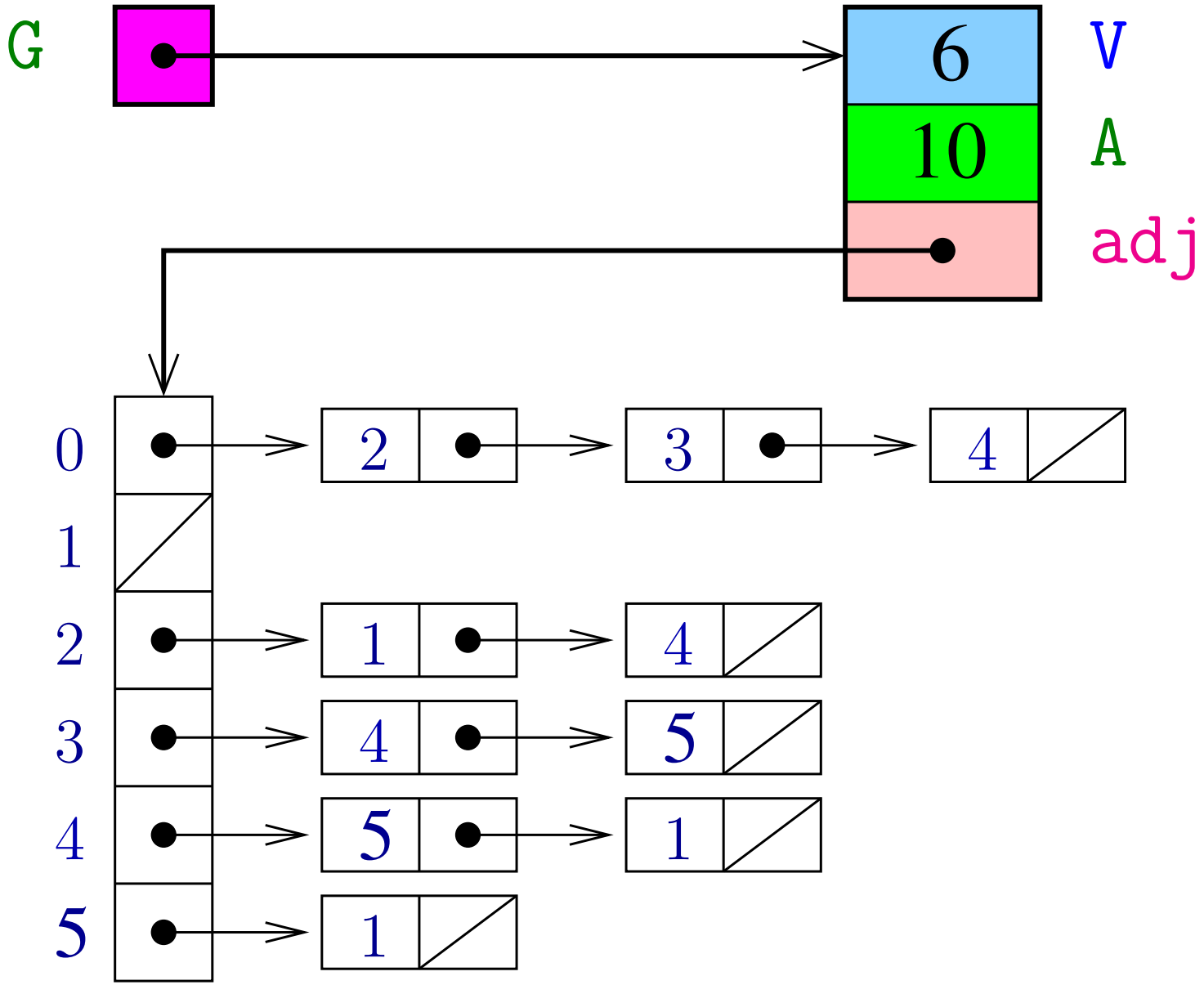
Manipulação eficiente

Digrafo

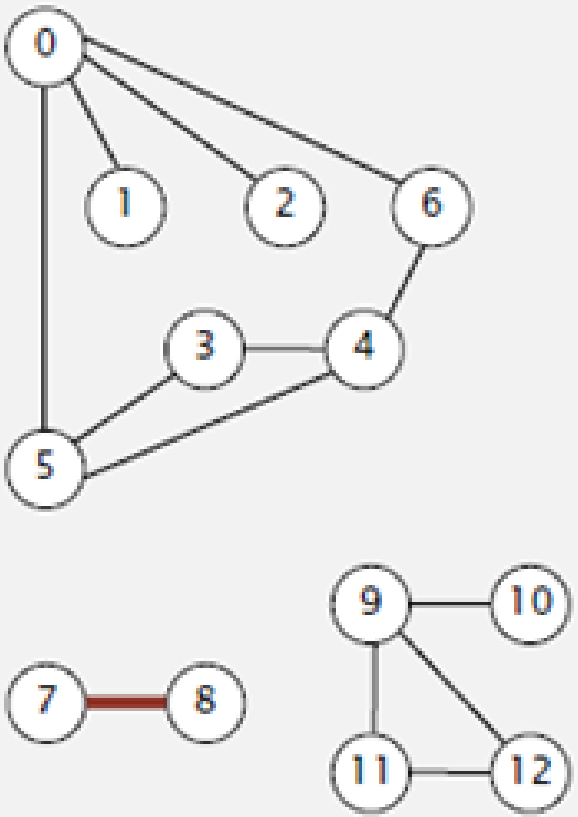
Digraph G

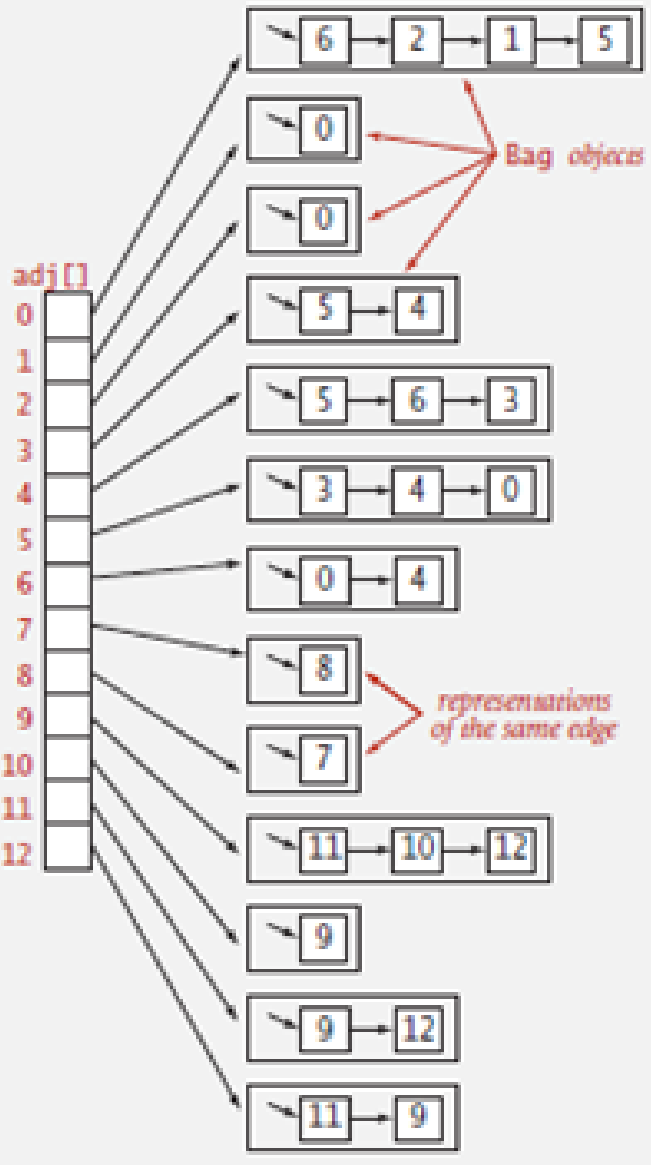


Estruturas de dados



Grafos no algs4





Esqueleto da classe Digraph

```
public class Digraph {
   private int V; // no.  vértices
   private int E; // no.  arcos
   private Bag<Integer>[] adj;
   private int[] indegree;
   public Digraph(int V) {...}
   public int V() { return V; }
   public int E() { return E; }
   public void addEdge(int v, int w) { }
   public Iterable<Integer> adj(intv) { }
   public int outdegree(int v) {...}
   public int indegree(int v) {...}
   public Digraph reverse() { ...}
}
```

Digraph

```
public Digraph(int V) {
   this.V = V;
   this.E = 0;
   indegree = new int[V];
   adj = (Bag<Integer>[]) new Bag[V];
   for (int v = 0; v < V; v++) {
       adj[v] = new Bag<Integer>();
   }
}
```

Digraph

```
// insere um arco
public void addEdge(int v, int w) {
   adj[v].add(w);
   indegree[w]++;
   E++;
}

// retorna a lista de adjacência de v
public Iterable<Integer> adj(int v) {
   return adj[v];
}
```

Digraph

```
// retorna o grau de saída de v
public int outdegree(int v) {
   return adj[v].size();
}
// retorna o grau de entrada de v
public int indegree(int v) {
   return indegree[v];
}
```

Digraph

```
// retorna o sigrafo reverso
public Digraph reverse() {
   Digraph reverse = new Digraph(V);
   for (int v = 0; v < V; v++) {
       for (int w :  adj(v)) {
           reverse.addEdge(w, v);
       }
   }
   return reverse;
}
```

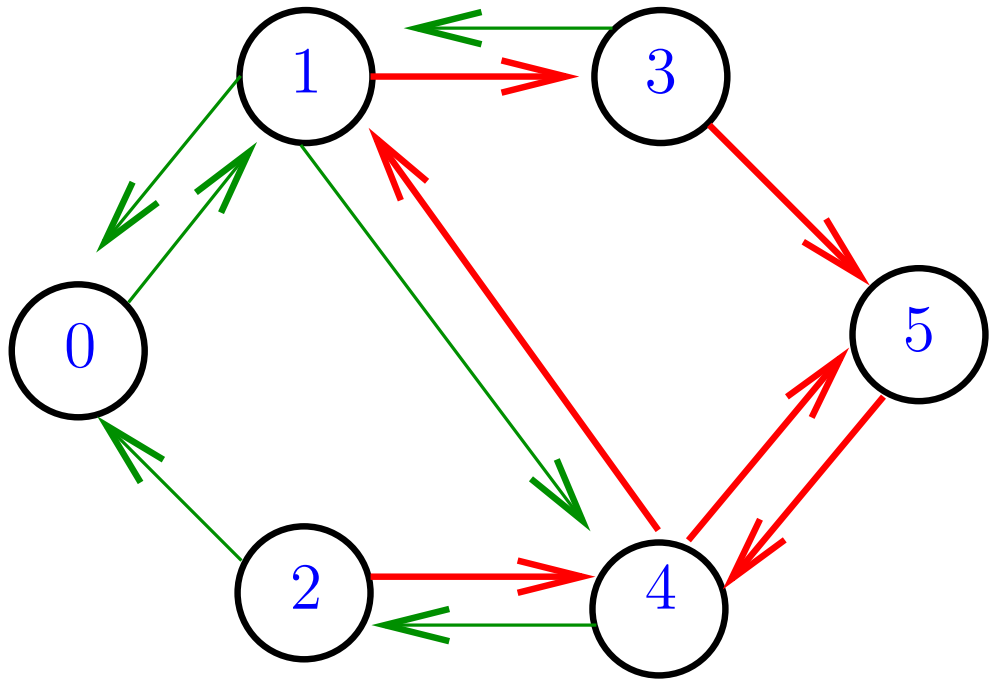
Caminhos em digrafos

Fonte: Finding Your Way & Making You A Priority

Caminhos

Um **caminho** num digrafo é qualquer seqüência da forma v_0–v_1–v_2–...–v_{k-1}–v_p, onde v_{k-1}-v_k é um arco para $k = 1, \ldots, p$.

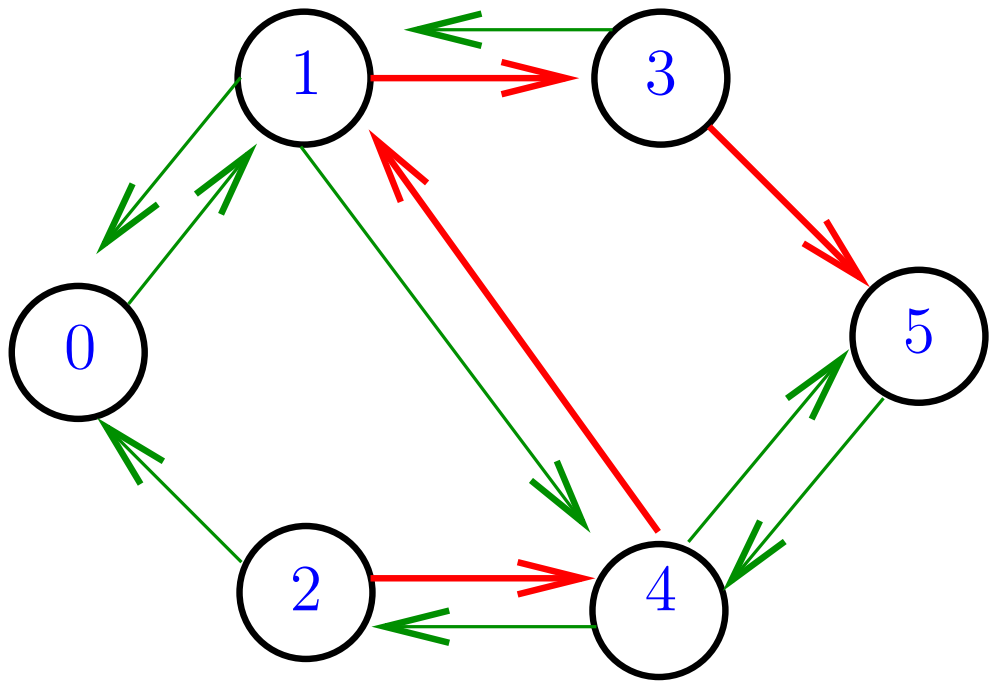
Exemplo: 2-4-1-3-5-4-5 é um caminho com **origem** 2 é **término** 5



Caminhos simples

Um caminho é **simples** se não tem vértices repetidos

Exemplo: 2-4-1-3-5 é um caminho simples de 2 a 5



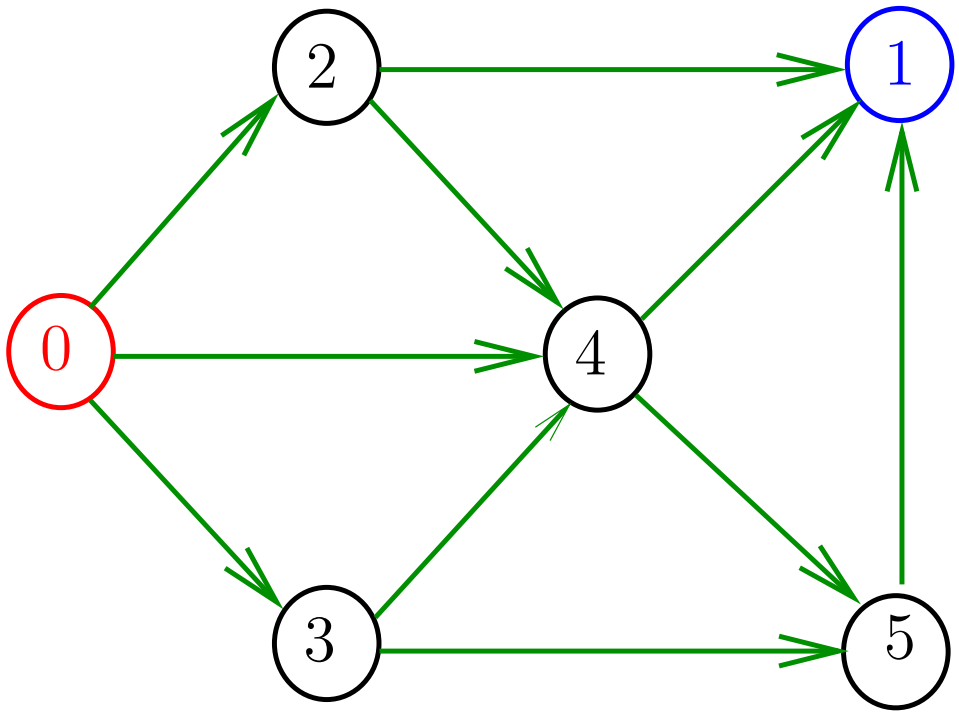
Procurando caminhos

Fonte: Mincecraft maze created by Carl Eklof (algs4)

Procurando um caminho

Problema: dados um digrafo `G` e dois vértices `s` e `t` decidir se existe um caminho de `s` a `t`

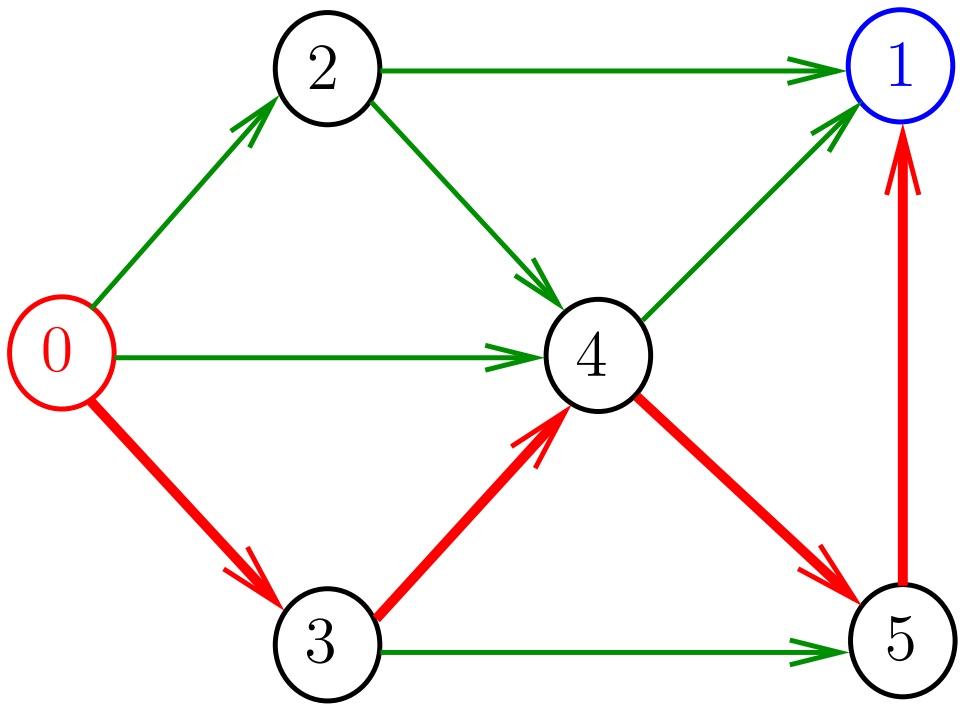
Exemplo: para `s` = 0 e `t` = 1 a resposta é SIM



Procurando um caminho

Problema: dados um digrafo `G` e dois vértices `s` e `t` decidir se existe um caminho de `s` a `t`

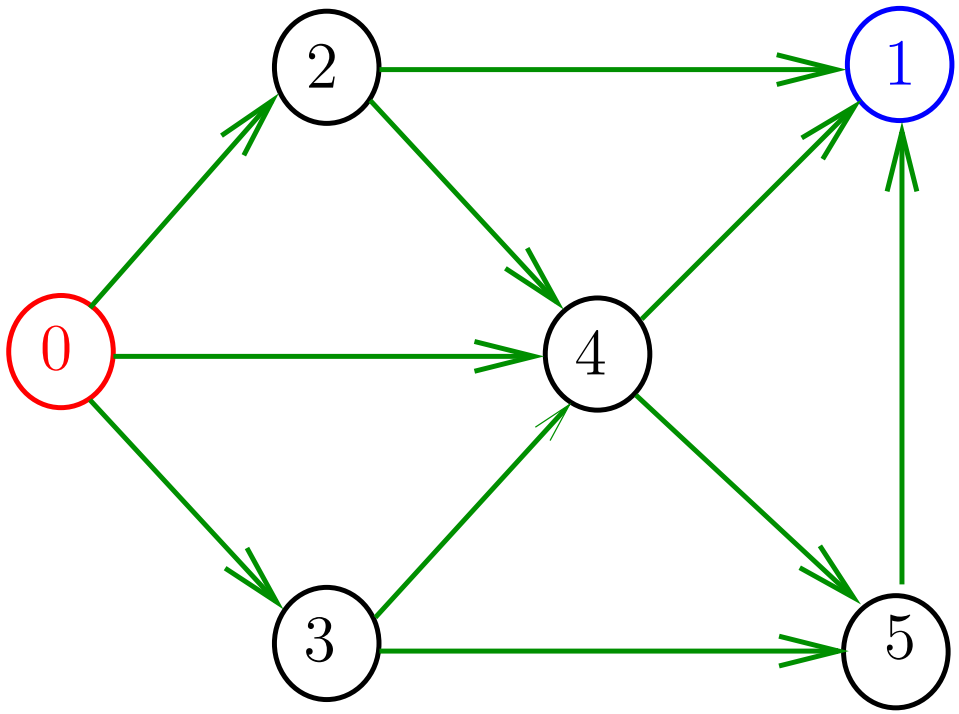
Exemplo: para `s` = 0 e `t` = 1 a resposta é SIM



Procurando um caminho

Problema: dados um digrafo `G` e dois vértices `s` e `t` decidir se existe um caminho de `s` a `t`

Exemplo: para `s` = 5 e `t` = 4 a resposta é NÃO

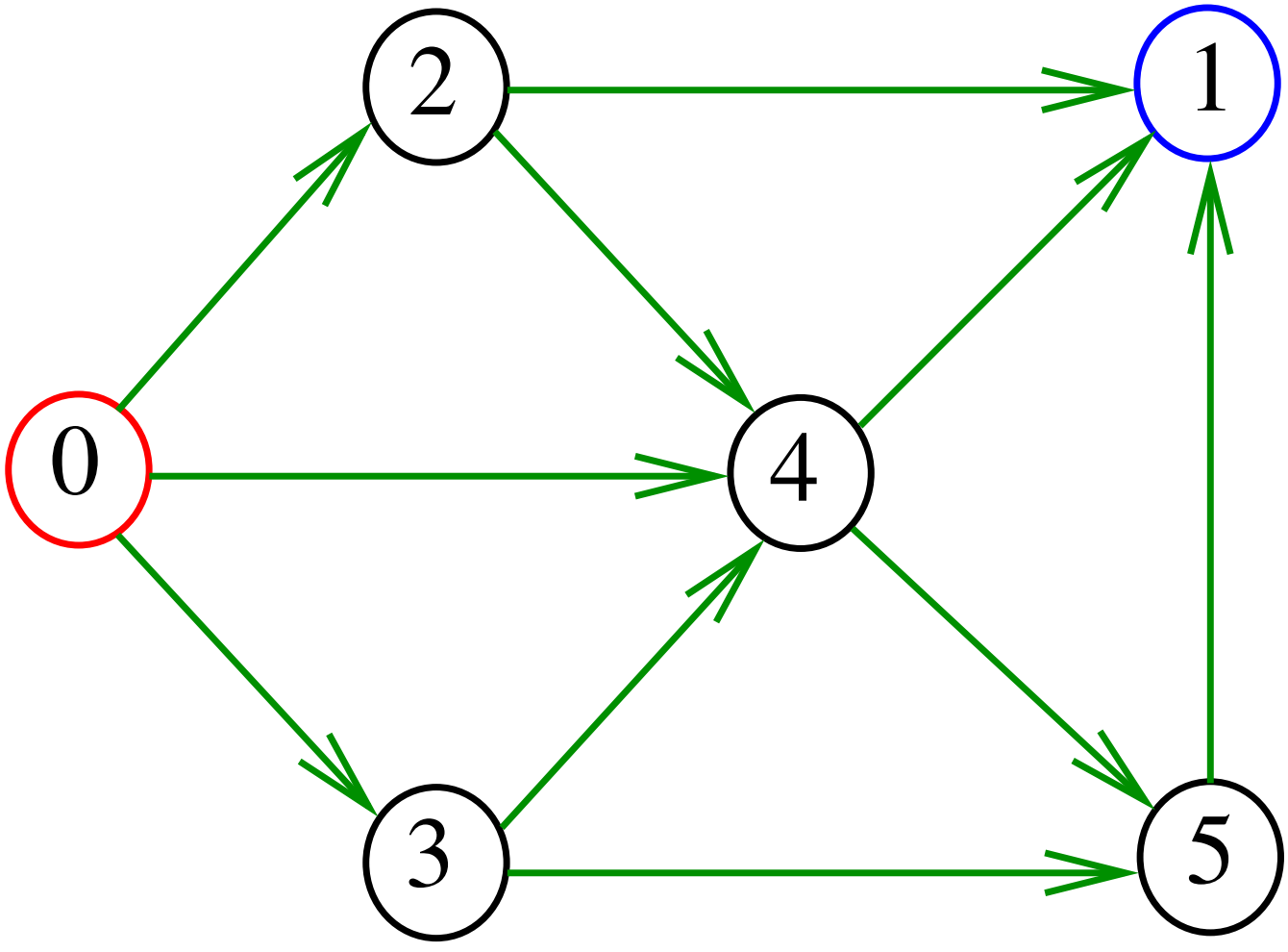


DFSpaths

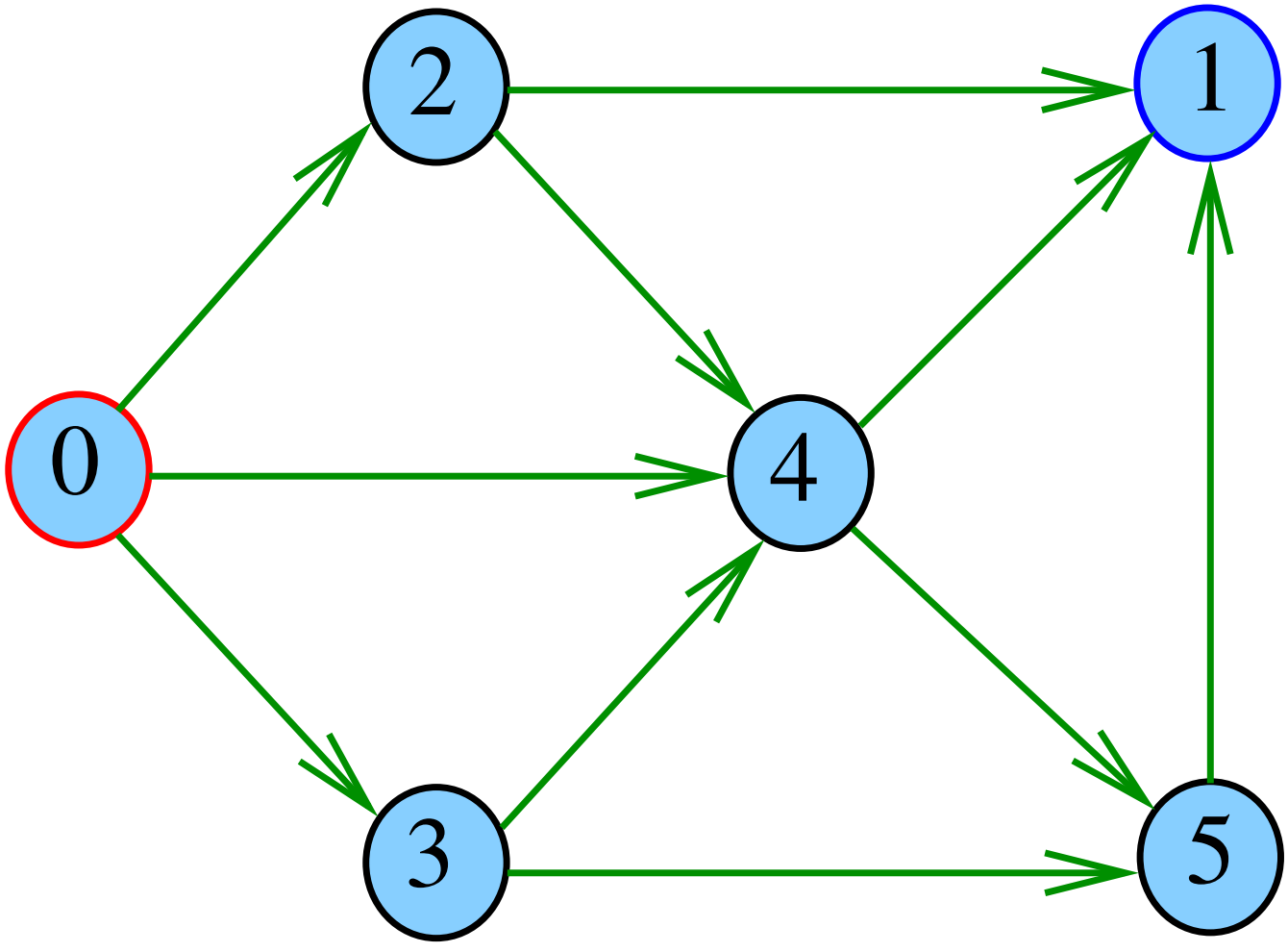
A classe DFSpaths recebe um digrafo G e um vértice s e determina todos os vértices alcançáveis a partir de s.
A classe implementa a técnica chamada busca em profundidade (*Depth First Search*).

```
public class DFSpaths{
   public void DFSpaths(Digraph G,int s){}
   // retorna true se há caminho de s a v
   public boolean hasPath(int v){ ...}
   private void dfs(Digraph G, int v) { }
}
```

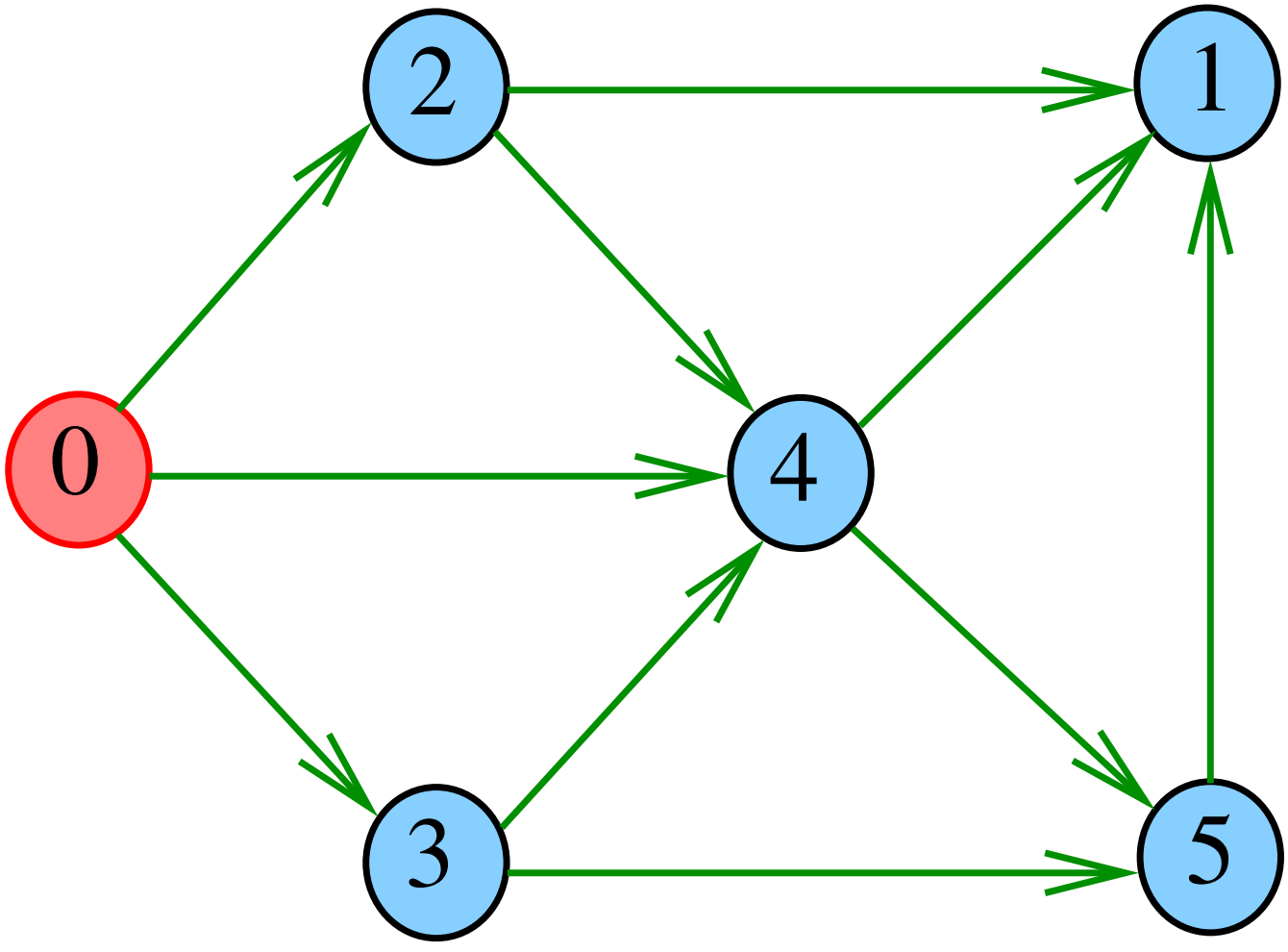
DFSpaths(G, 0)



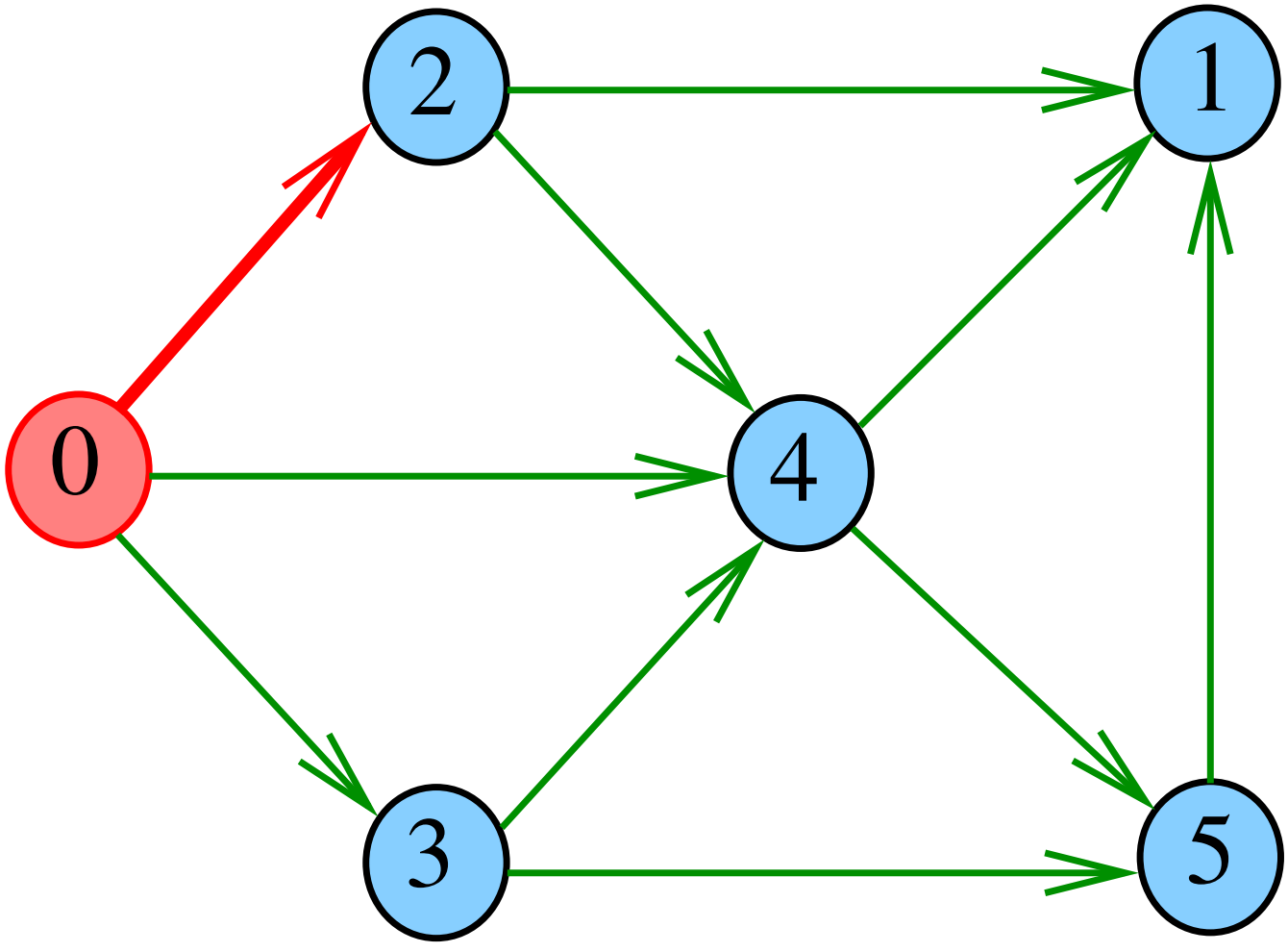
DFSpaths(G, 0)



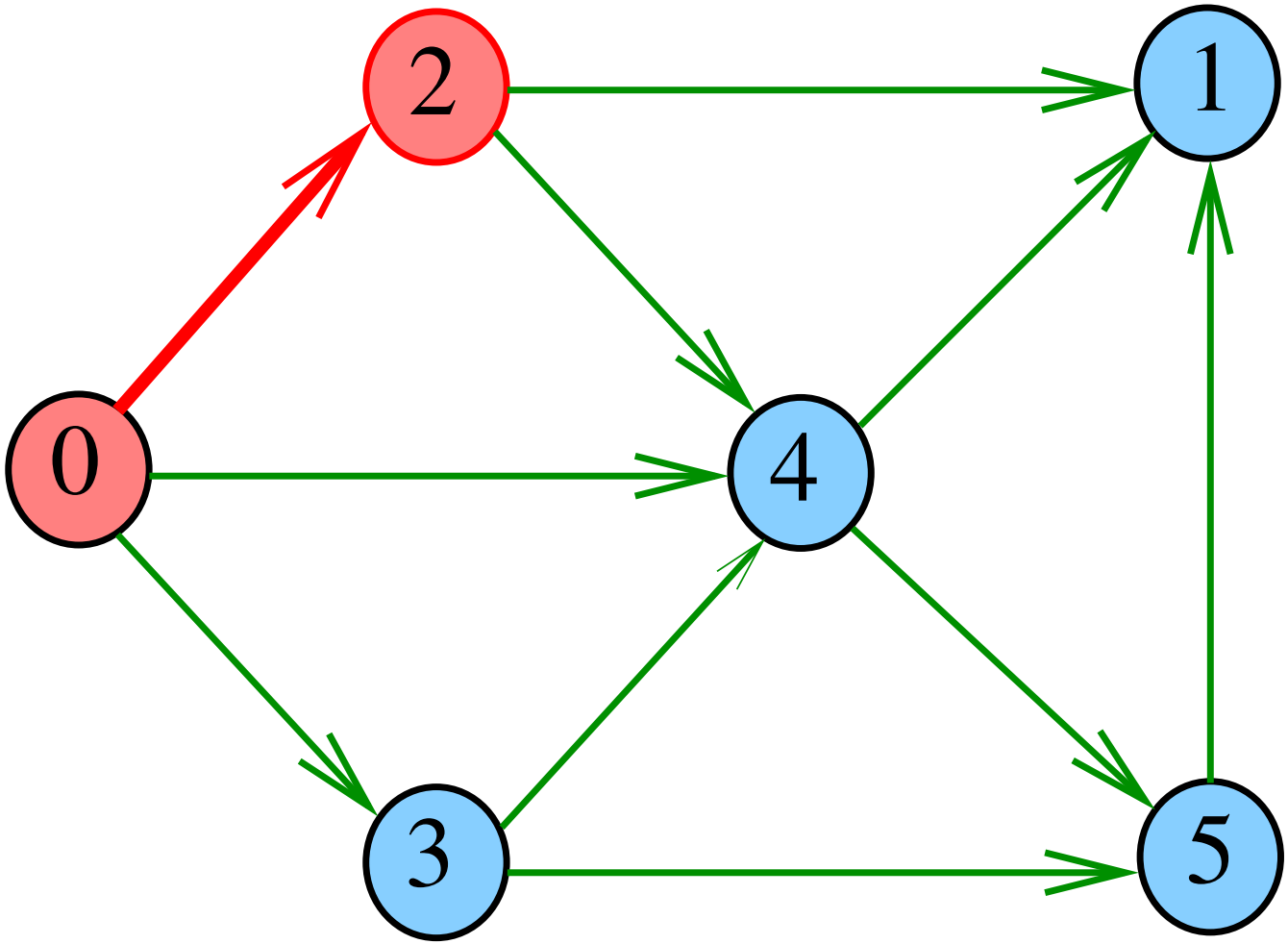
dfs(G, 0)



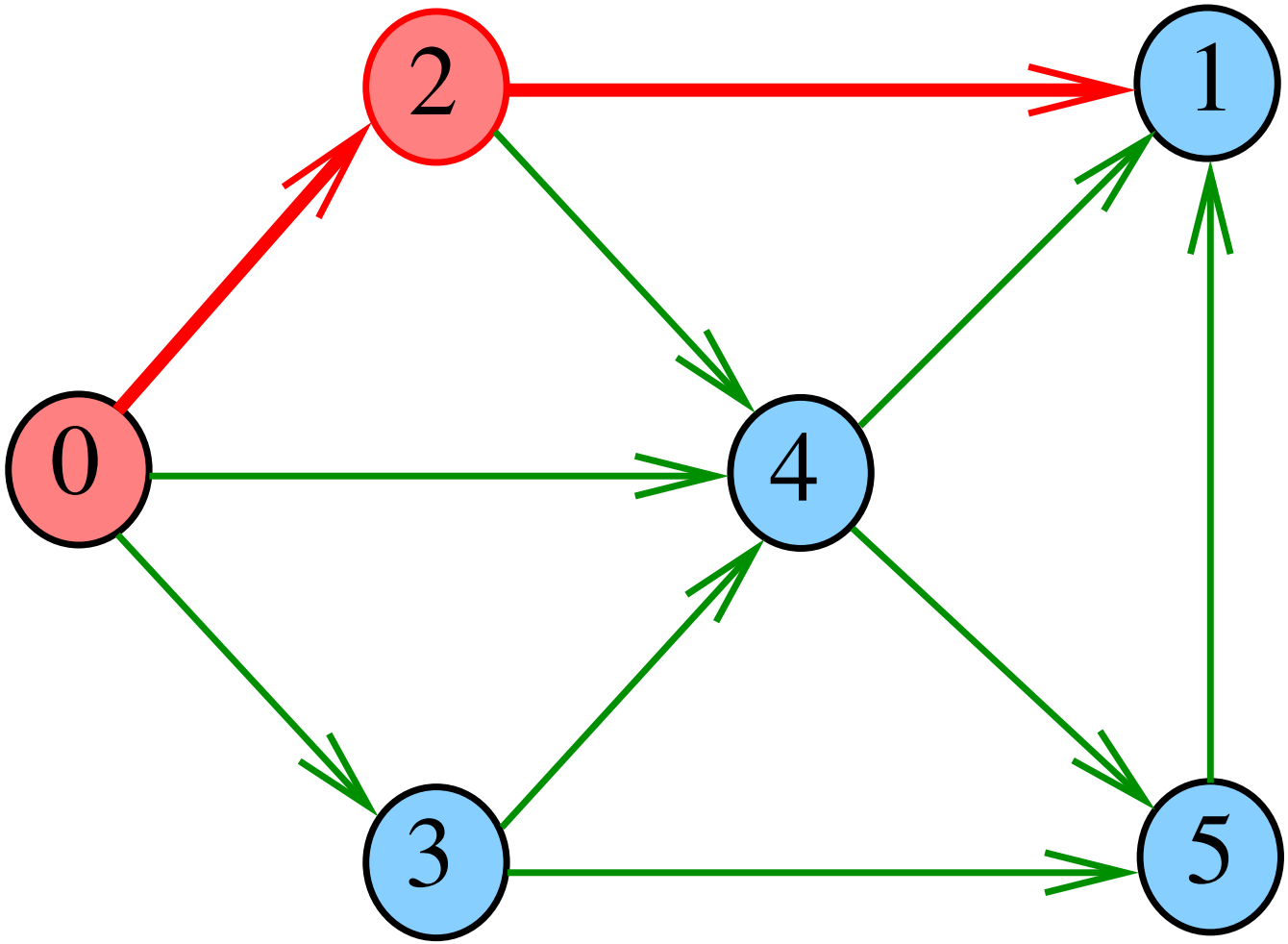
dfs(G, 0)



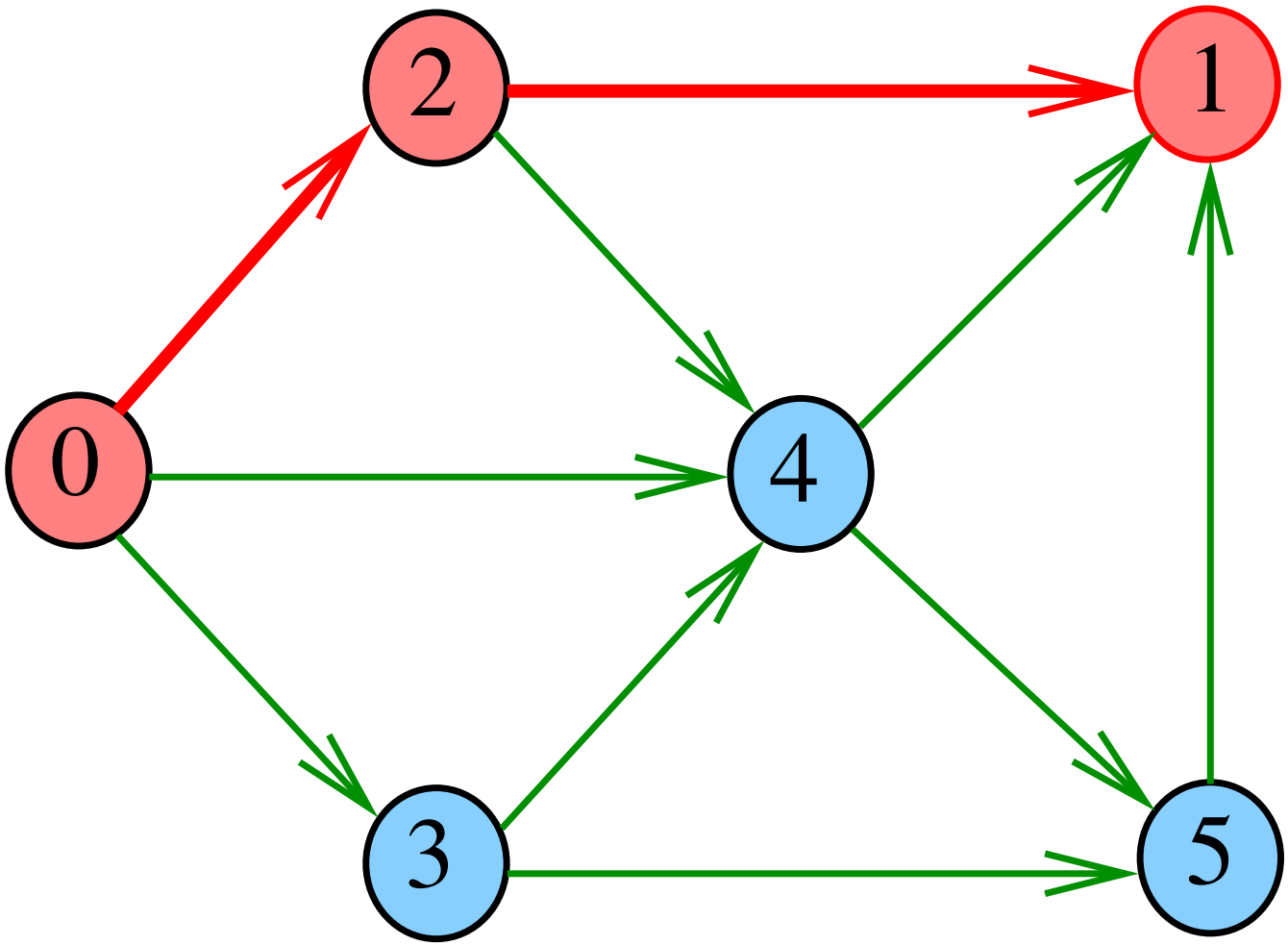
dfs(G, 2)



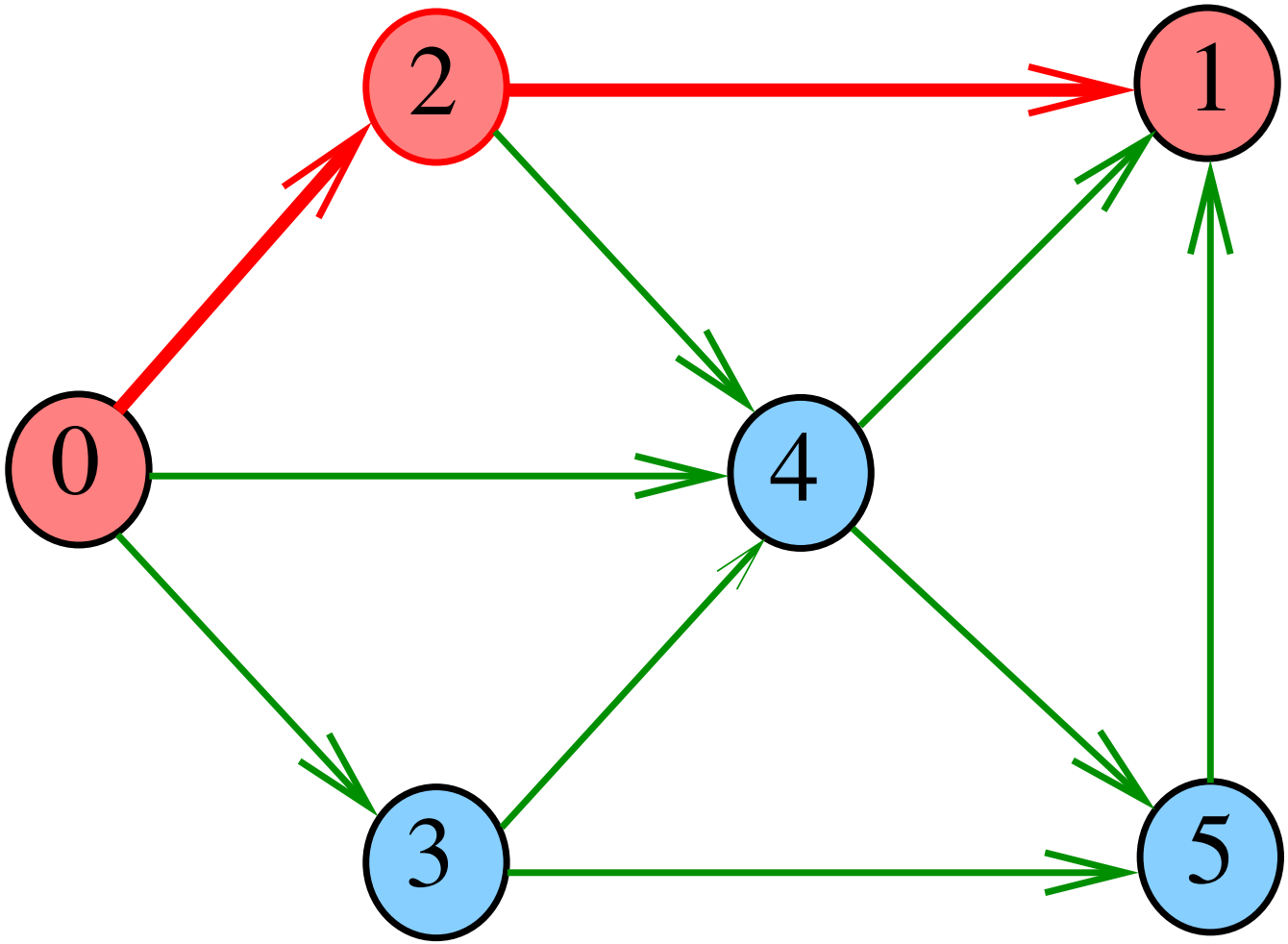
dfs(G, 2)



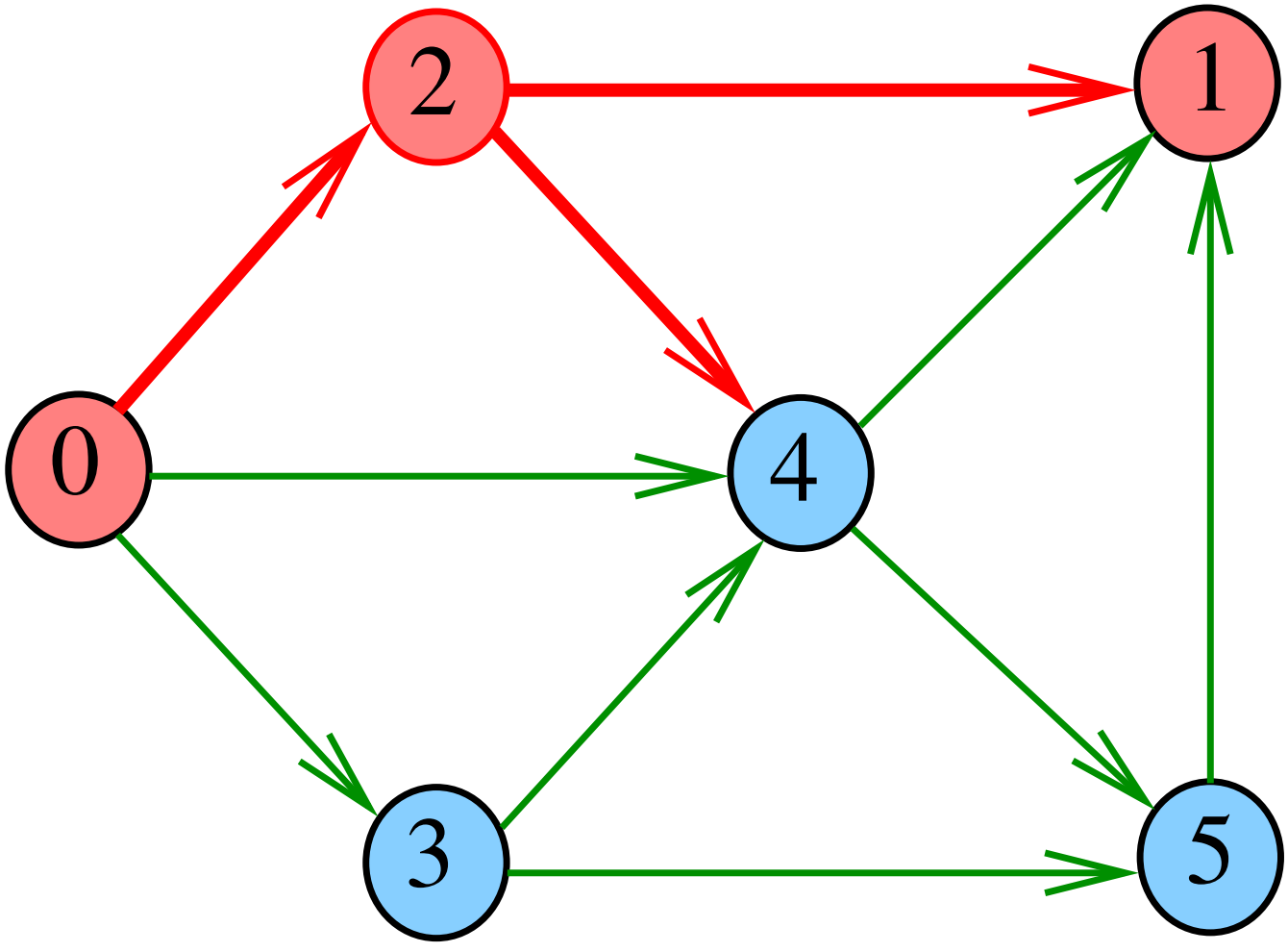
dfs(G, 1)



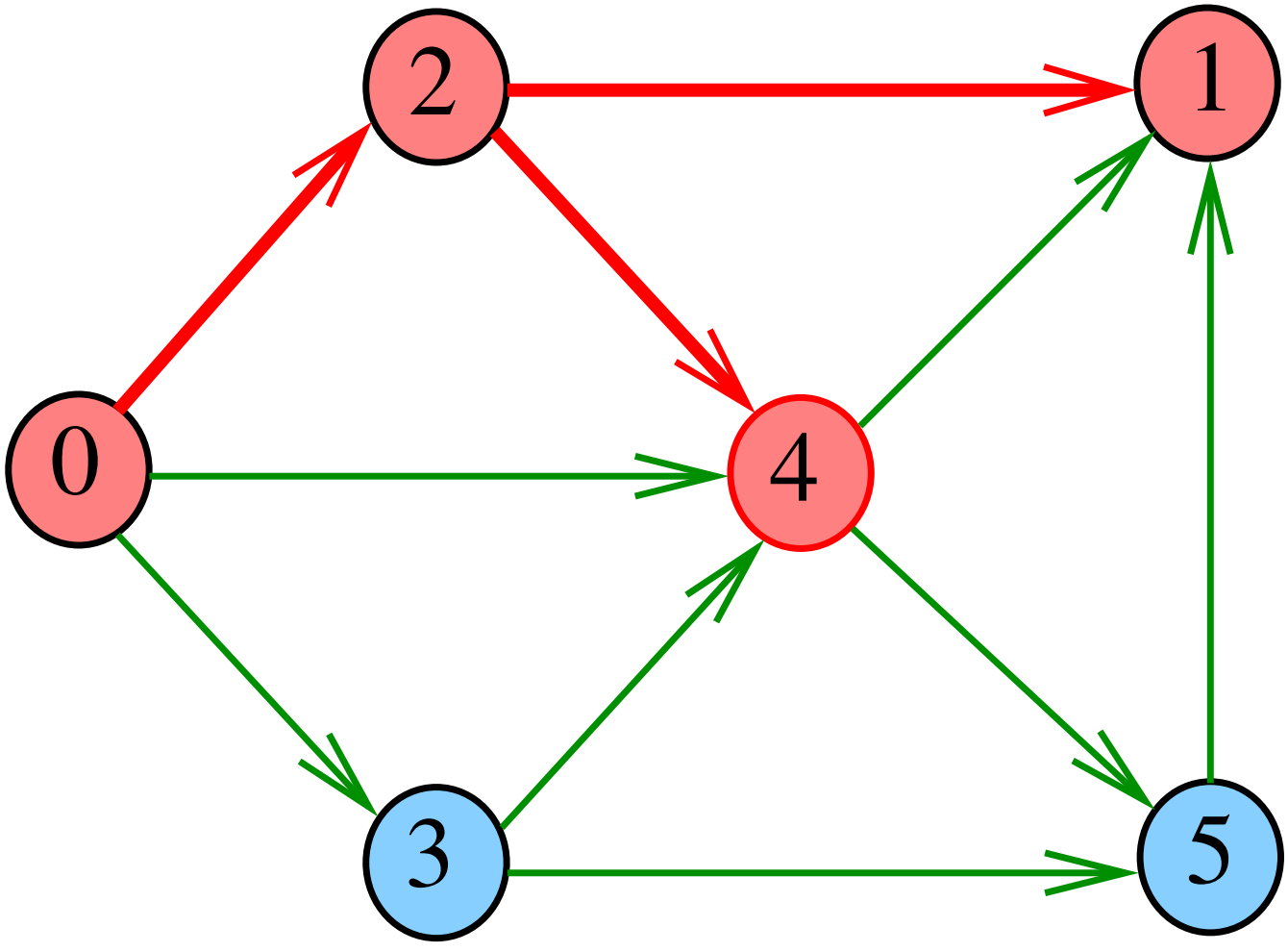
dfs(G, 2)



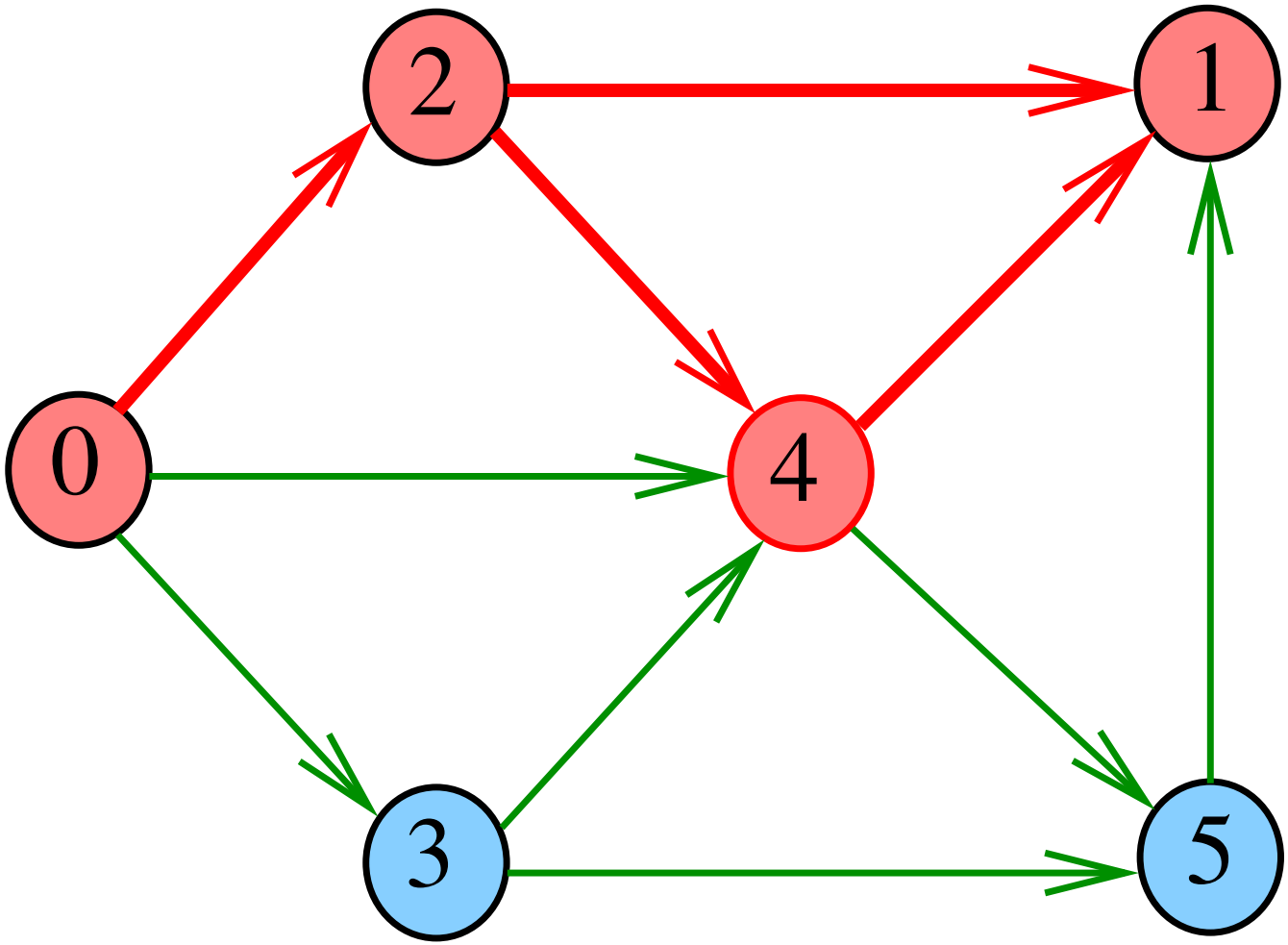
dfs(G, 2)



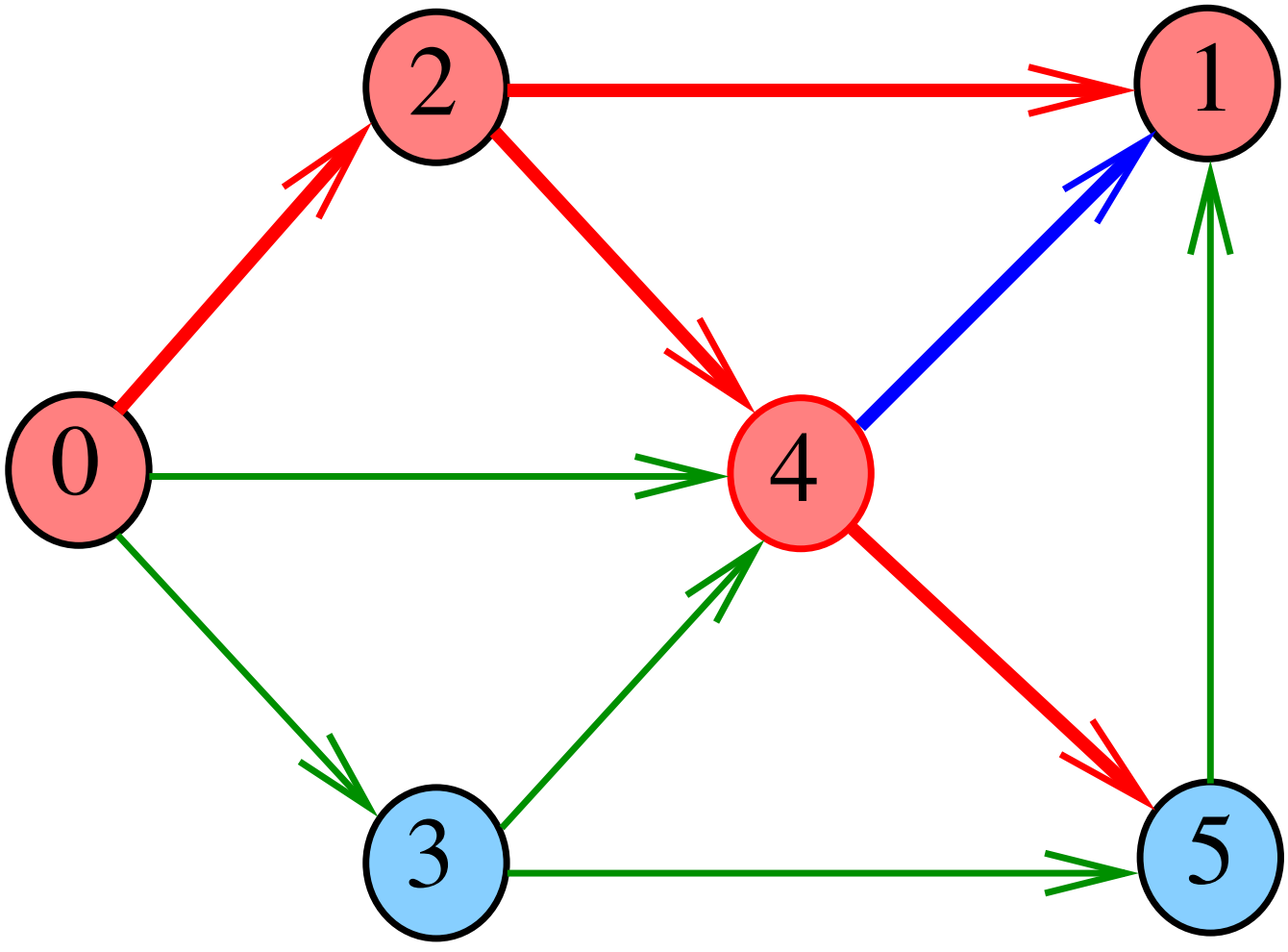
dfs(G, 4)



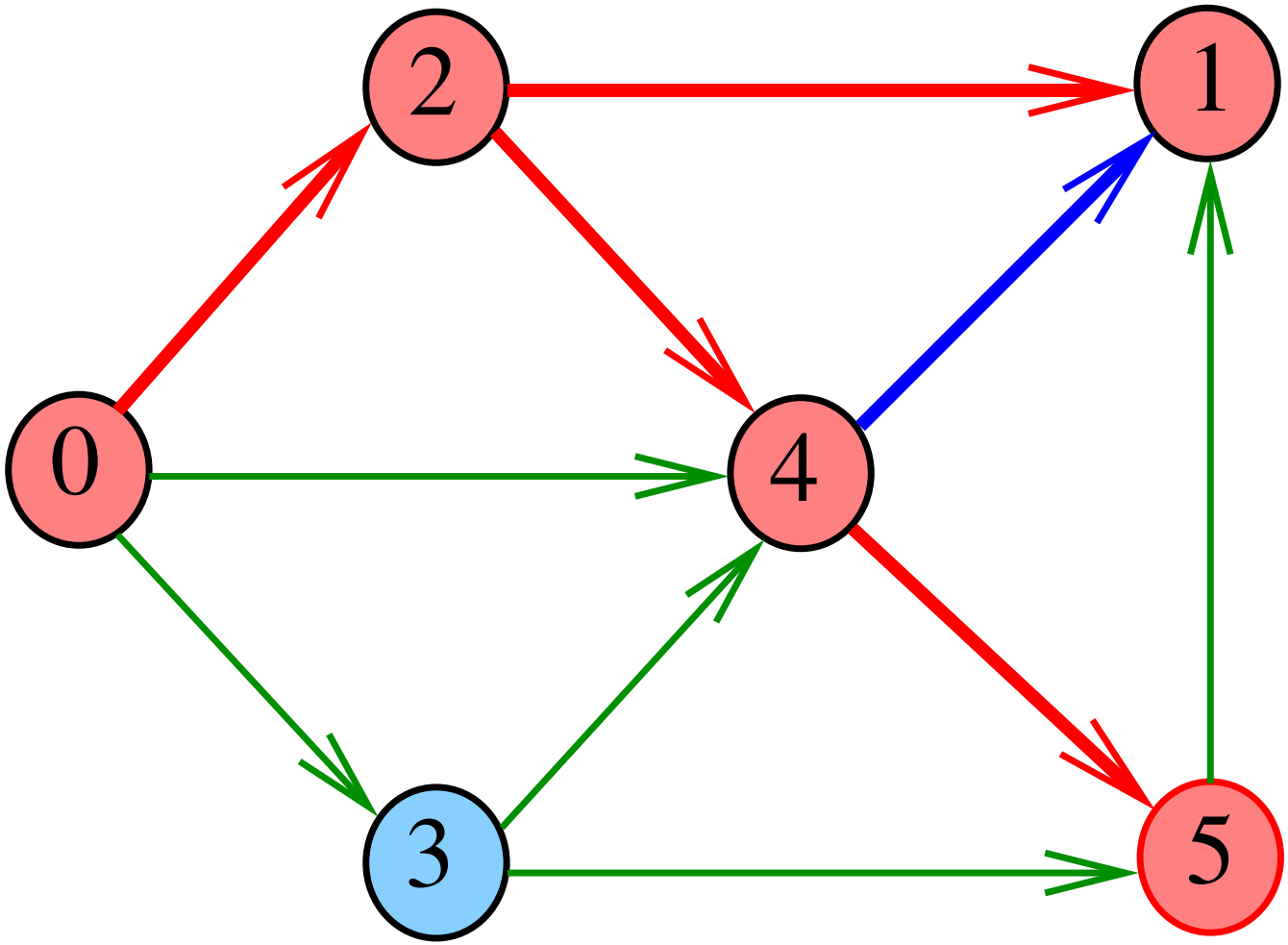
dfs(G, 4)



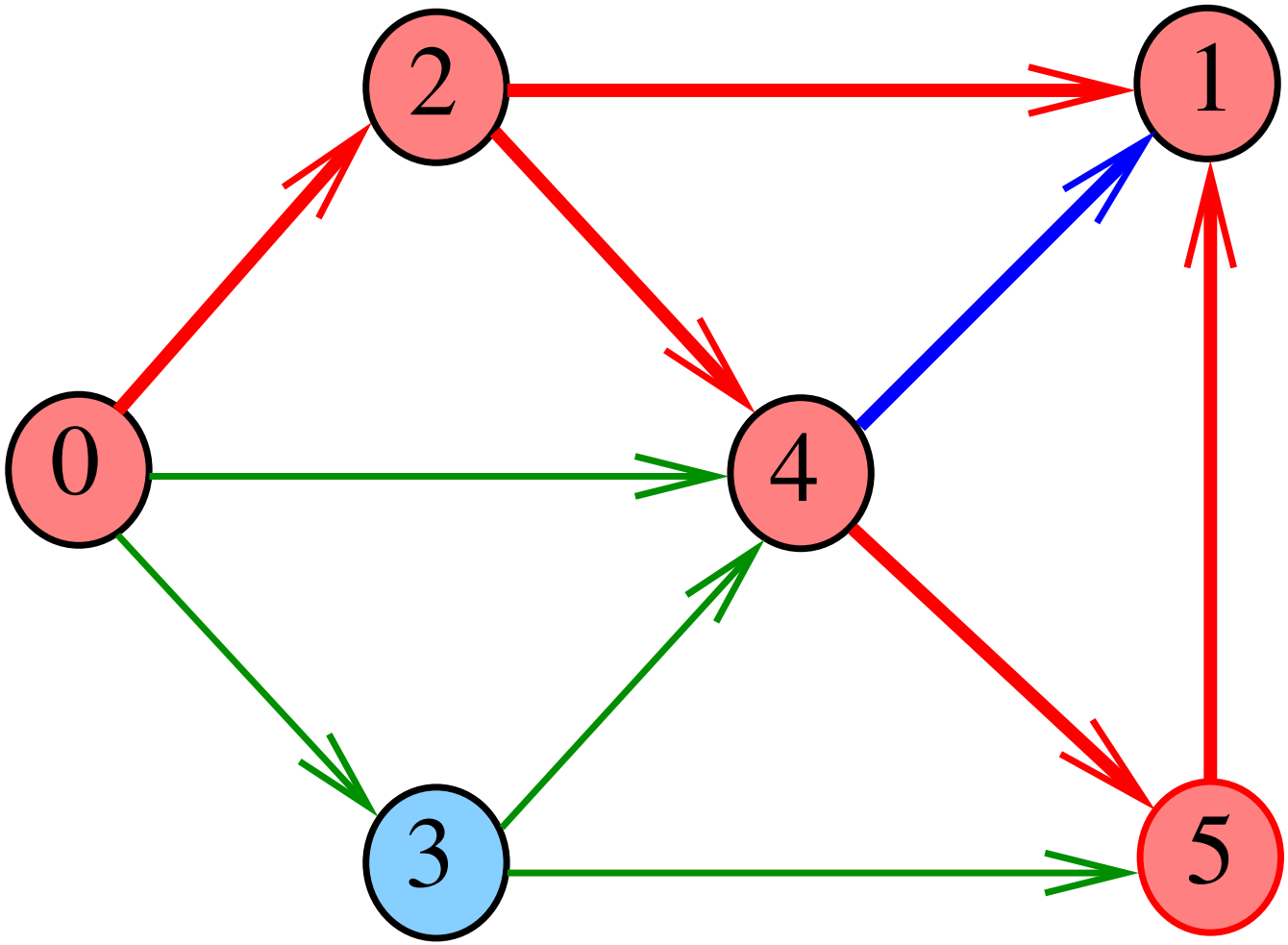
dfs(G, 4)



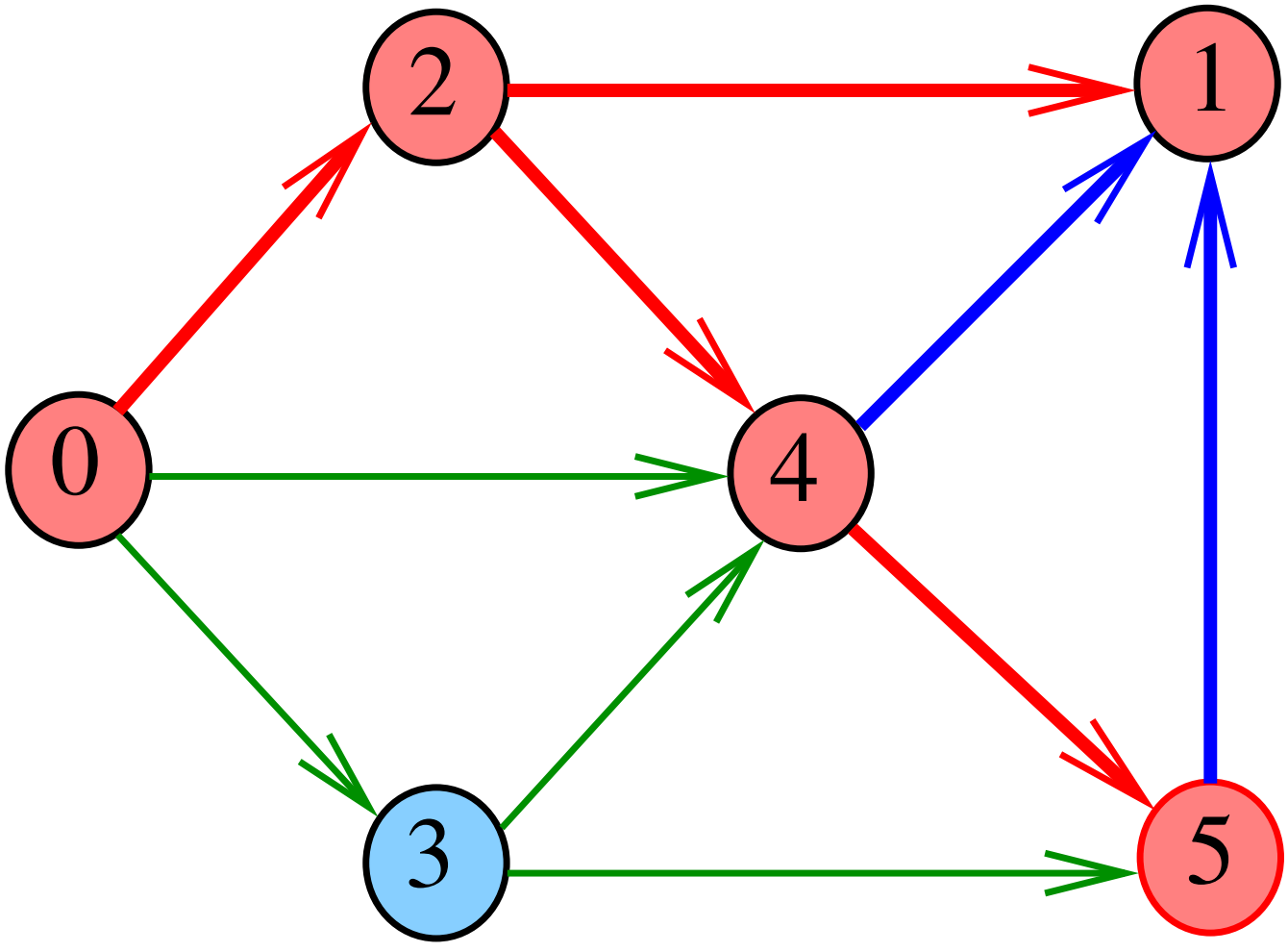
dfs(G, 5)



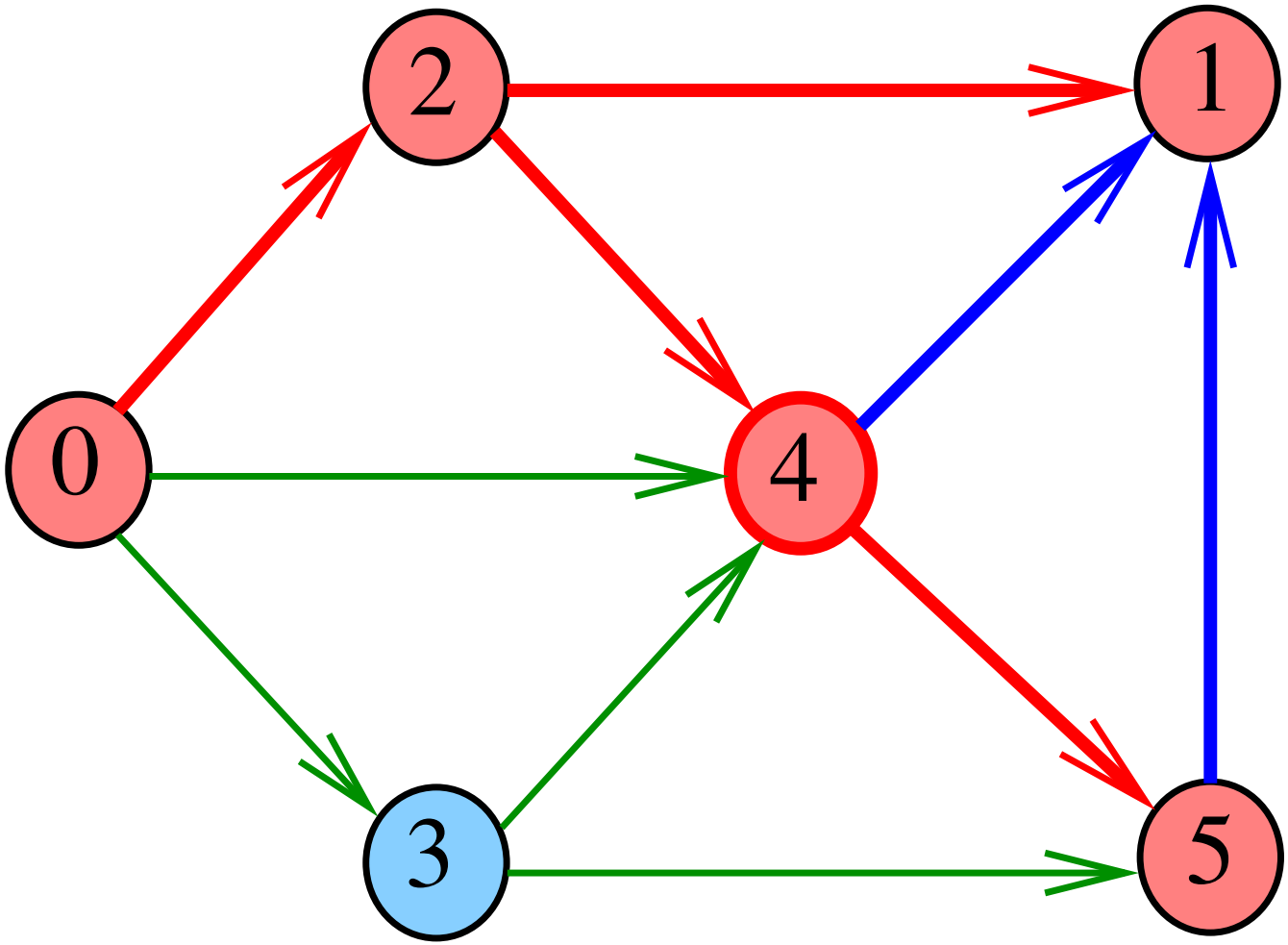
dfs(G, 5)



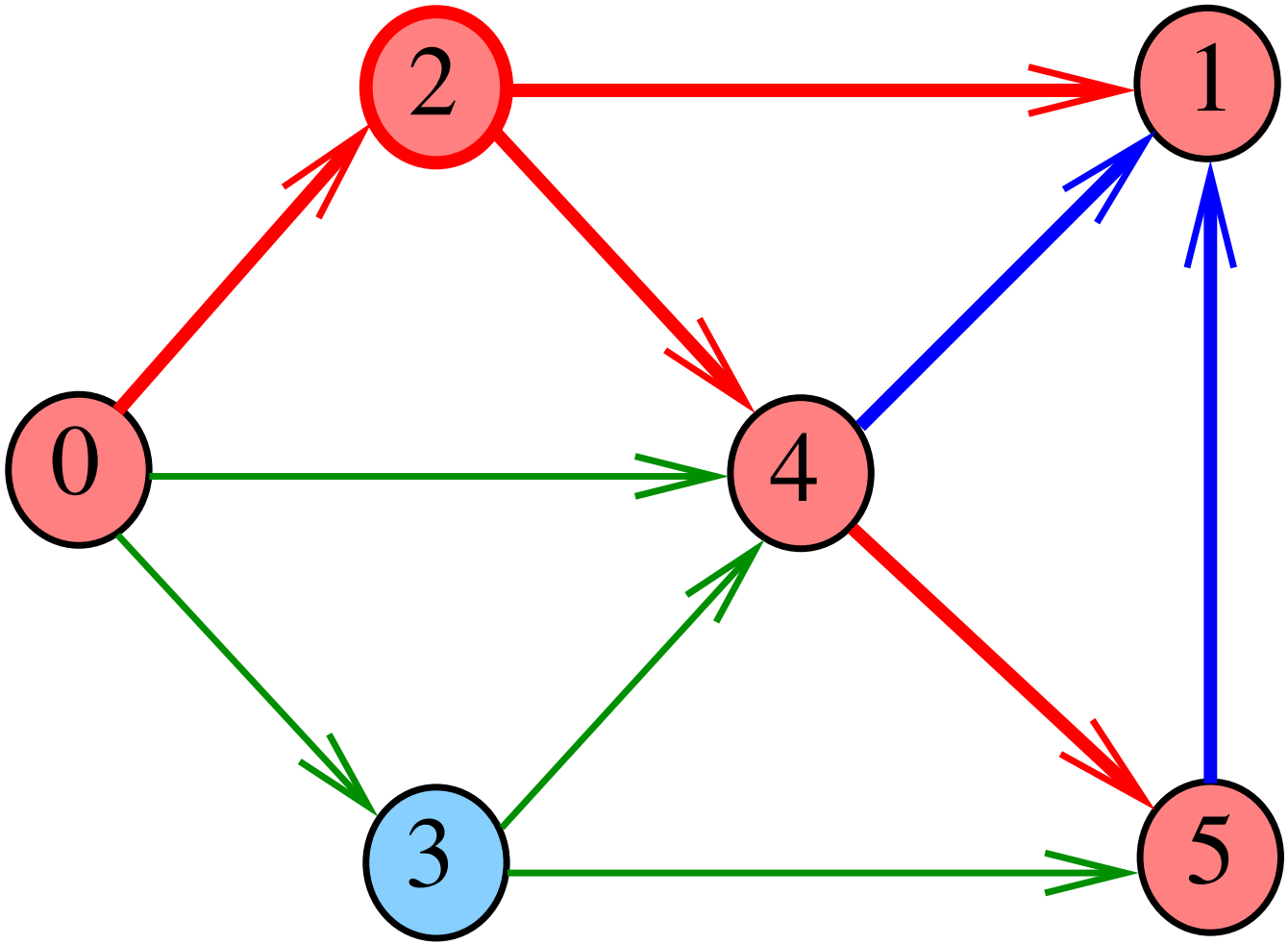
dfs(G, 5)



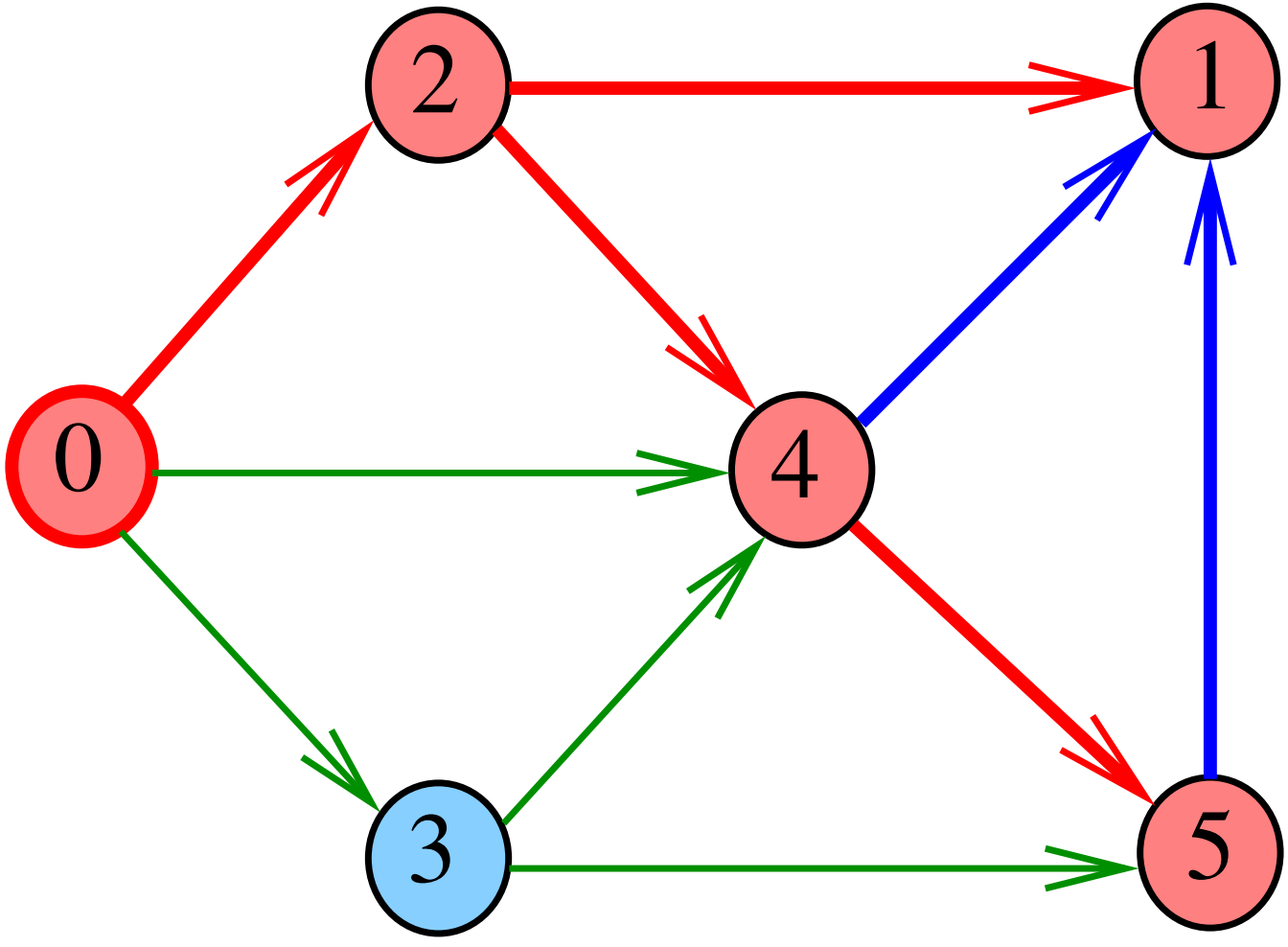
dfs(G, 4)



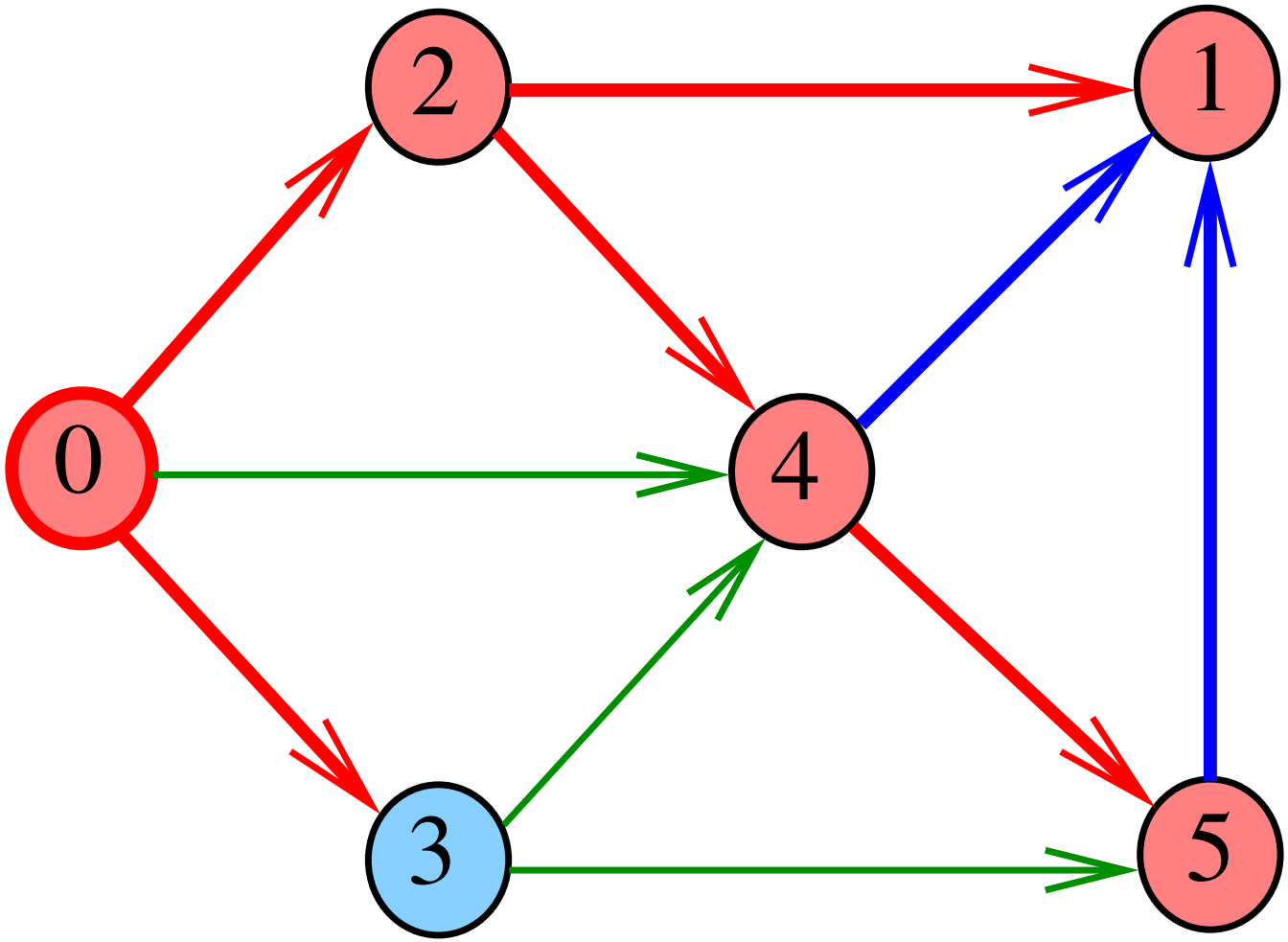
dfs(G, 2)



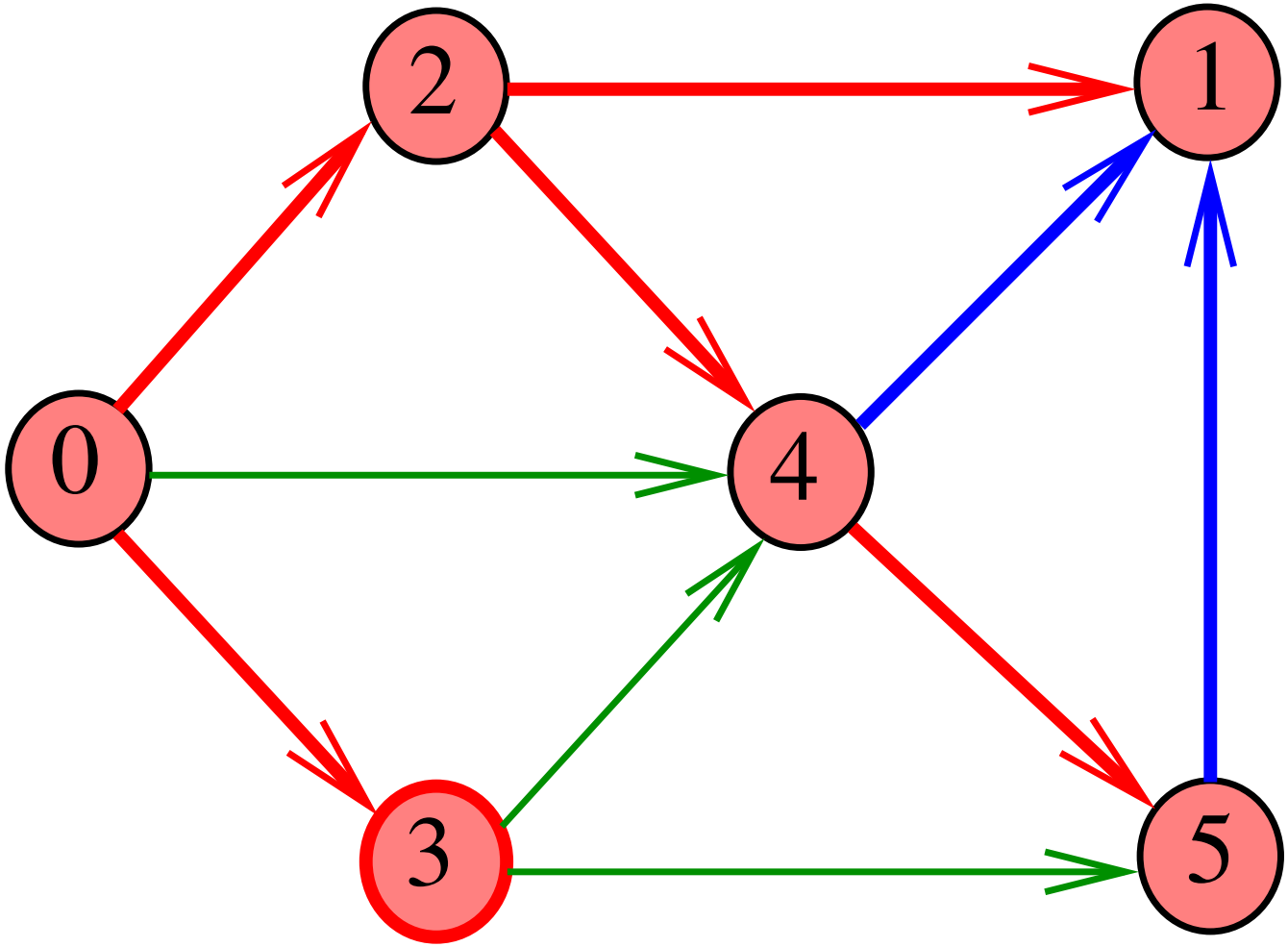
dfs(G, 0)



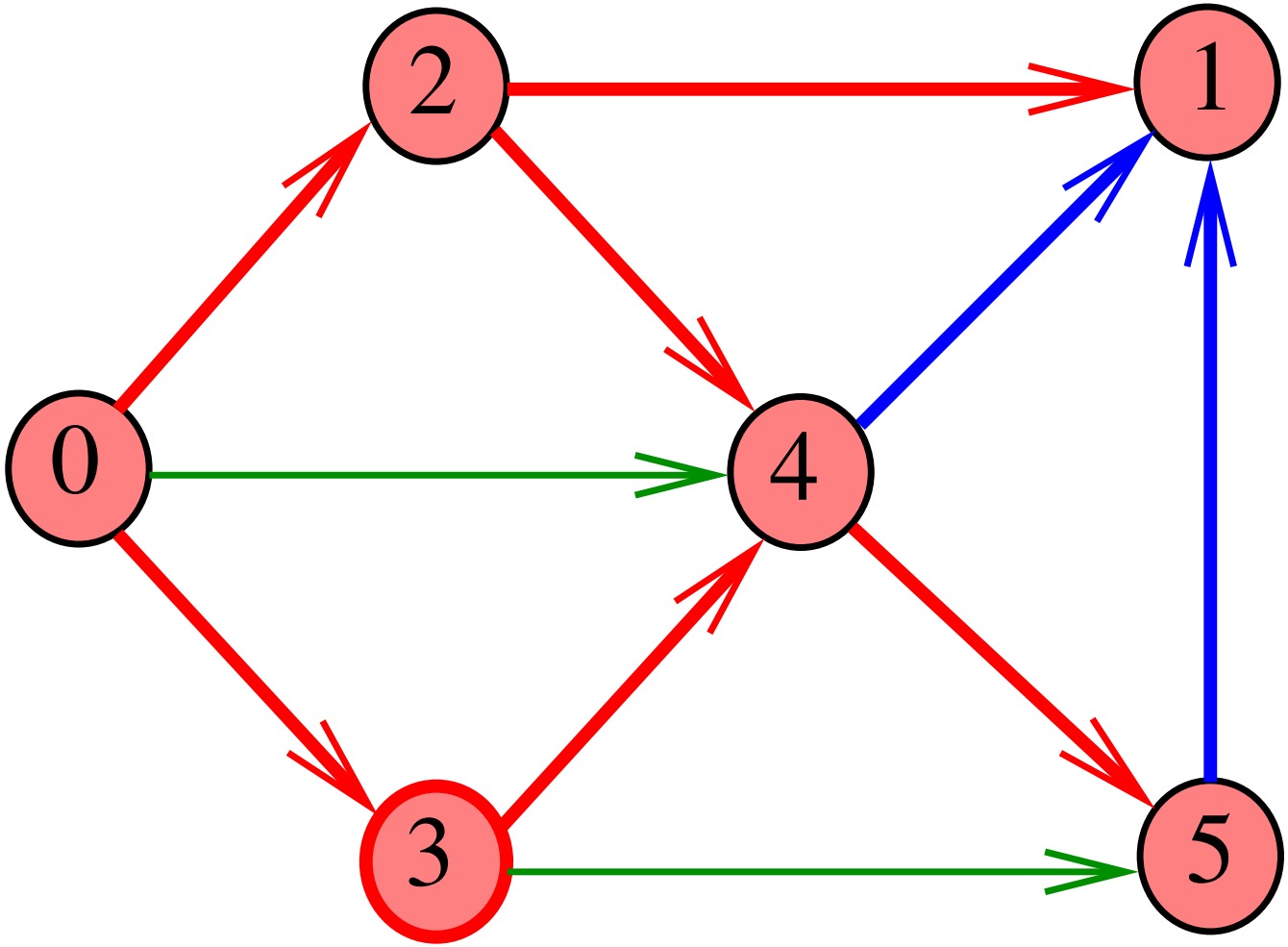
dfs(G, 0)



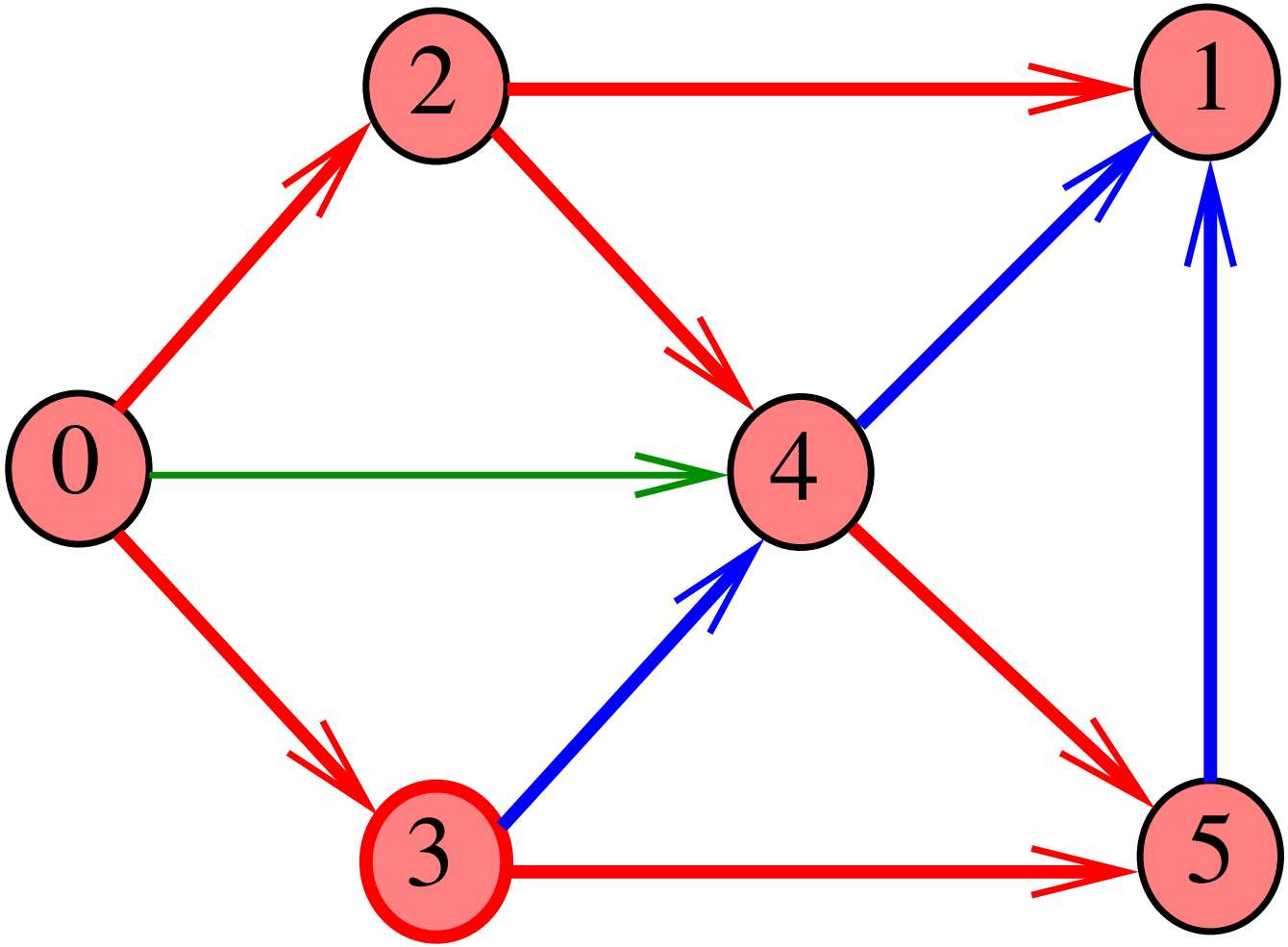
dfs(G, 3)



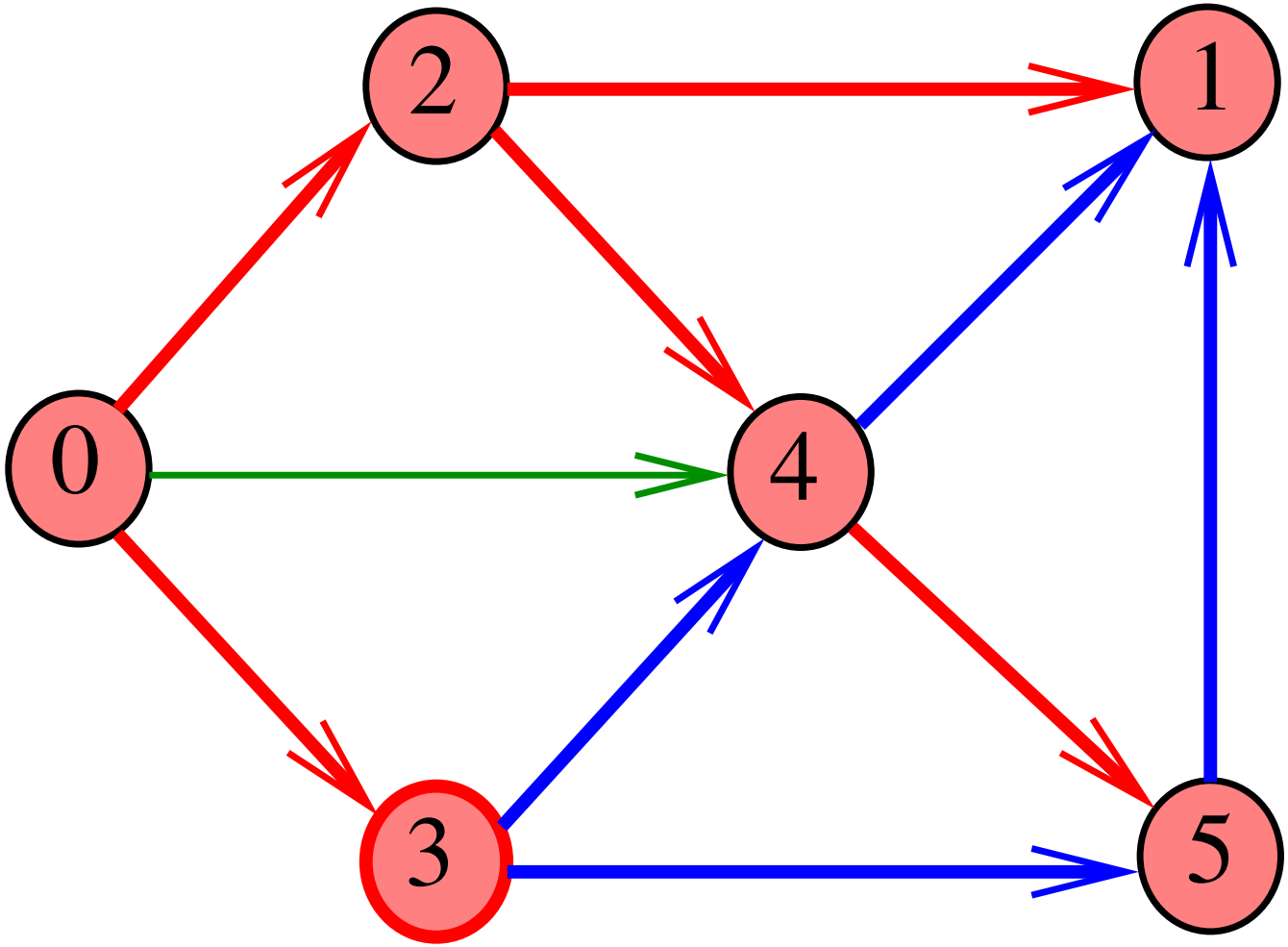
dfs(G, 3)



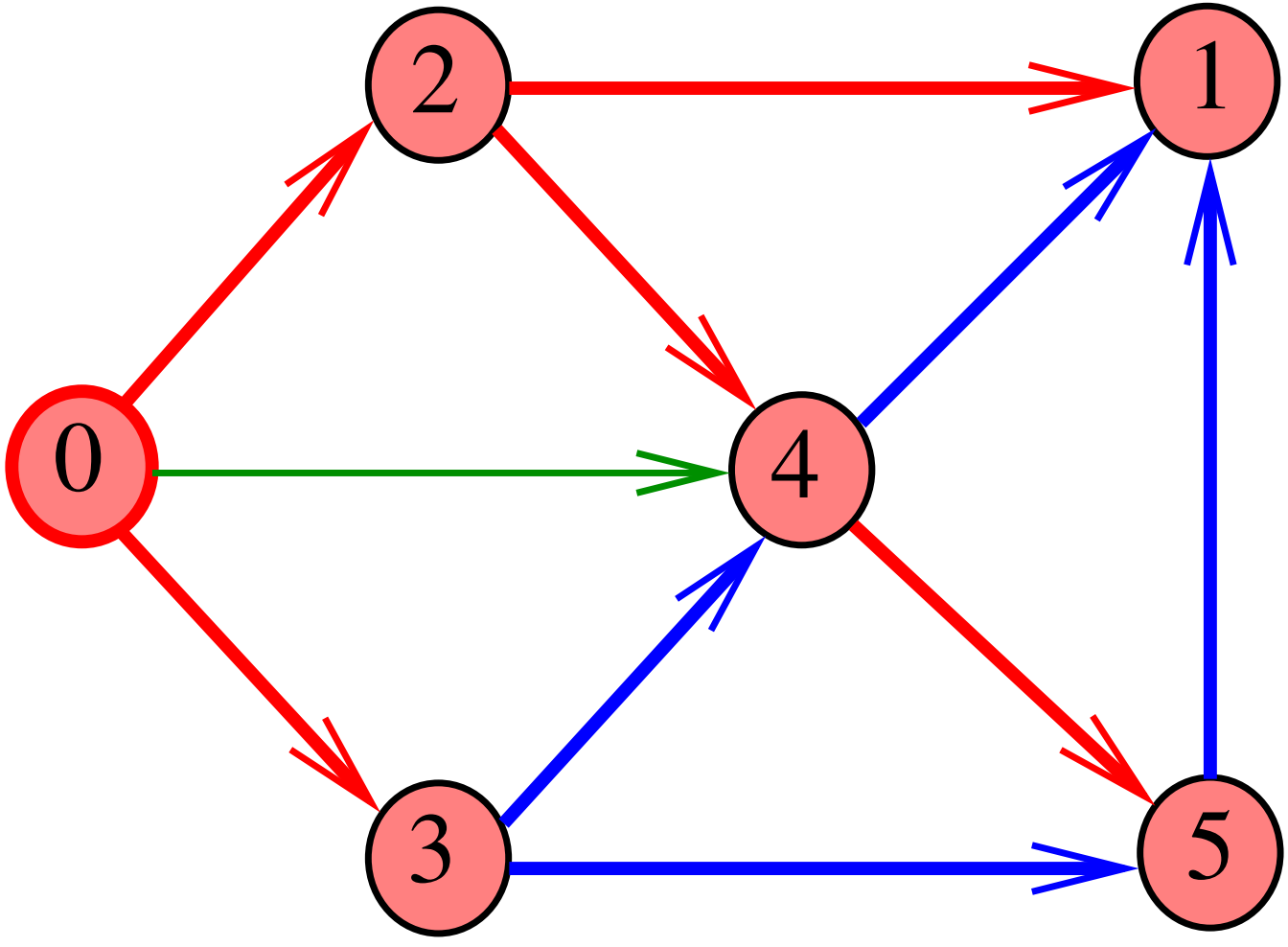
dfs(G, 3)



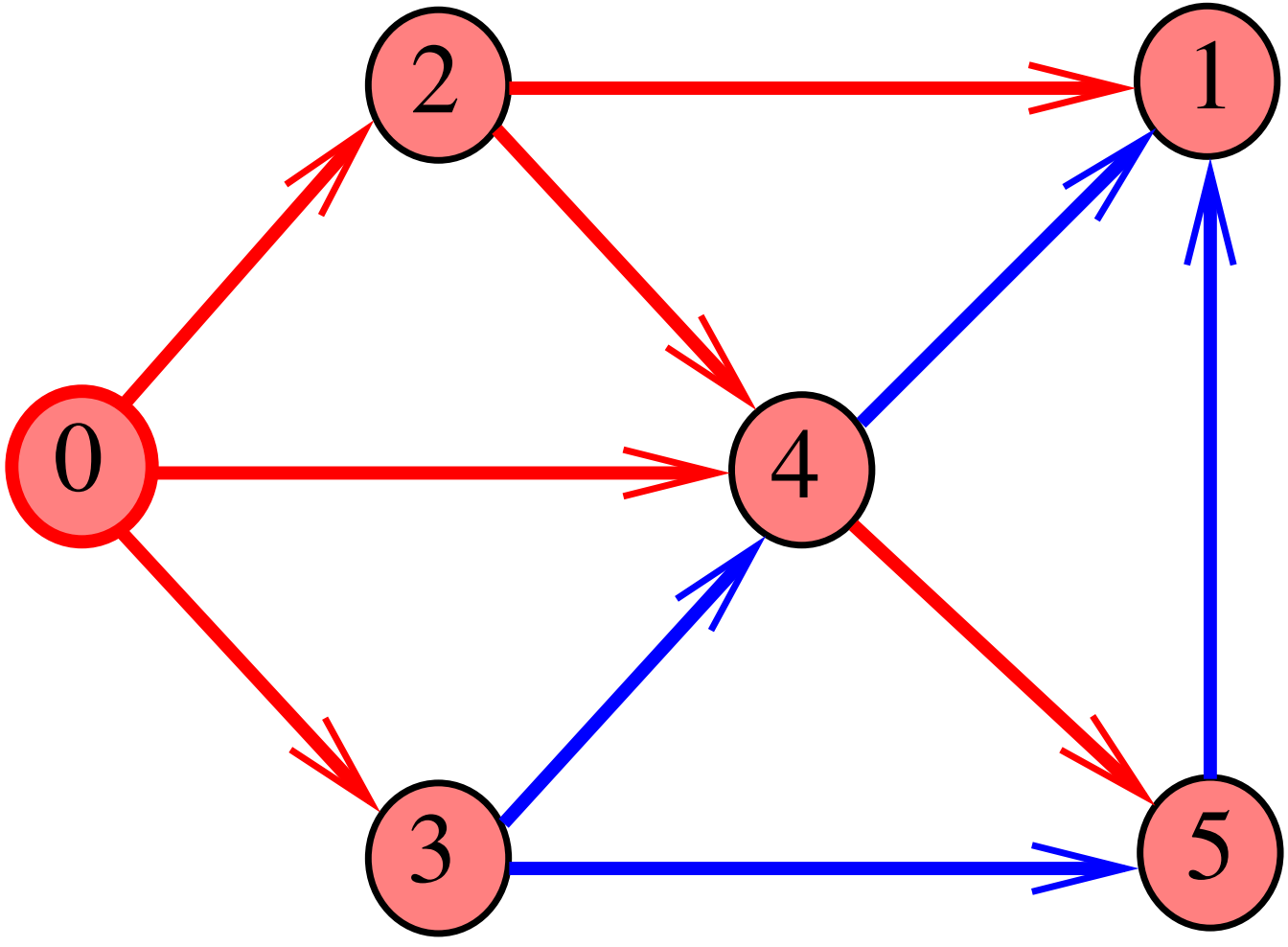
dfs(G, 3)



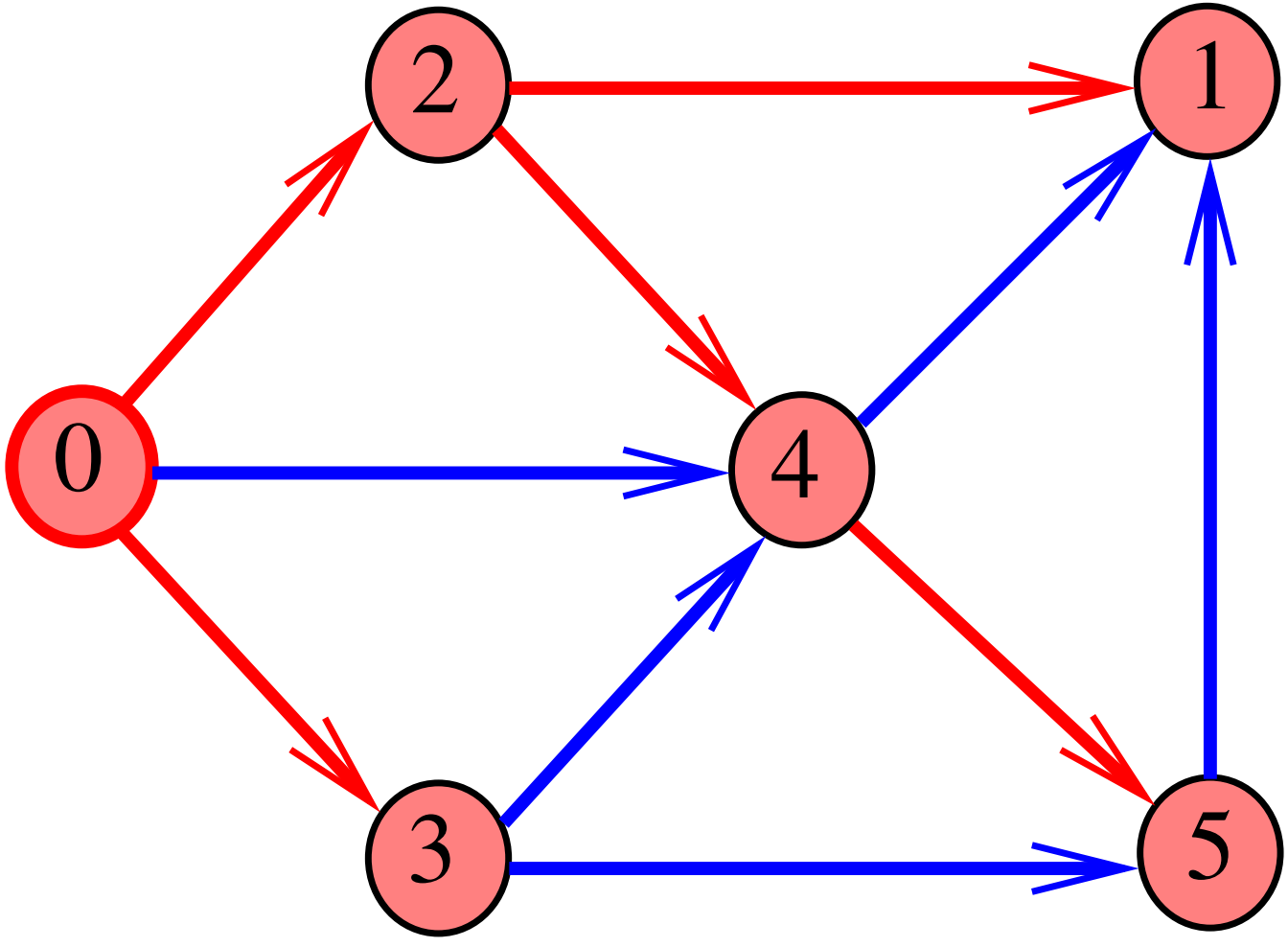
dfs(G, 0)



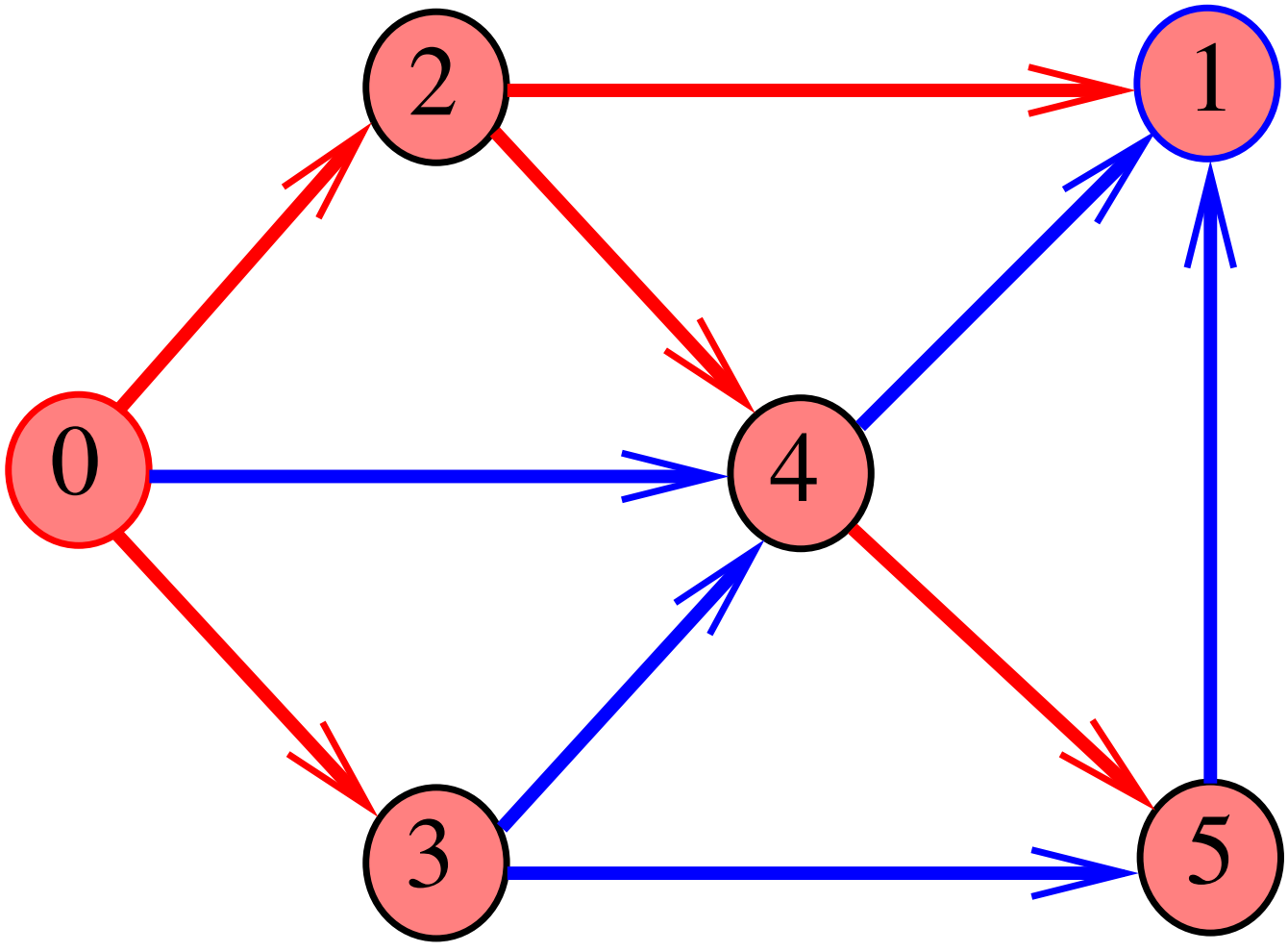
dfs(G, 0)



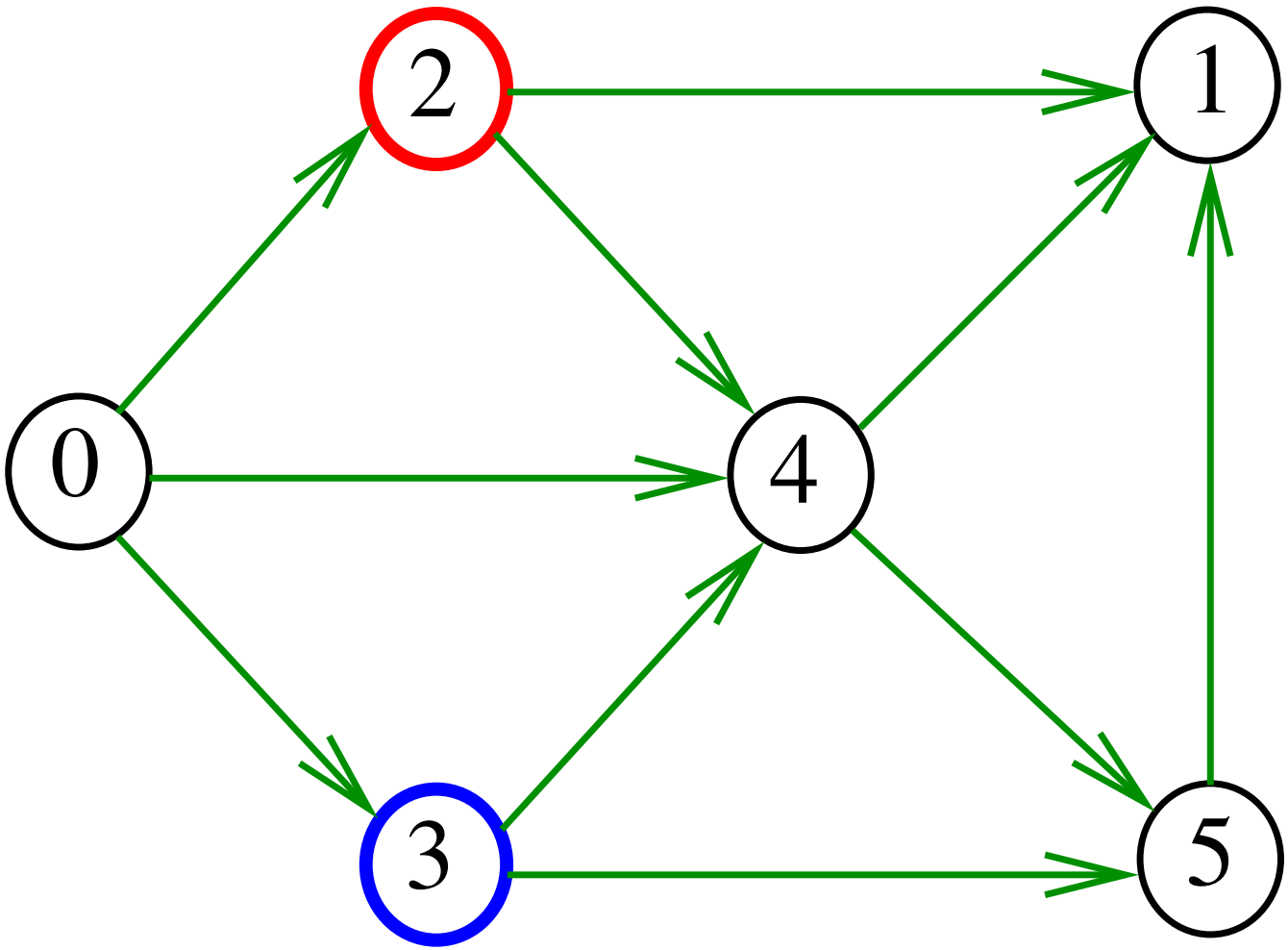
dfs(G, 0)



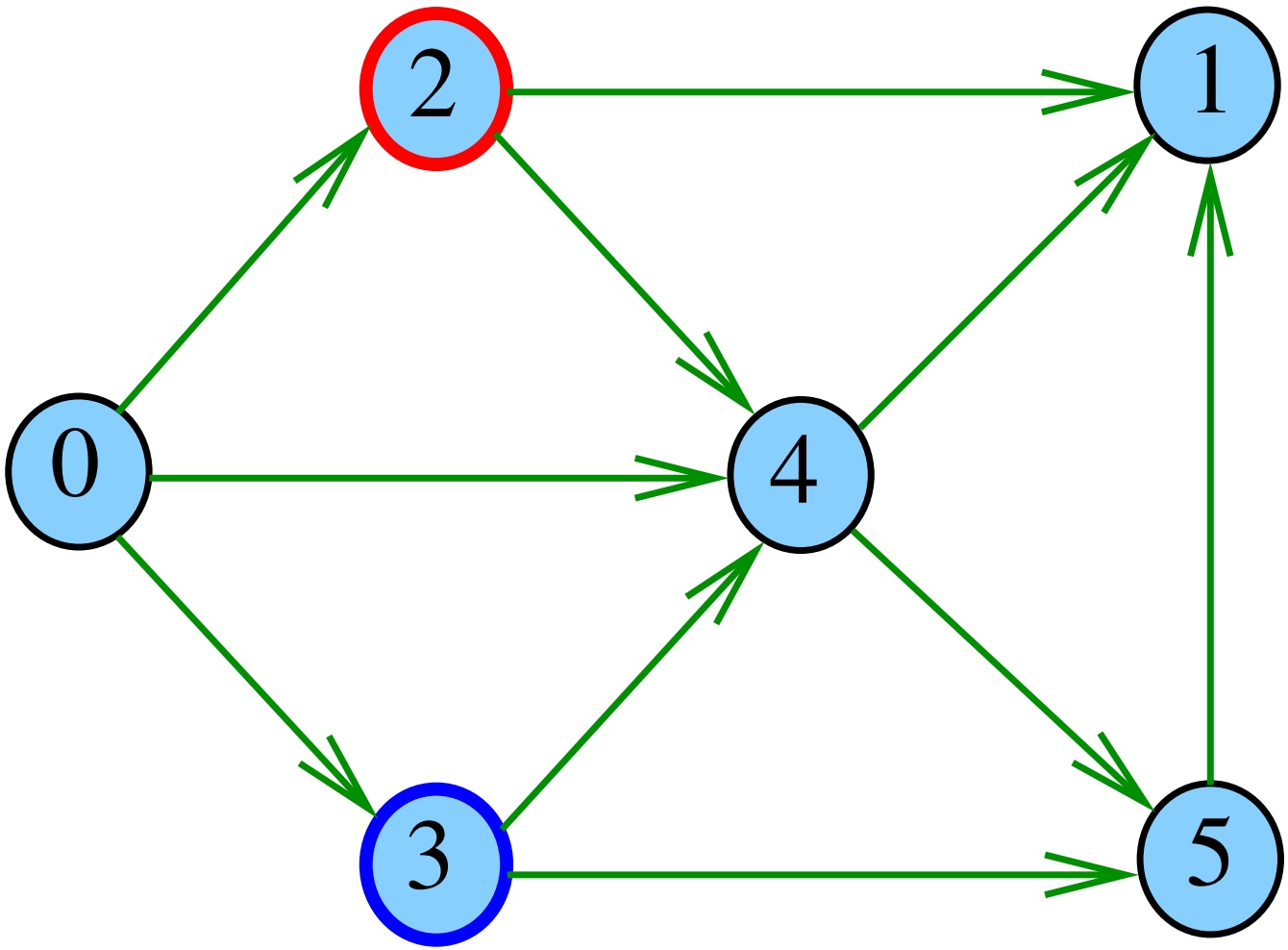
DFSpaths(G, 0)



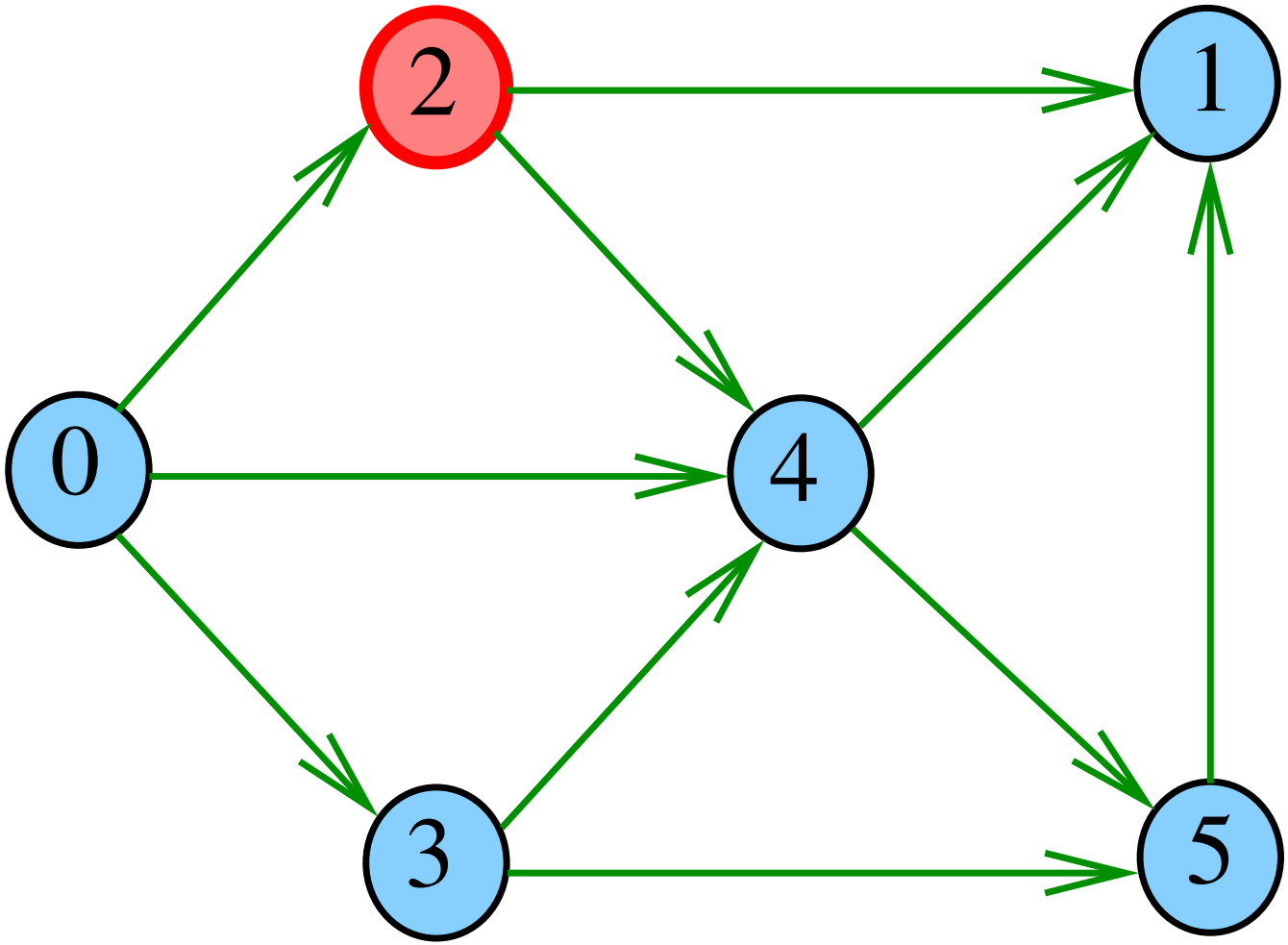
DFSpaths(G, 2)



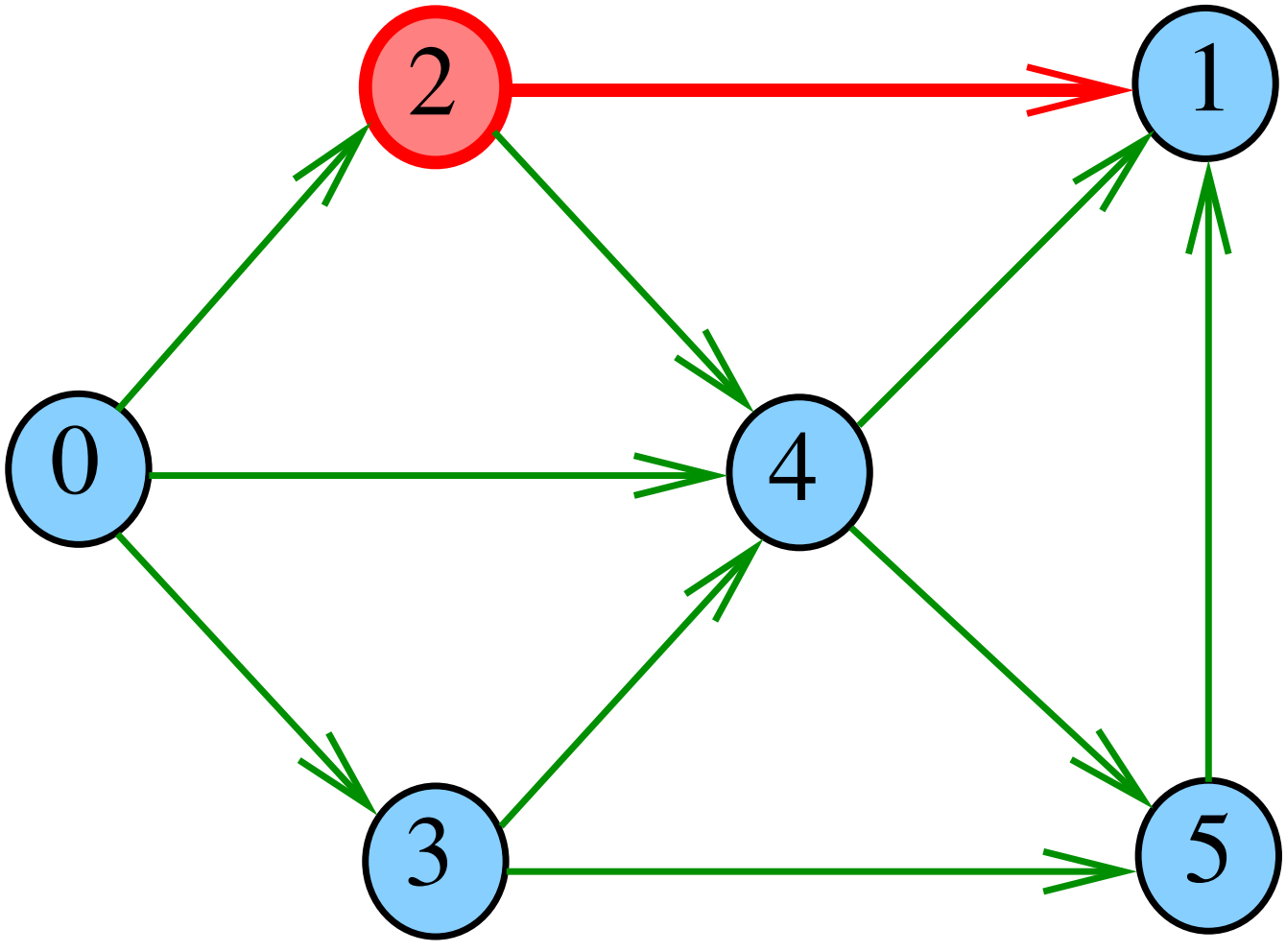
DFSpaths(G, 2)



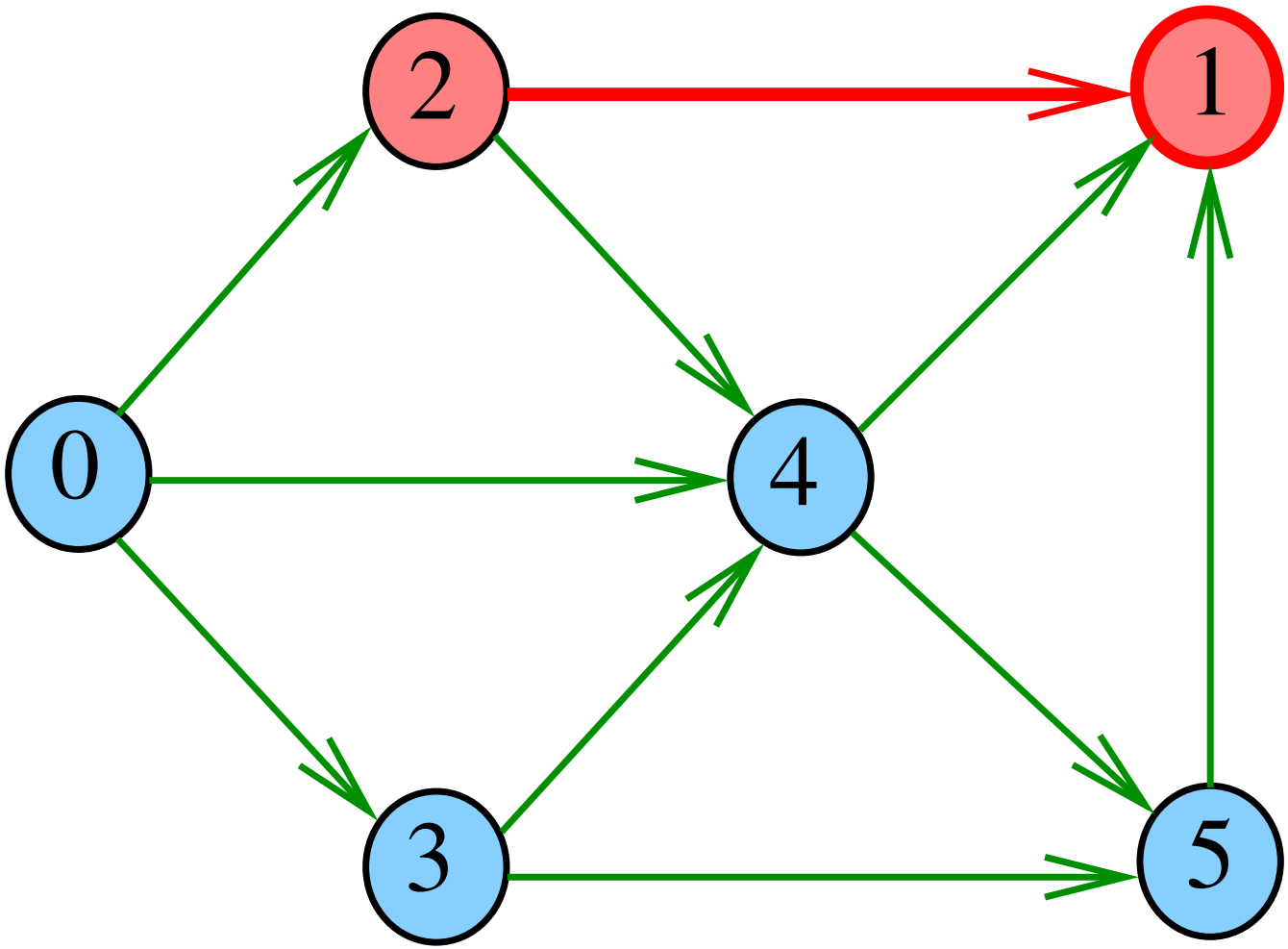
dfs(G, 2)



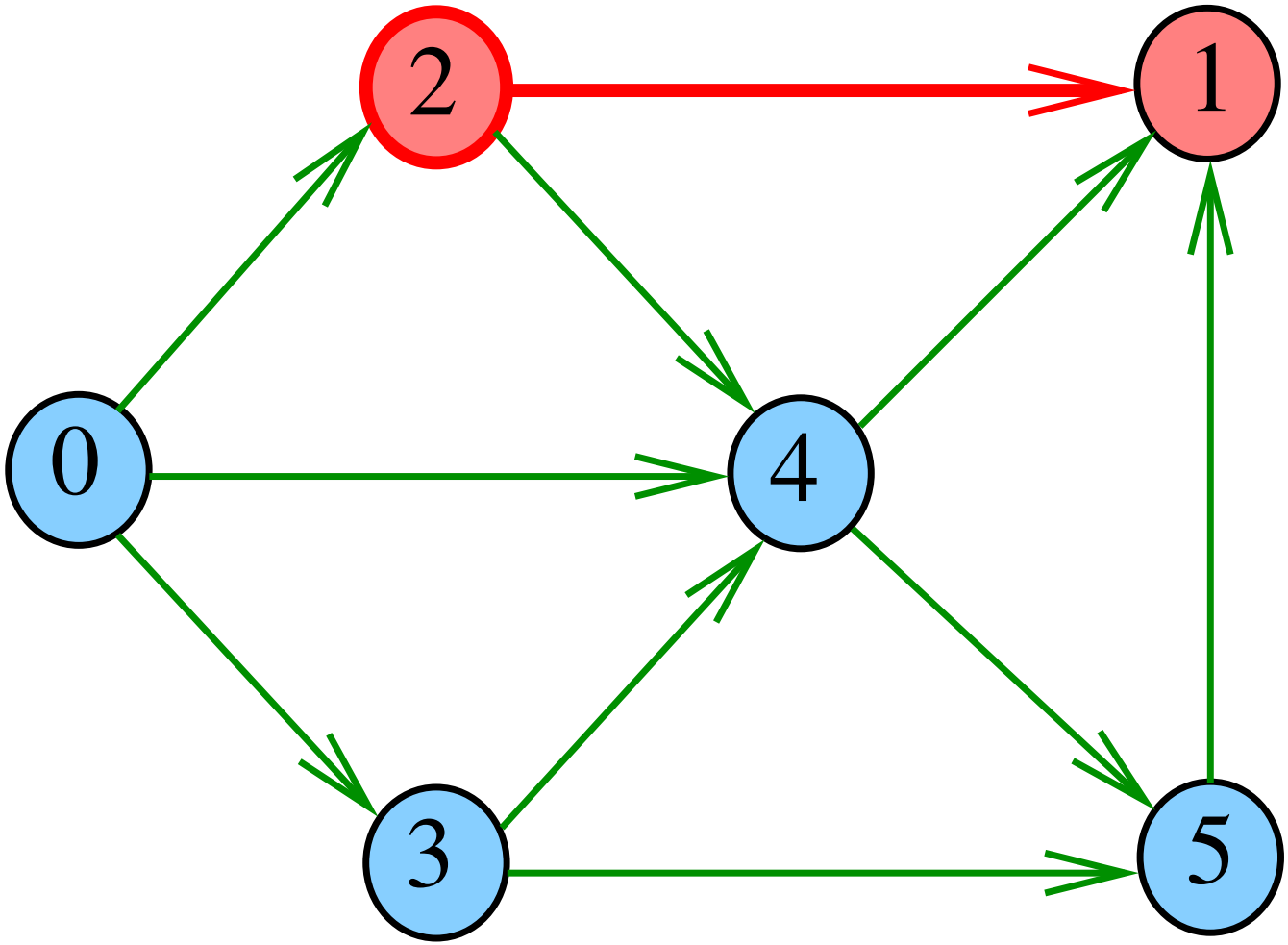
dfs(G, 2)



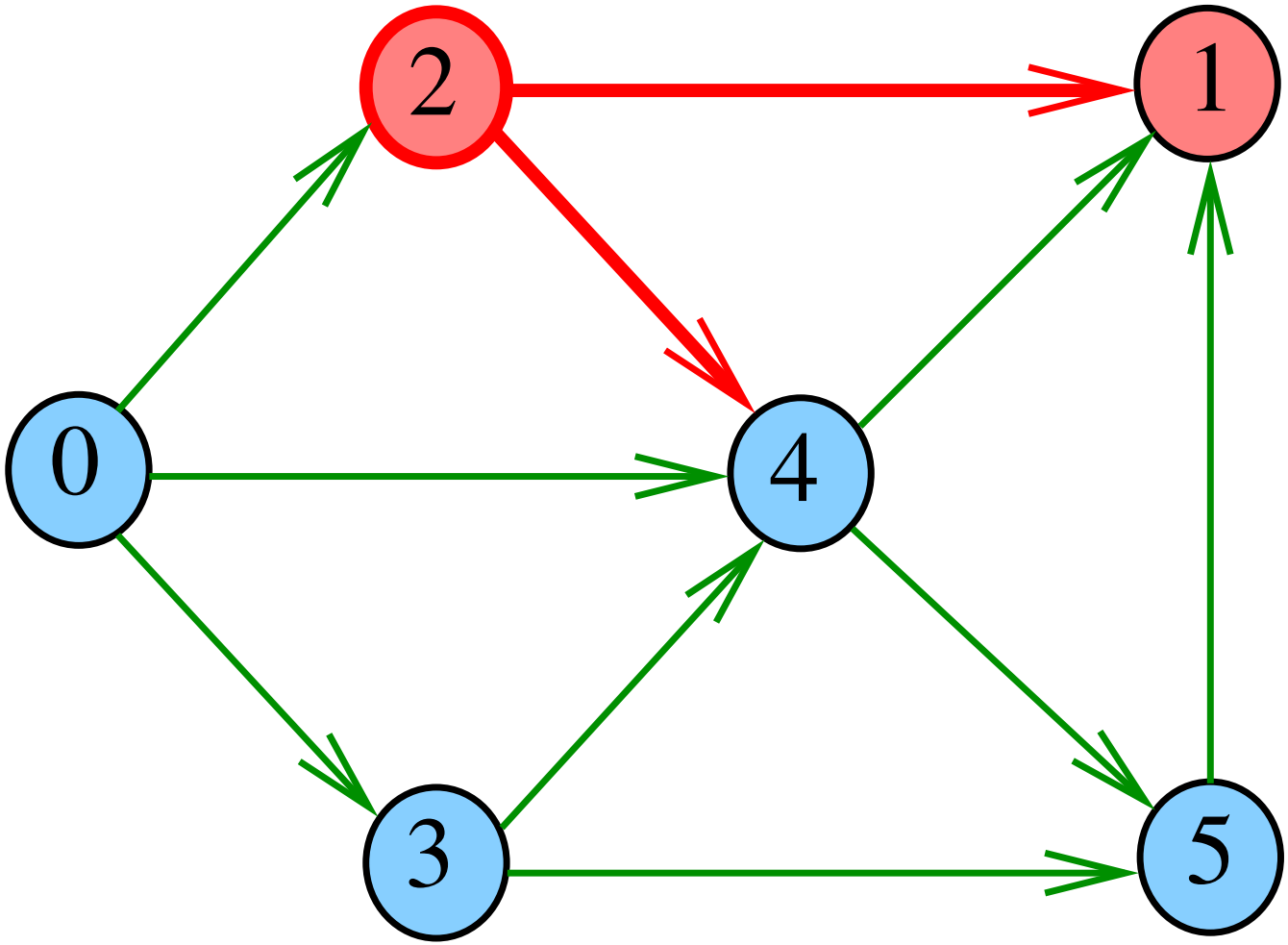
dfs(G, 1)



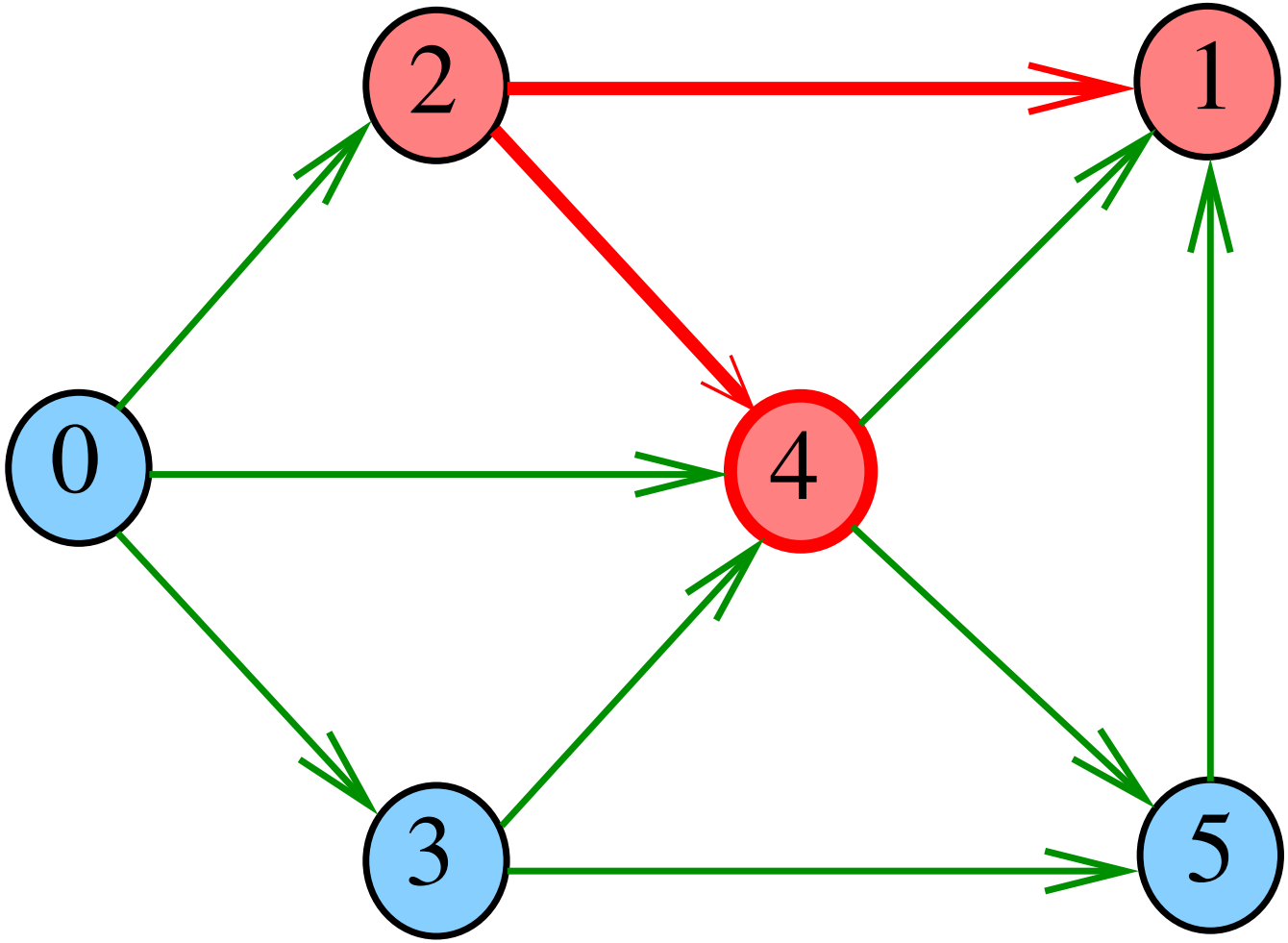
dfs(G, 2)



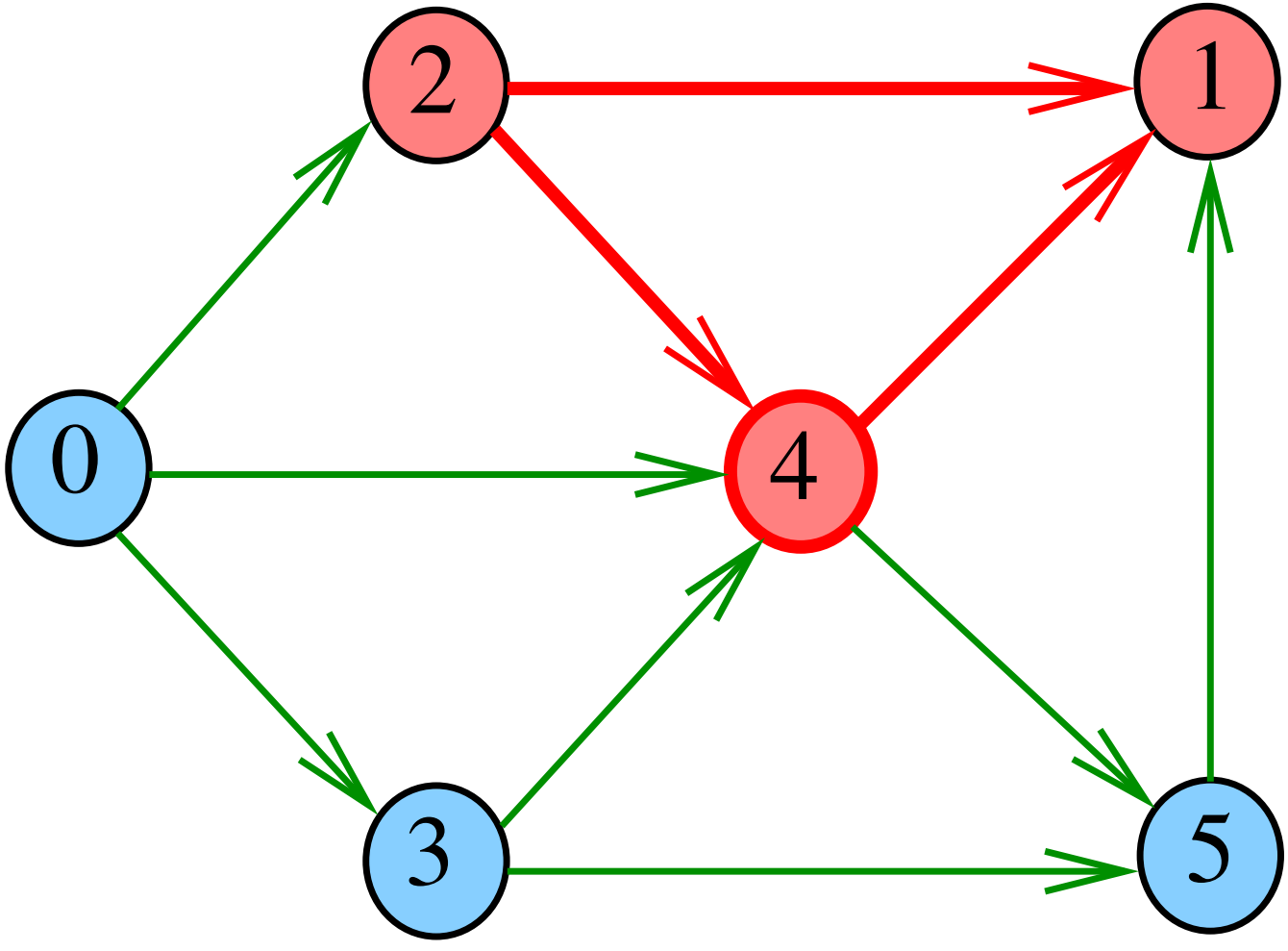
dfs(G, 2)



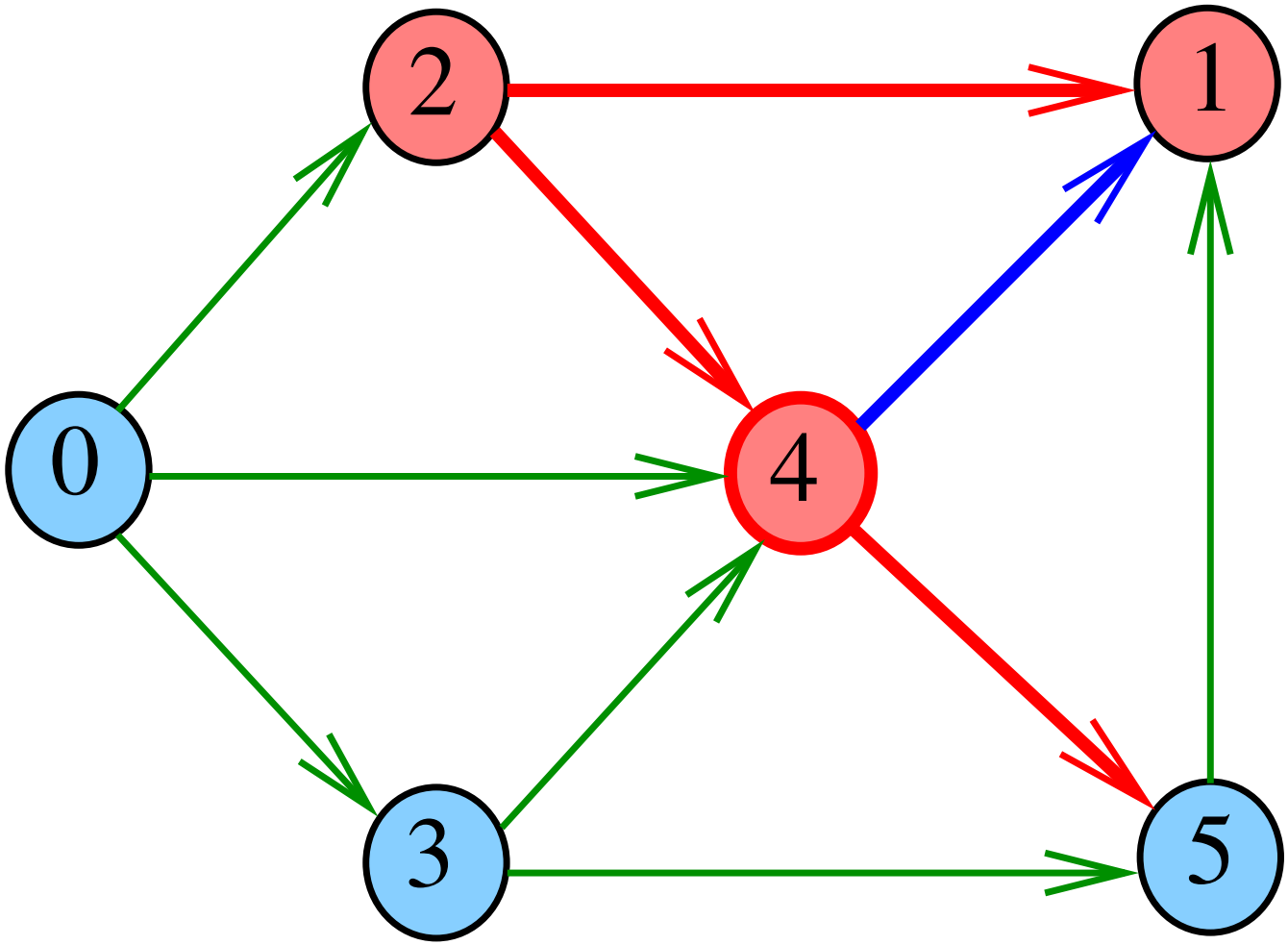
dfs(G, 4)



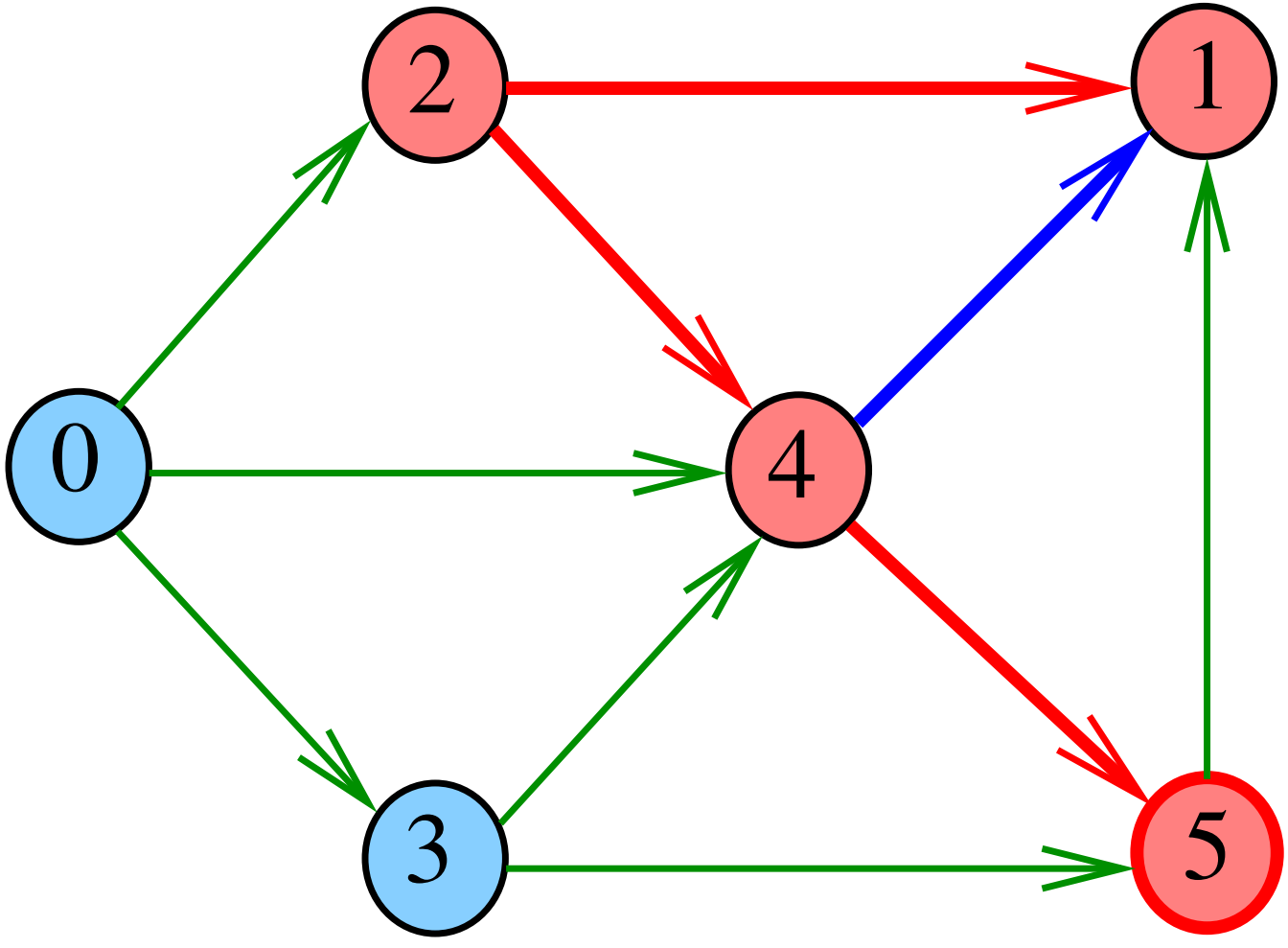
dfs(G, 4)



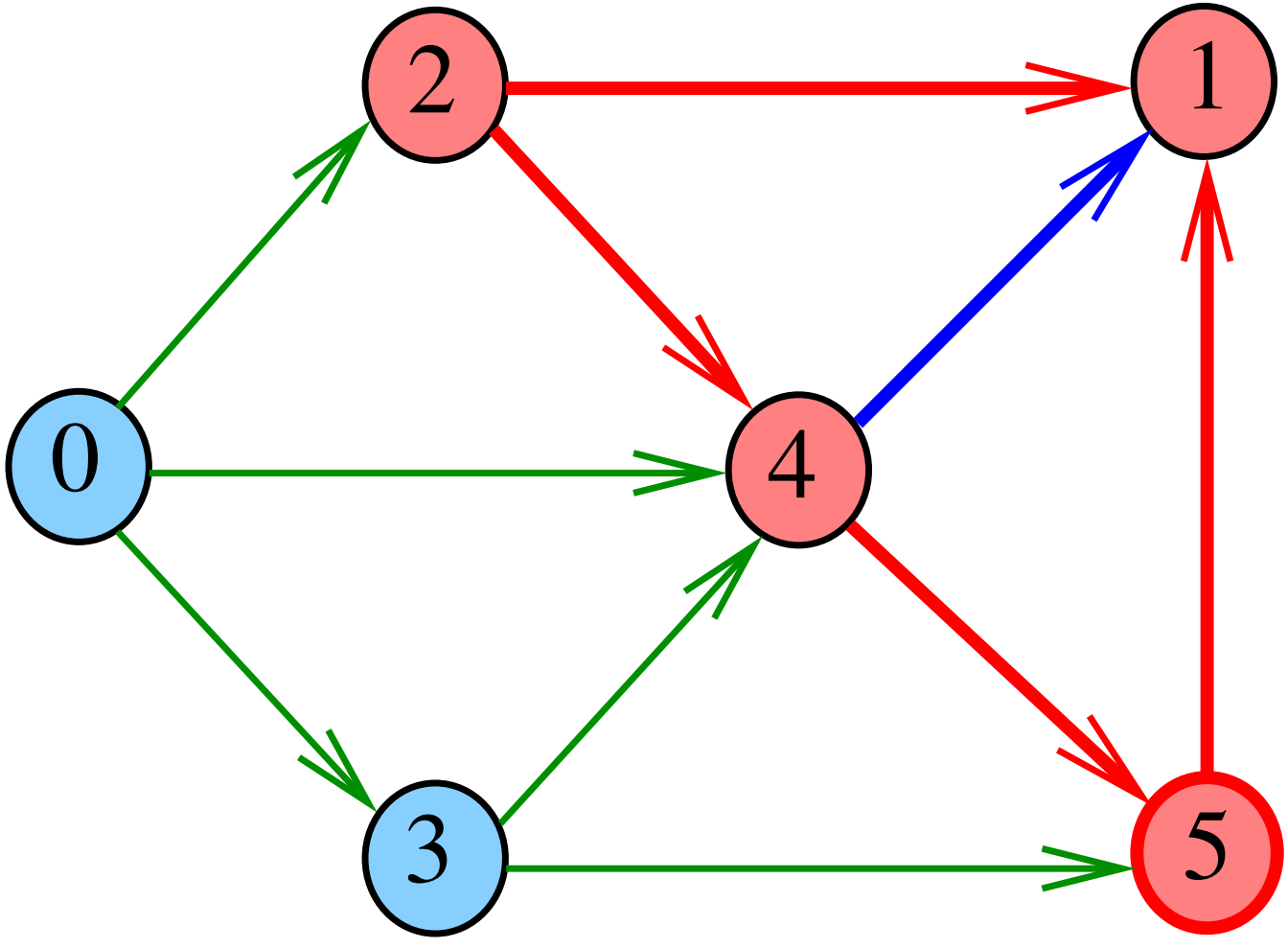
dfs(G, 4)



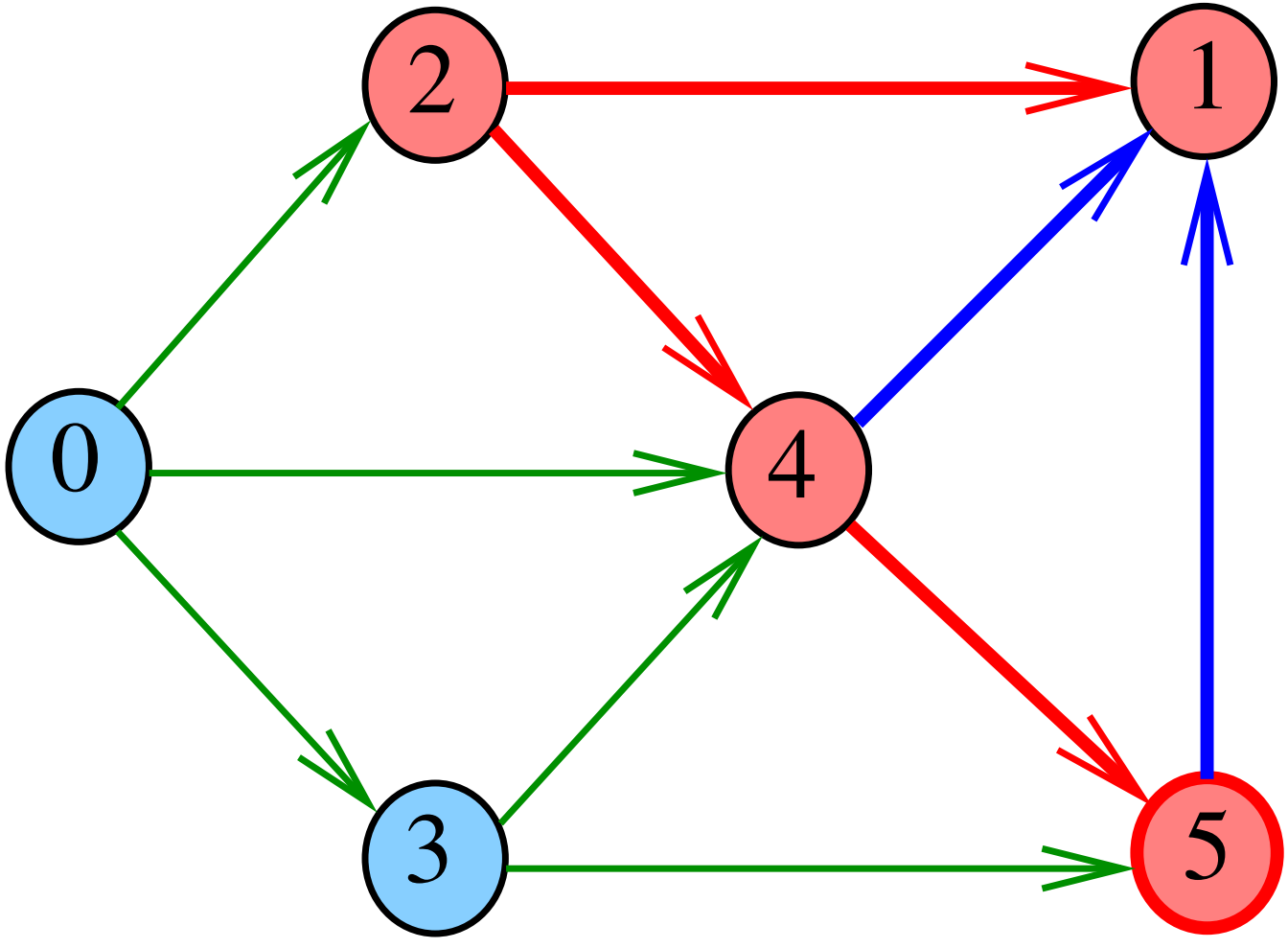
dfs(G, 5)



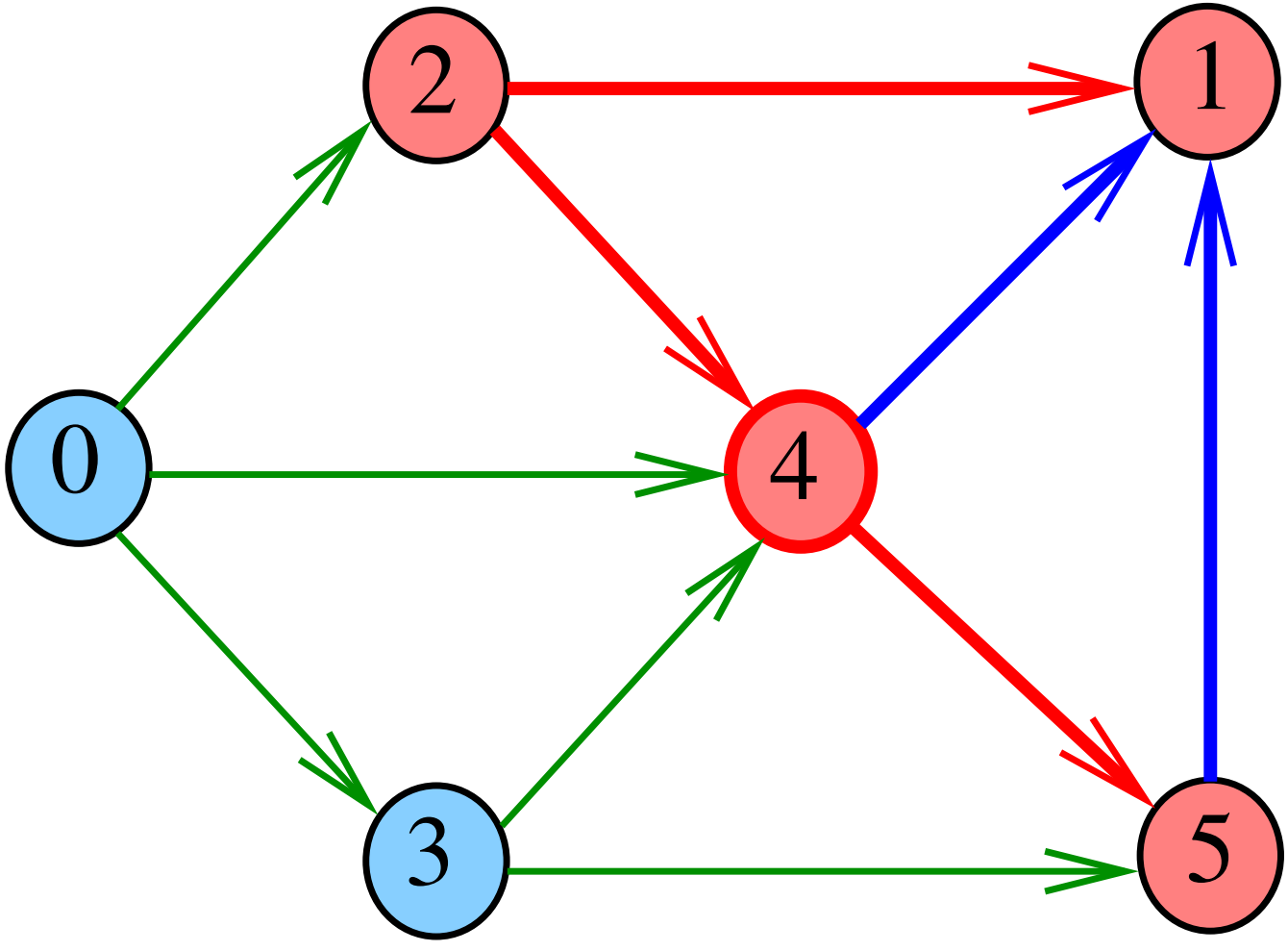
dfs(G, 5)



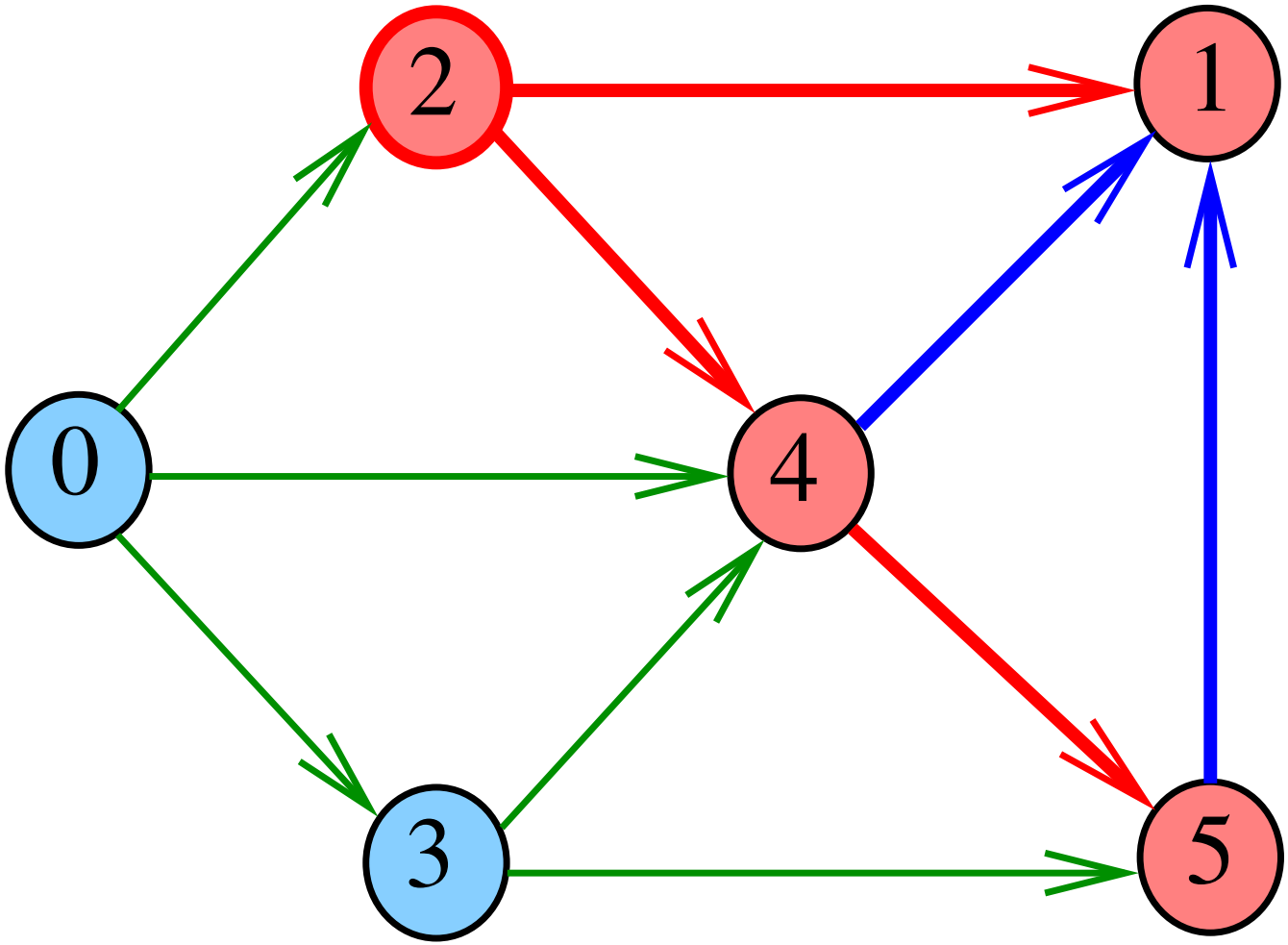
dfs(G, 5)



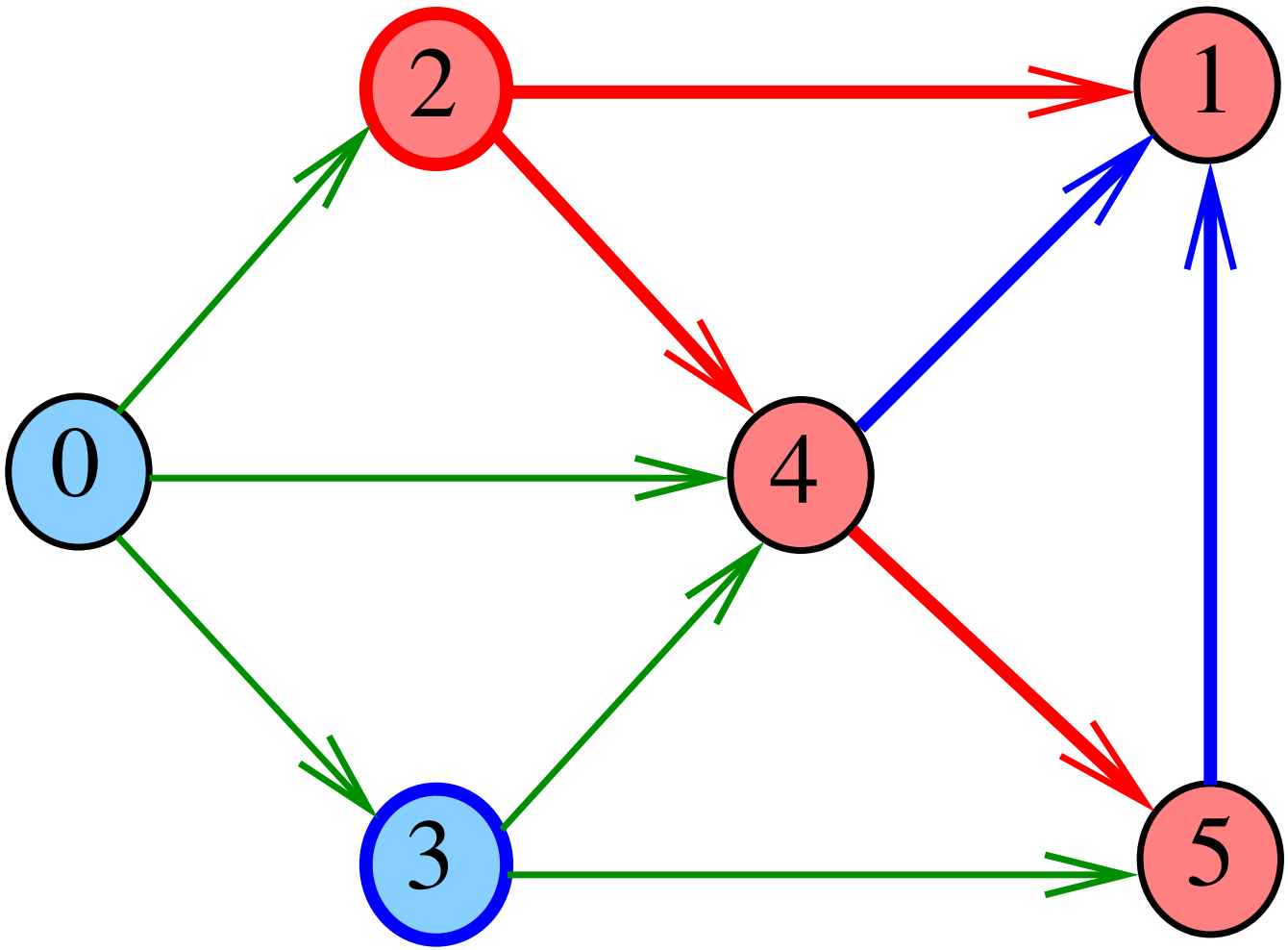
dfs(G, 4)



dfs(G, 2)



DFSpaths(G, 2)



DFSpaths

```
public class DFSpaths {
   private final int s;
   private boolean[] marked;
   public DFSpaths(Digraph G, int s) {}
   private void dfs(Digraph G, int v) {}
   public boolean hasPath(int v) {}
}
```

DFSpaths

Encontra um caminho de s a todo vértice alcançável a partir de s.

```
public DFSpaths(Digraph G, int s) {
   marked = new boolean[G.V()];
   this.s = s;
   dfs(G, s);
}
```

DFSpaths

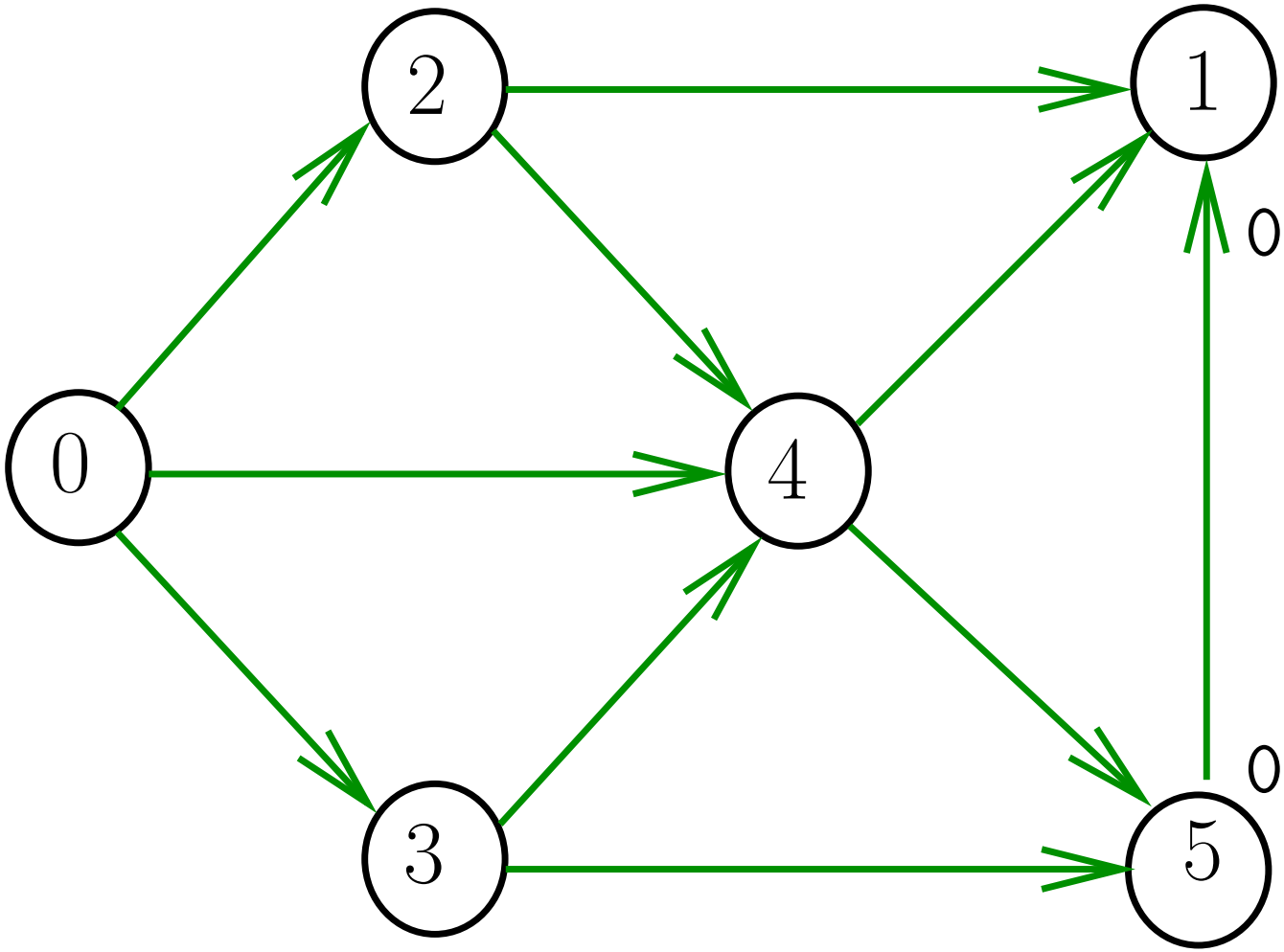
```
private void dfs(Digraph G, int v) {
   marked[v] = true;
   for (int w :  G.adj(v)) {
       if (!marked[w]) {
           dfs(G, w);
       }
   }
}
```

DFSpaths

Há um caminho de `s` a `v`?

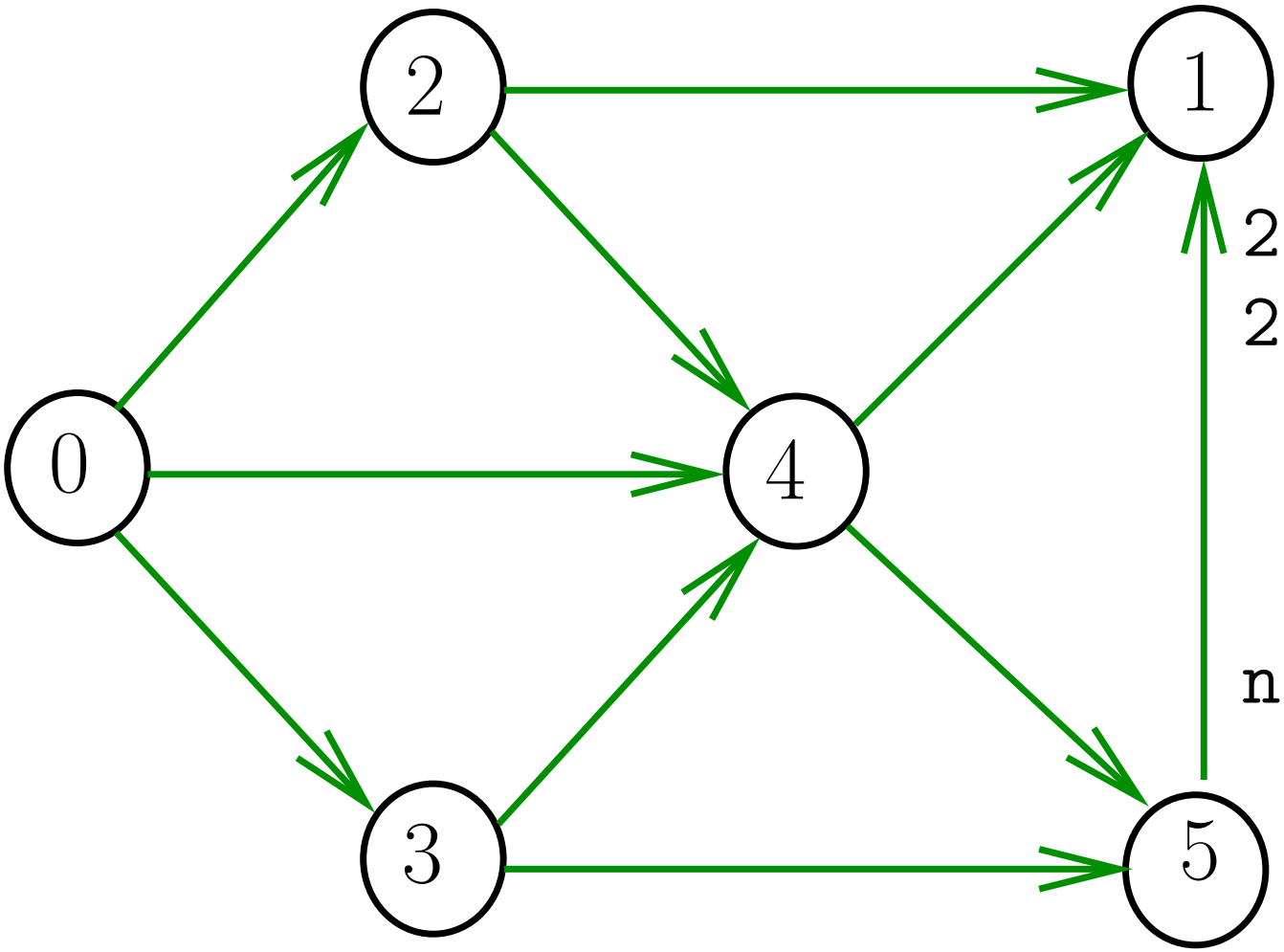
```
public boolean hasPath(int v) {
   return marked[v];
}
```

DFSpaths(G, 0)




```
0-2 dfs(G,2)
  2-1 dfs(G,1)
  2-4 dfs(G,4)
    4-1
    4-5 dfs(G,5)
      5-1
0-3 dfs(G,3)
  3-4
  3-5
0-4
existe caminho
```

DFSpaths(G, 2)




```
2-1 dfs(G,1)
2-4 dfs(G,4)
   4-1
   4-5 dfs(G,5)
      5-1
nao existe caminh
```

Consumo de tempo

Qual é o consumo de tempo de `DFSpaths`?

Consumo de tempo

Qual é o consumo de tempo de `DFSpaths`?

Qual é o consumo de tempo da função `dfs`?

Conclusão

O consumo de tempo de `DFSpaths` é $\Theta(V)$ mais o consumo de tempo da função `dfs()`.

Conclusão

O consumo de tempo da função `dfs()` para vetor de listas de adjacência é $O(V + E)$.

O consumo de tempo de `DFSpaths` para vetor de listas de adjacência é $\sim O(V + E)$.

Conclusão

O consumo de tempo da função `dfs()` para matriz de adjacências é $O(V^2)$.

O consumo de tempo de `DFSpaths` para matriz de adjacências é $O(V^2)$.

Caminhos no computador

Fonte: Tron Legacy Light Cycle Riders wallpaper

Caminhos no computador

Como representar caminhos no computador?

Caminhos no computador

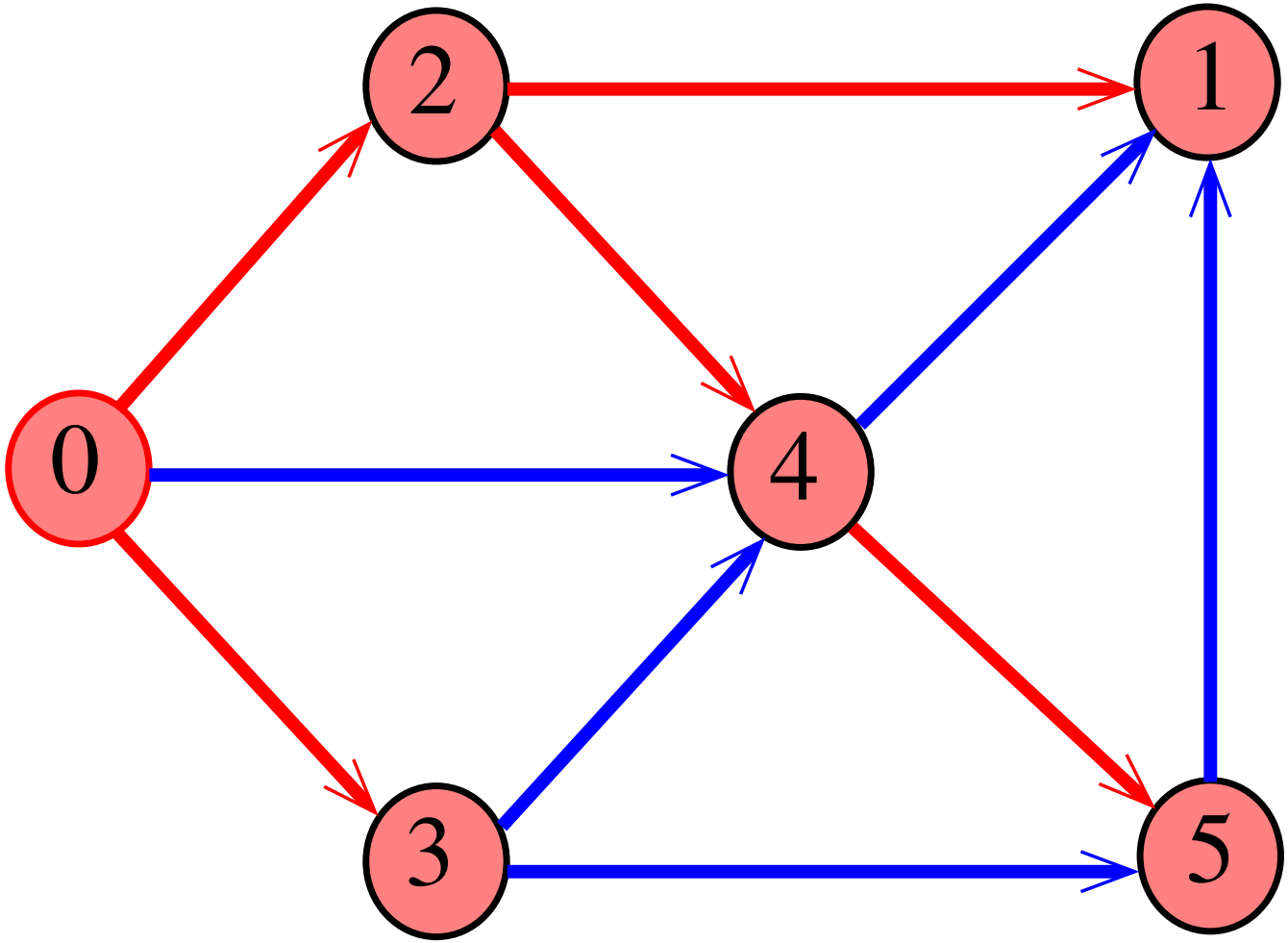
Uma maneira **compacta** de representar caminhos de um vértice a outros é uma arborescência

Uma **arborescência** é um digrafo em que

- existe exatamente um vértice com grau de entrada 0, a **raiz** da arborescência
- não existem vértices com grau de entrada maior que 1,
- cada um dos vértices é término de um caminho com origem no vértice **raiz**.

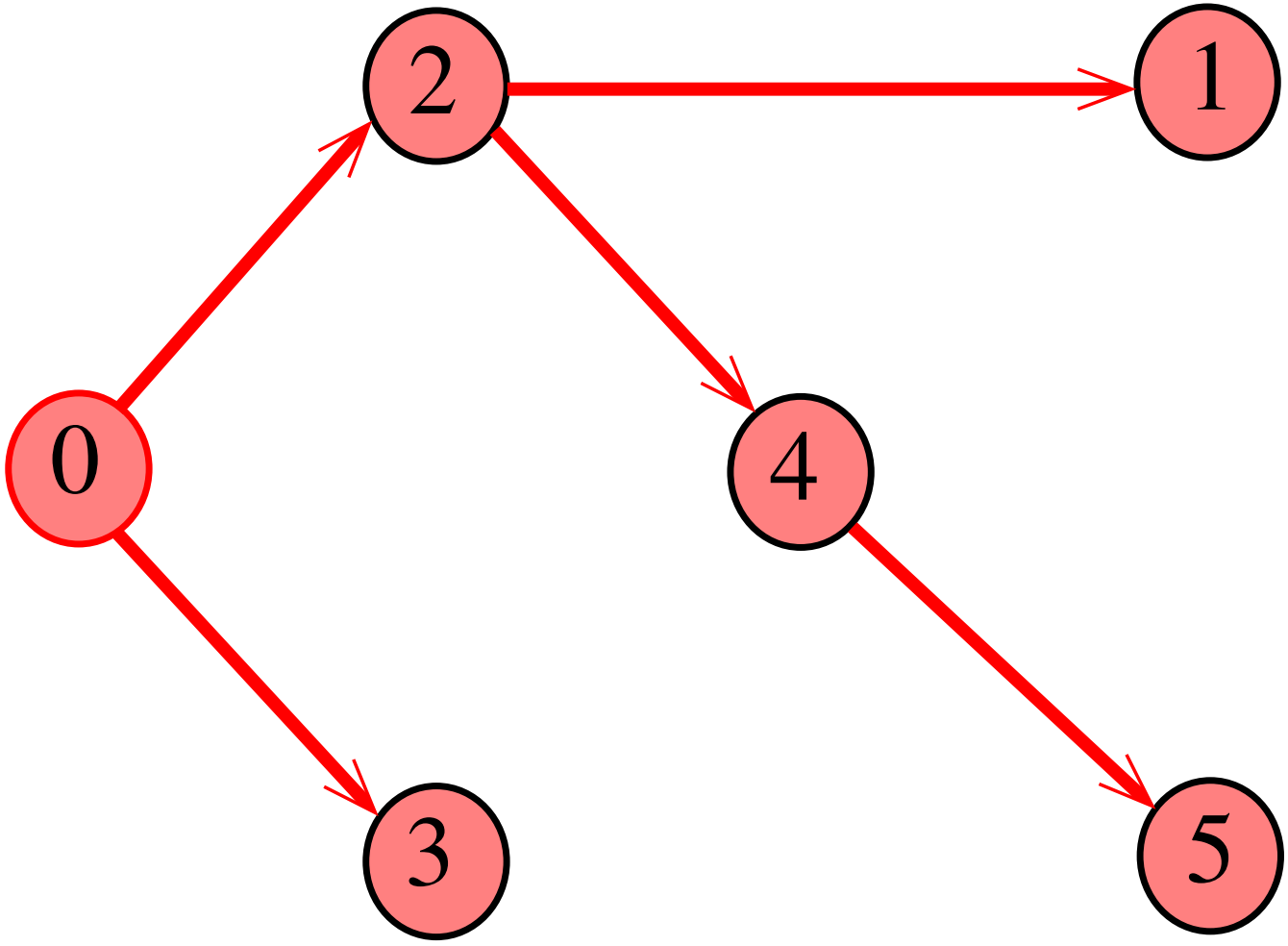
Arborescências

Exemplo: a raiz da arborescência é 0



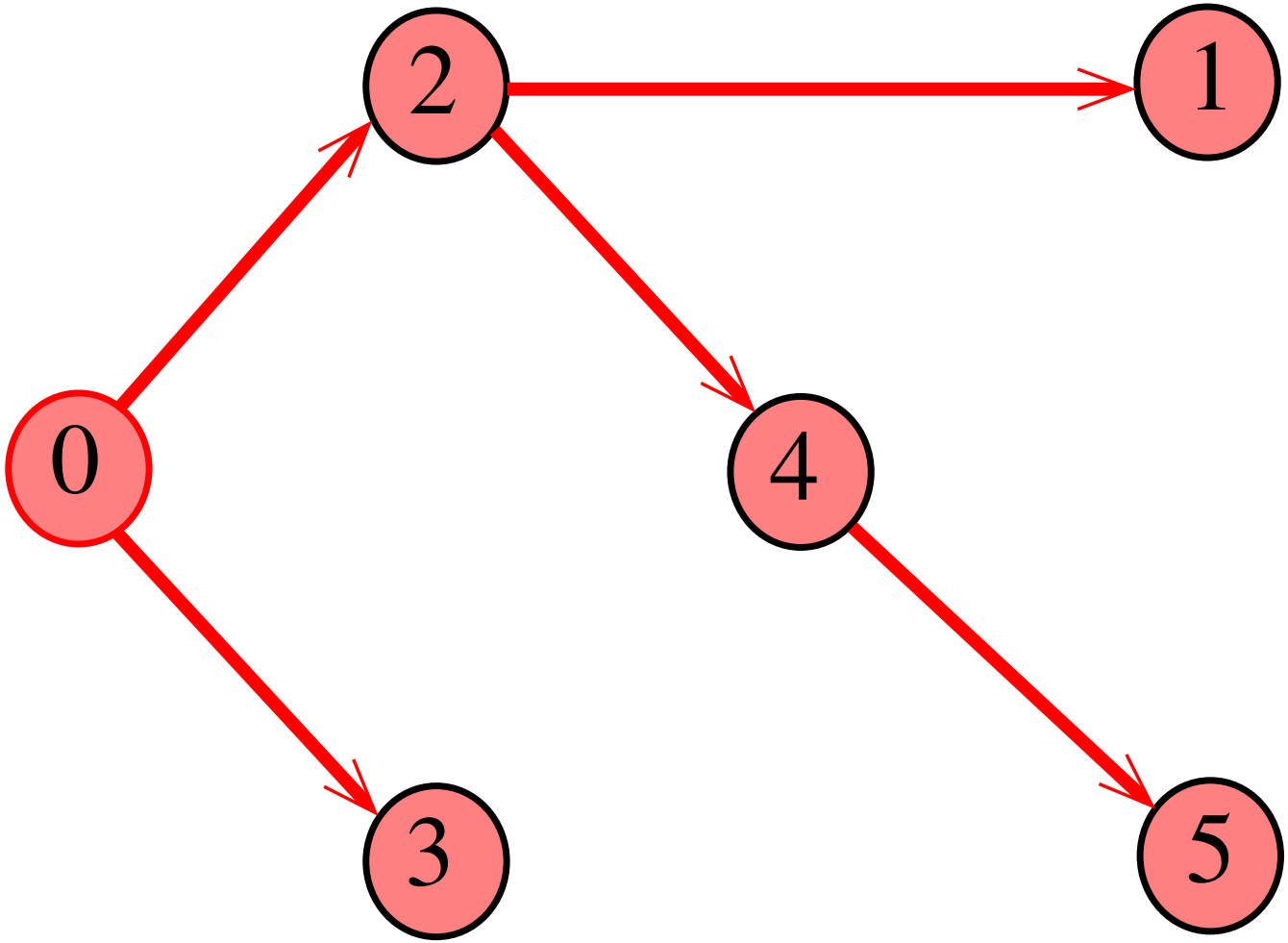
Arborescências

Exemplo: a raiz da arborescência é 0



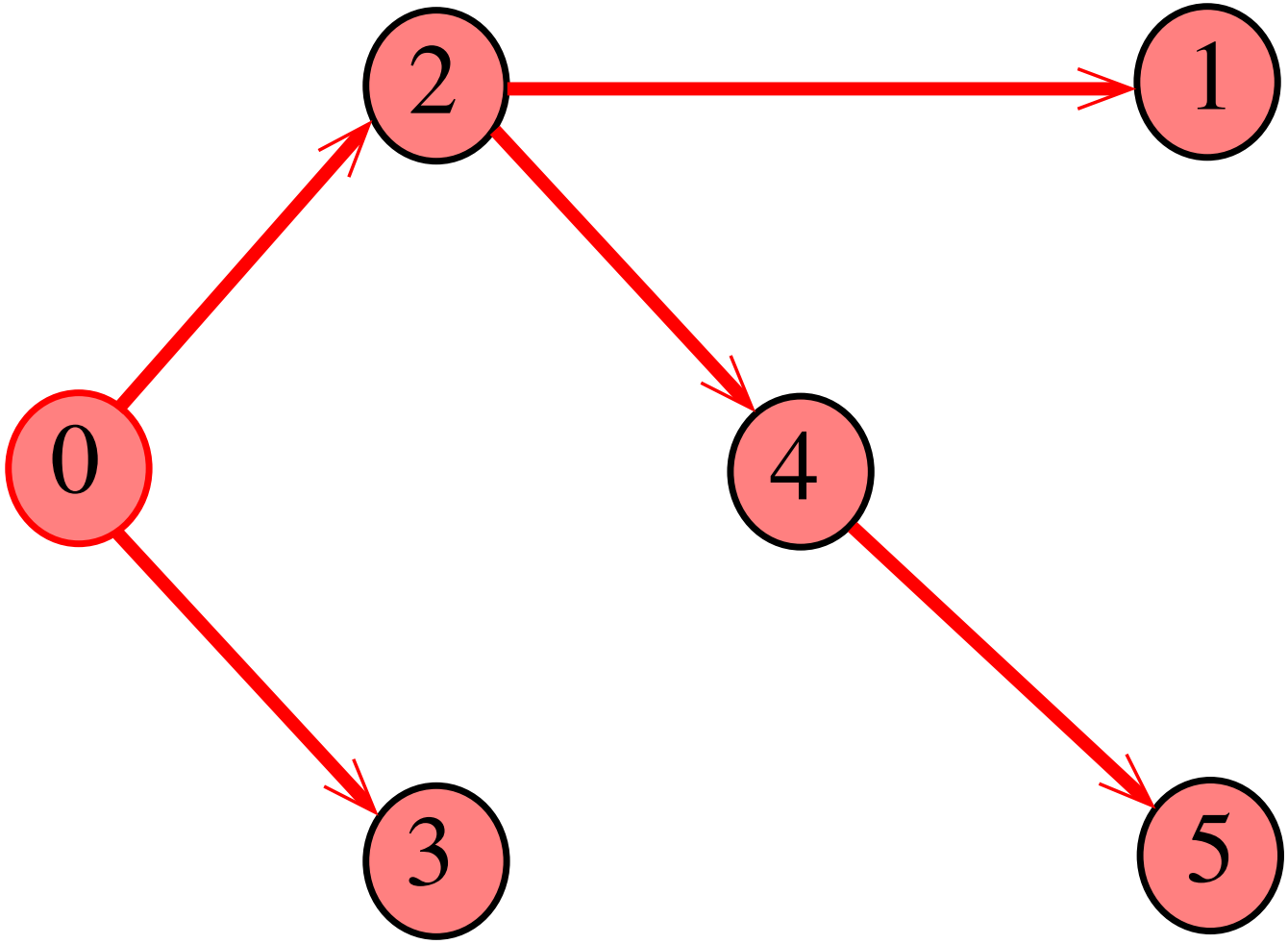
Arborescências

Propriedade: para todo vértice v, existe exatamente um caminho da raiz a v



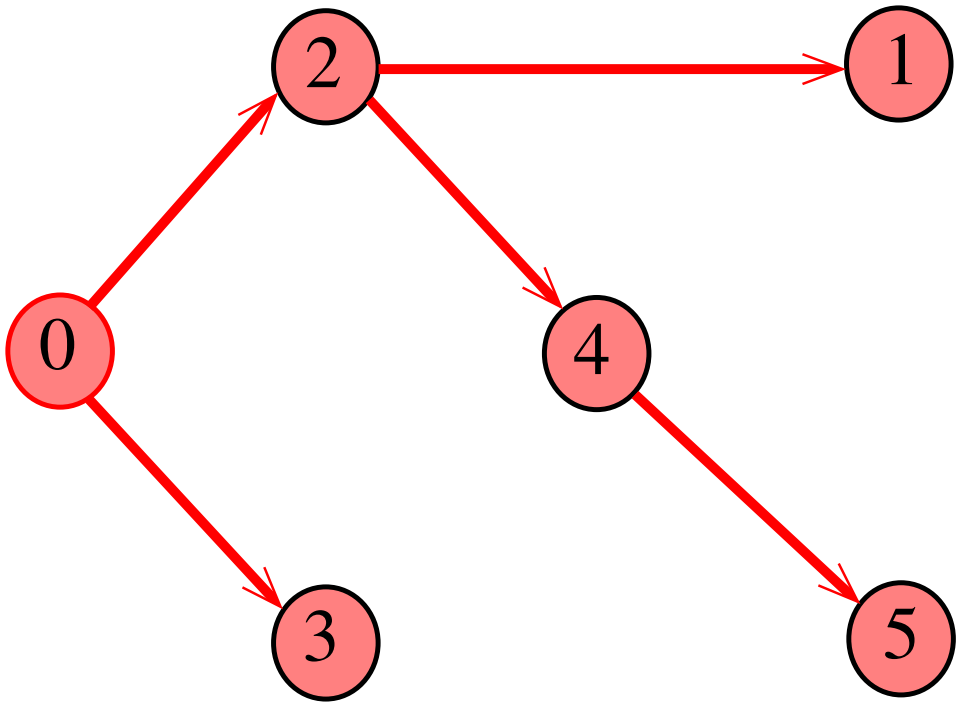
Arborescências

Todo vértice `w`, exceto a raiz, tem uma **pai:** o **único** vértice `v` tal que `v-w` é um arco



Arborescências no computador

Um arborescência pode ser representada através de um **vetor de pais**: `edgeTo[w]` é o pai de `w`
Se `r` é a raiz, então `edgeTo[r]=r`



vértice	edgeTo
0	0
1	2
2	0
3	0
4	2
5	4

Caminho

Dado o vetor de pais, `edgeTo`, de uma arborescência, é fácil determinar o caminho que leva da raiz a um dado vértice `v`: basta inverter a sequência impressa pelo seguinte fragmento de código:

Caminho

Dado o vetor de pais, edgeTo, de uma arborescência, é fácil determinar o caminho que leva da raiz a um dado vértice v: basta inverter a sequência impressa pelo seguinte fragmento de código:

```
for (int x=v; edgeTo[x]!=x; x=edgeTo[x])
   StdOut.printf("%d-", x);
StdOut.printf("%d", x);
```

DFSpaths: esqueleto

```
public class DFSpaths {
   private final int s;
   private boolean[] marked;
   private int[] edgeTo;
   public DFSpaths(Digraph G, int s) {}
   private void dfs(Digraph G, int v) {}
   public boolean hasPath(int v) {}
   public Iterable<Integer> pathTo(int v)
}
```

DFSpaths: construtor

Encontra um caminho de s a todo vértice alcançável a partir de s.

```
public DFSpaths(Digraph G, int s) {
   marked = new boolean[G.V()];
   edgeTo = new int[G.V()];
   this.s = s;
   dfs(G, s);
}
```

DFSpaths: dfs()

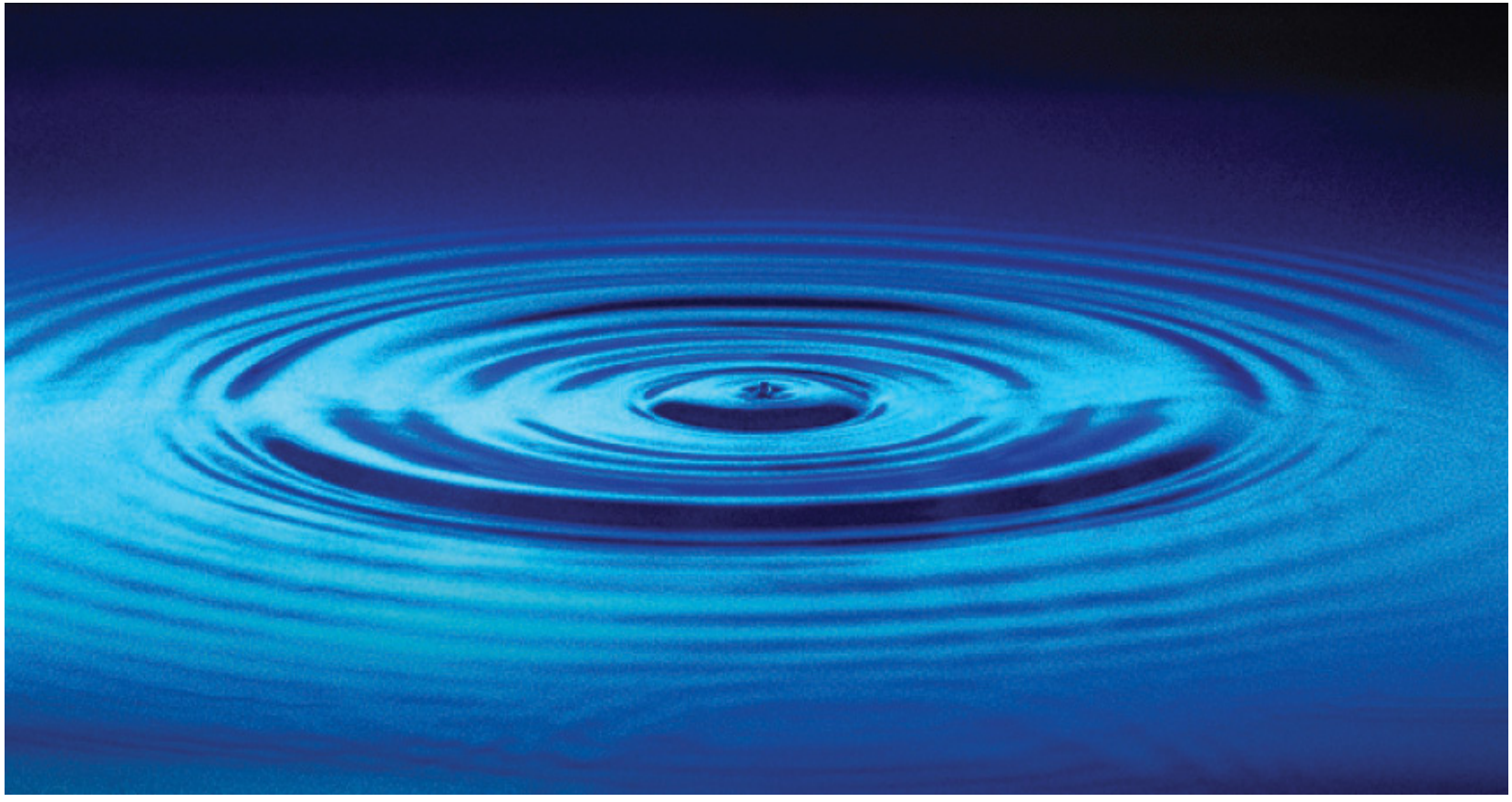
```
private void dfs(Digraph G, int v) {
   marked[v] = true;
   for (int w :  G.adj(v)) {
       if (!marked[w]) {
           edgeTo[w] = v;
           dfs(G, w);
       }
   }
}
```

DFSpaths: pathTo()

Retorna um caminho de s a v ou null se um tal caminho não existe.

```
public Iterable<Integer> pathTo(int v) {
   if (!hasPath(v)) return null;
   Stack<Integer> path =
           new Stack<Integer>();
   for (int x = v; x != s; x = edgeTo[x])
       path.push(x);
   path.push(s);
   return path;
}
```

Busca em largura



Fonte: http://catalog.flatworldknowledge.com/bookhub/

Busca ou varredura

Um algoritimo de **busca** (ou **varredura**) examina, sistematicamente, os vértices e os arcos de um digrafo.

Cada arco é examinado **uma só vez**.
Depois de visitar sua ponta inicial o algoritmo percorre o arco e visita sua ponta final.

Busca em largura

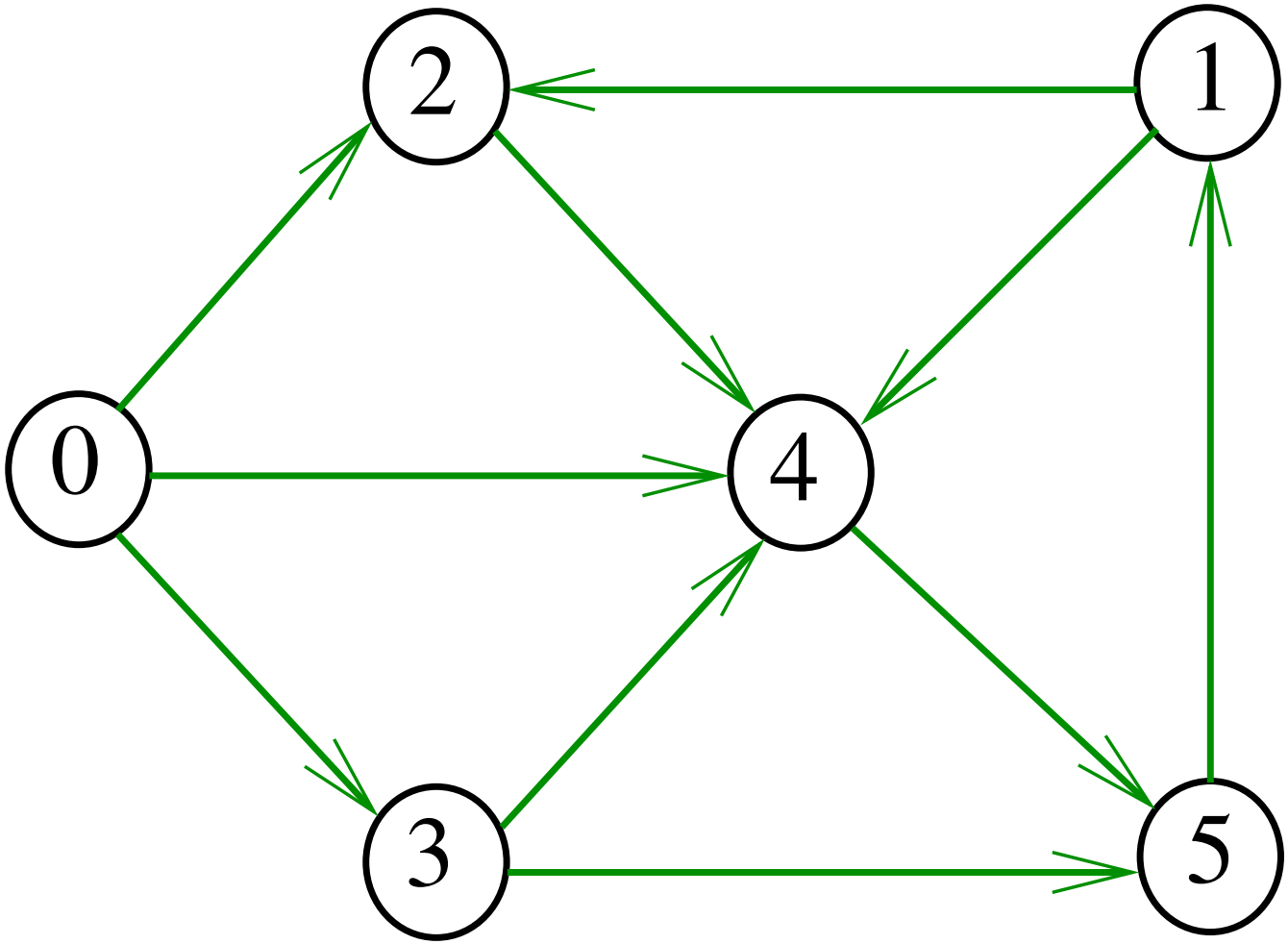
A **busca em largura** (=*breadth-first search search* = *BFS*) começa por um vértice, digamos `s`, especificado pelo usuário.

O algoritmo

> *visita* `s`,
> *depois visita vértices à distância 1 de* `s`,
> *depois visita vértices à distância 2 de* `s`,
> *depois visita vértices à distância 3 de* `s`,
> *e assim por diante*

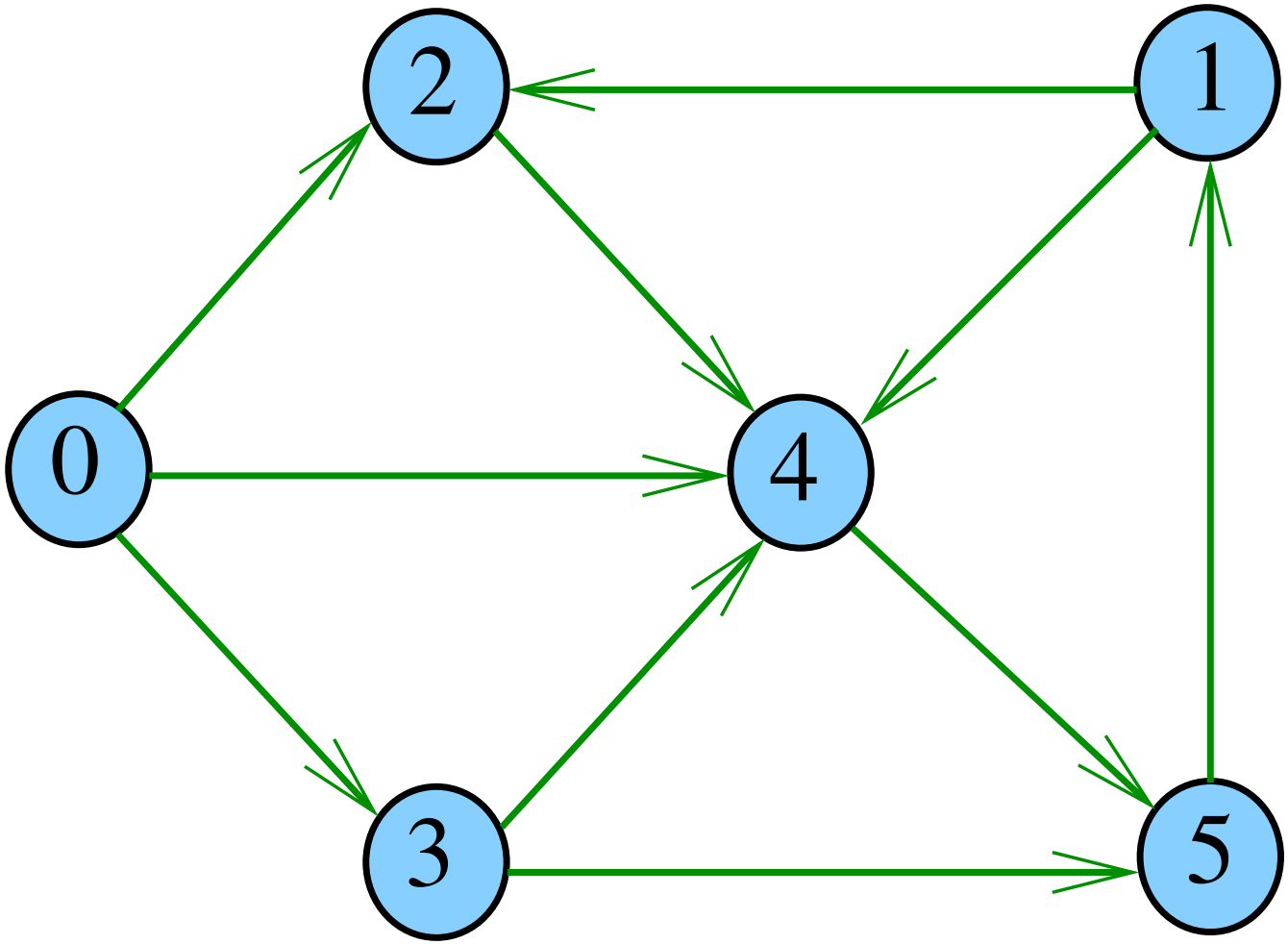
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]						



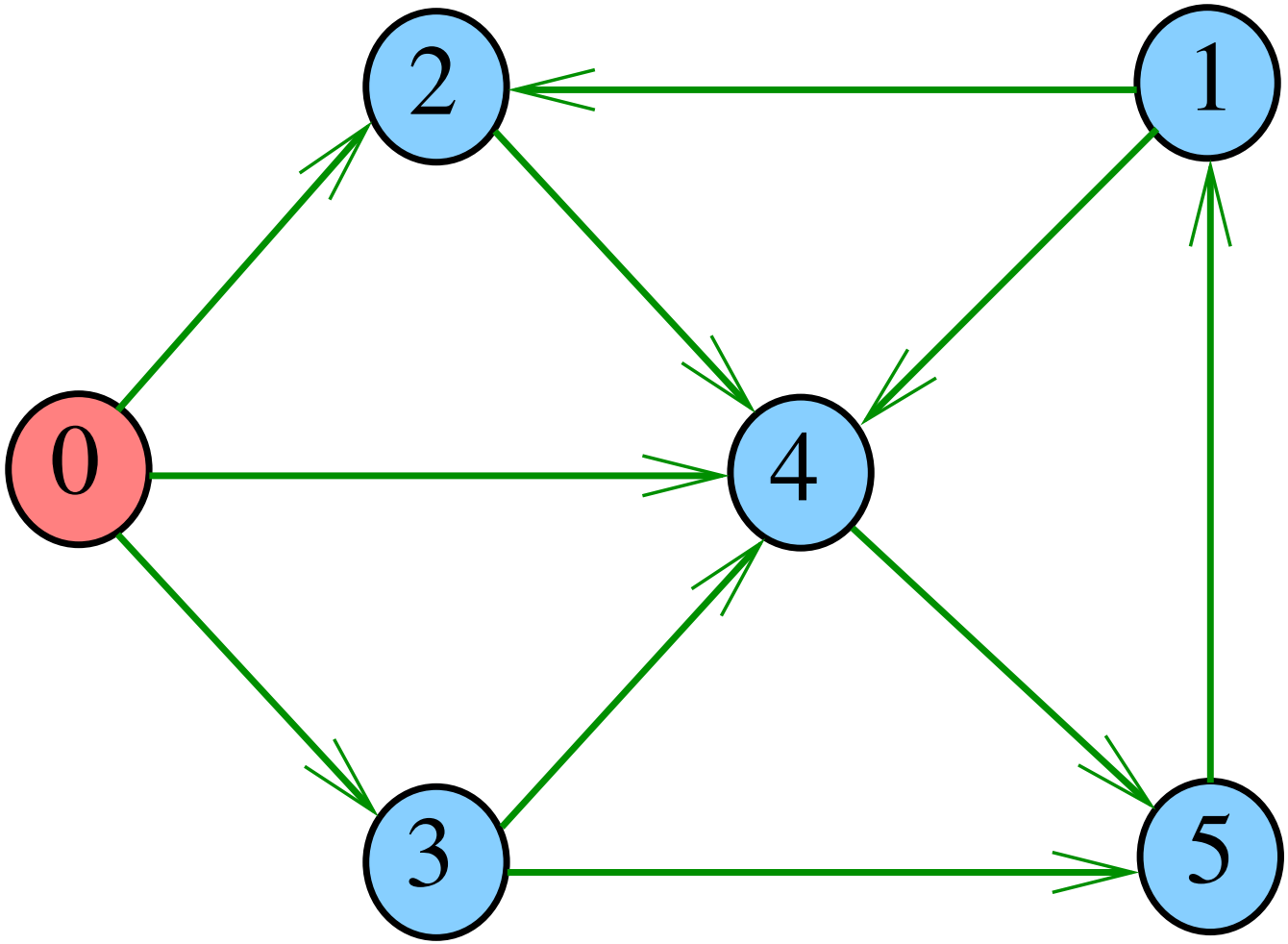
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]						



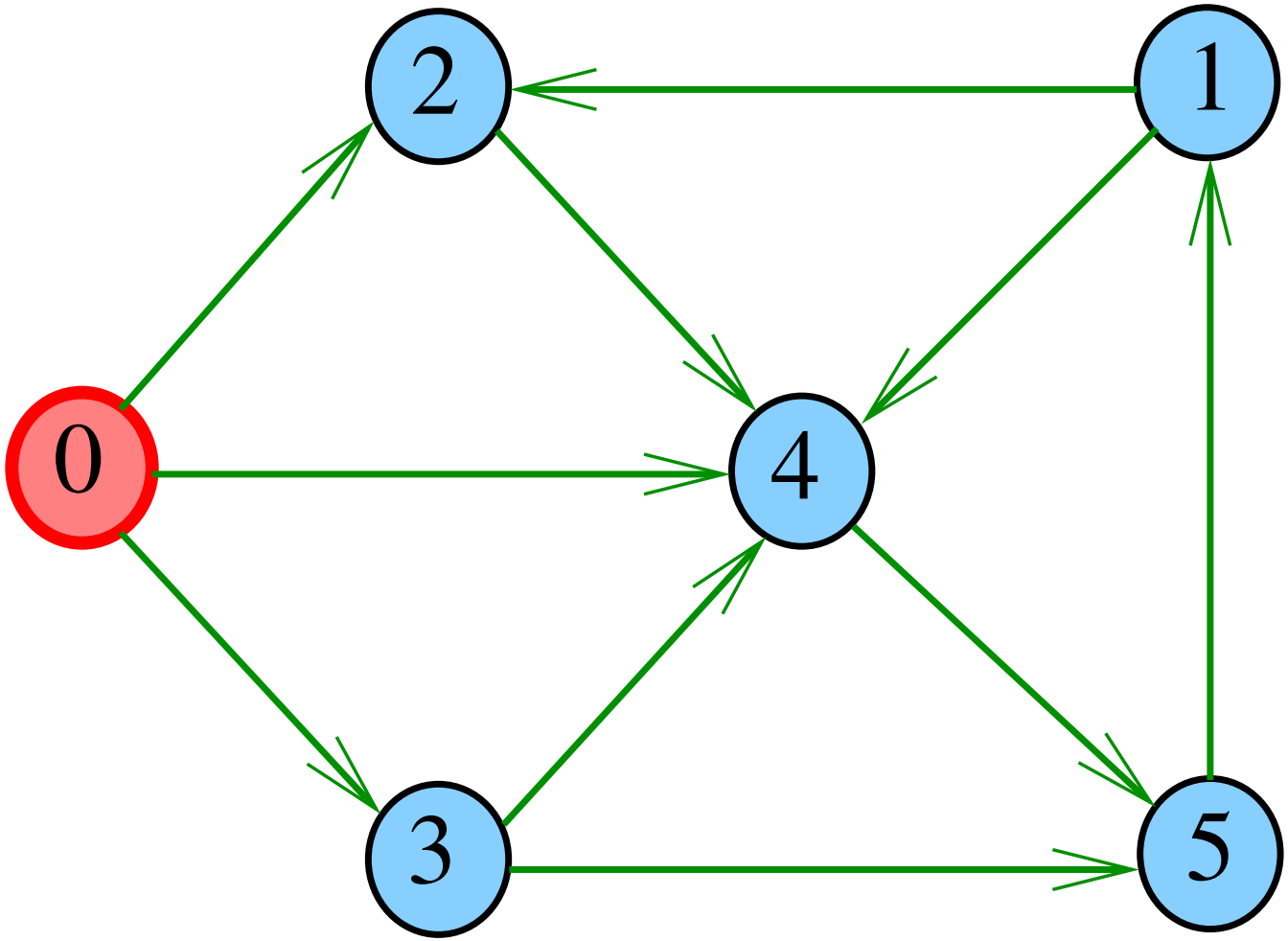
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0					



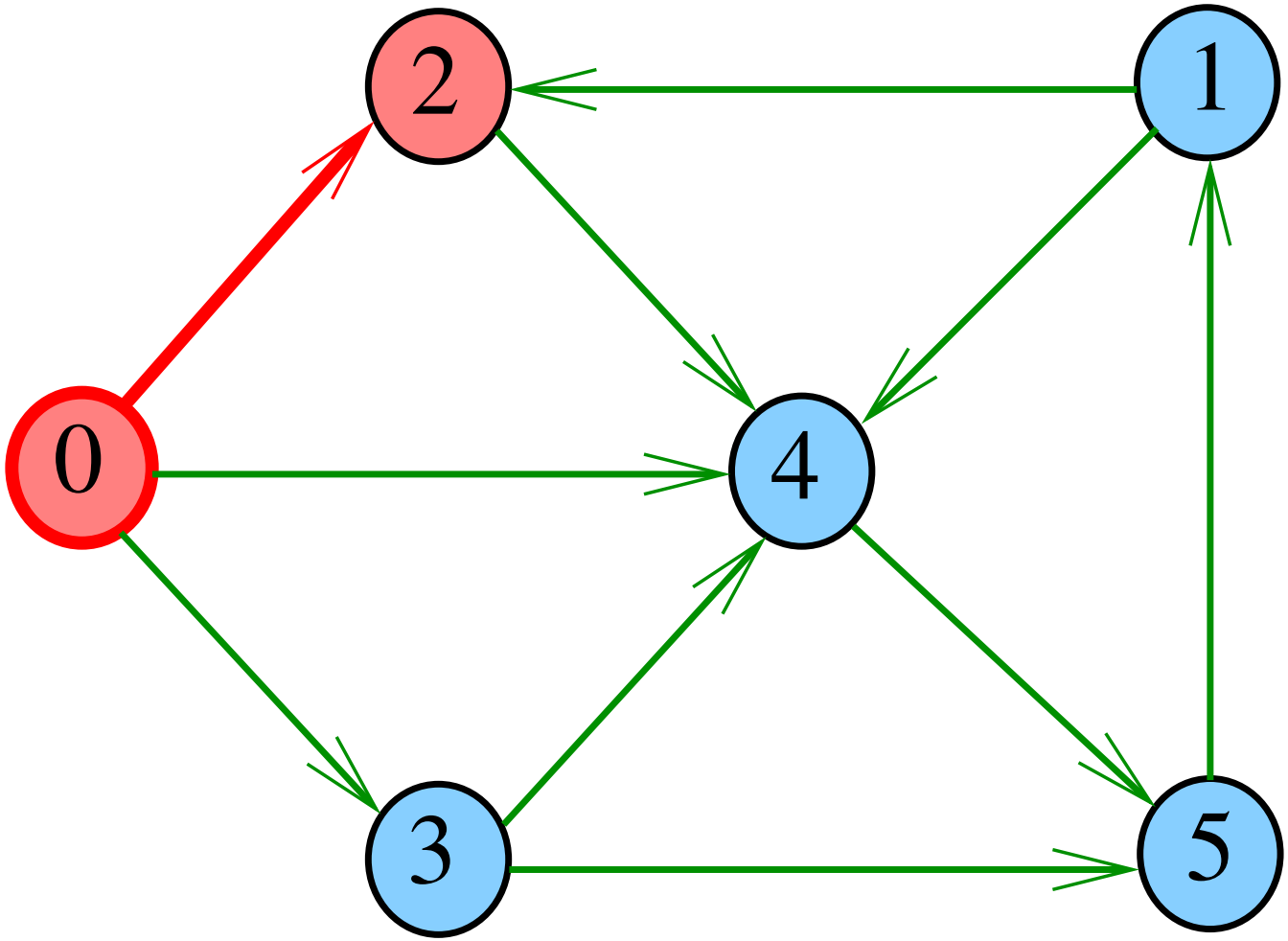
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	**0**					



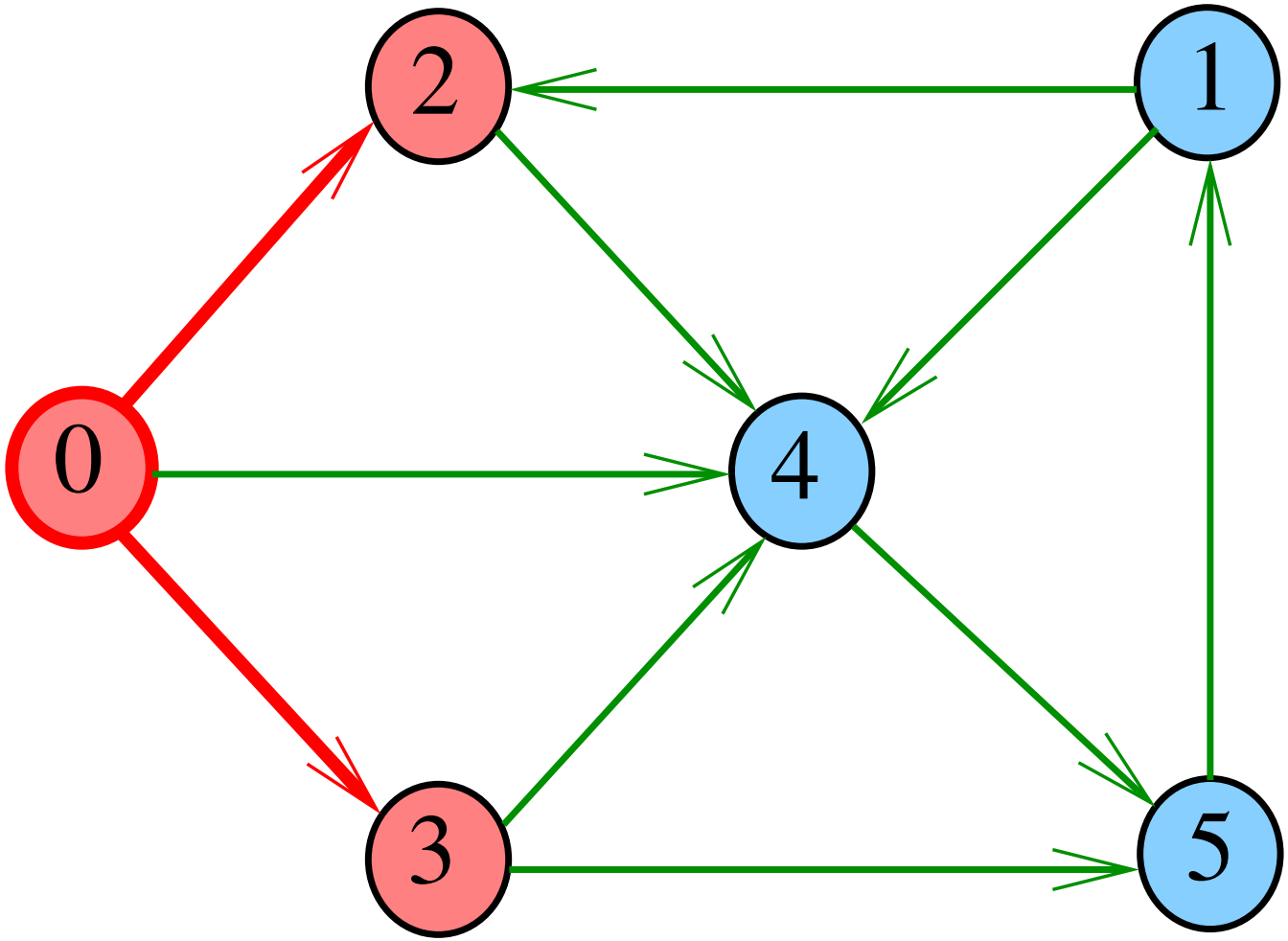
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	**0**	**2**				



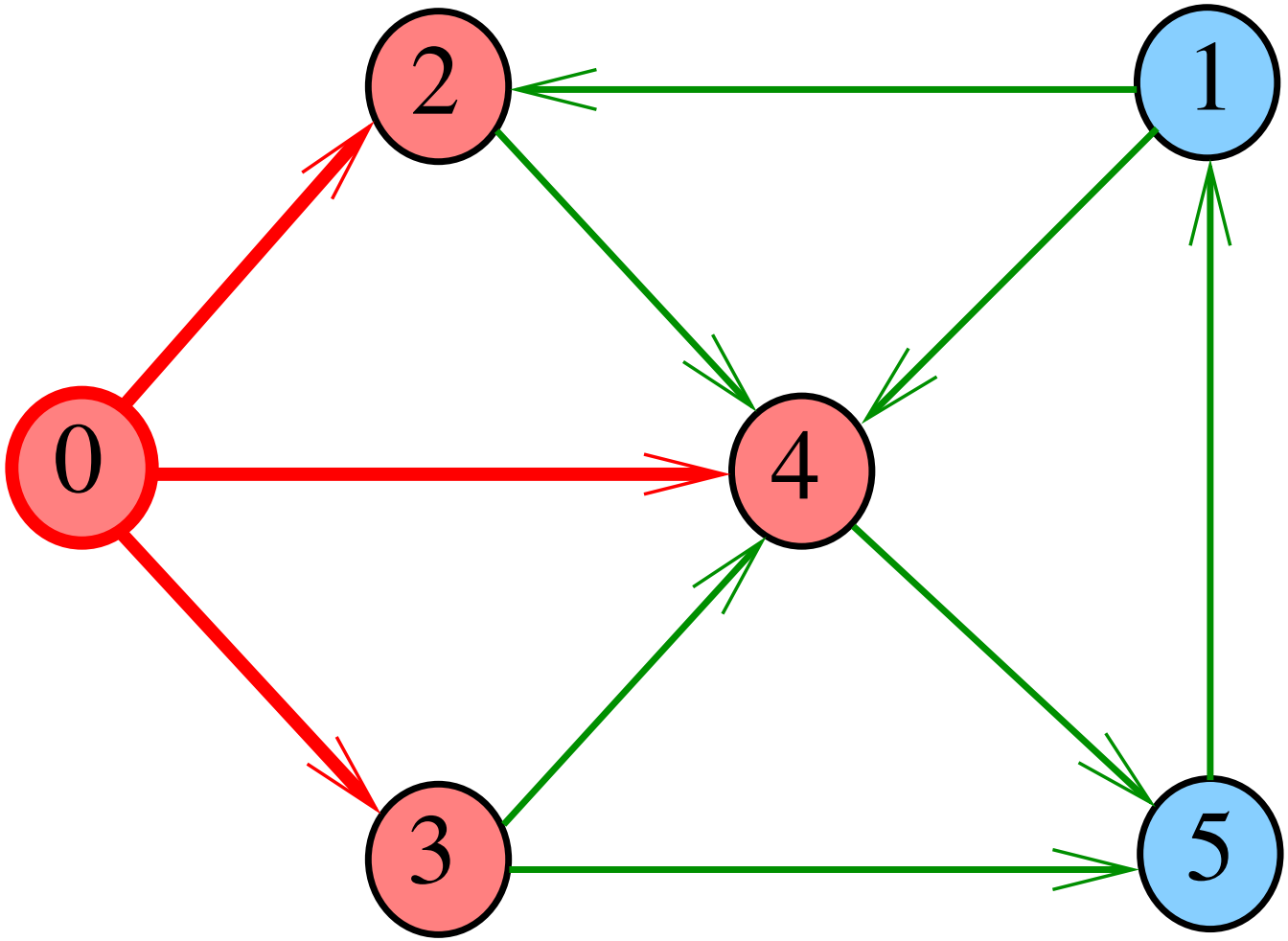
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	**0**	**2**	**3**			



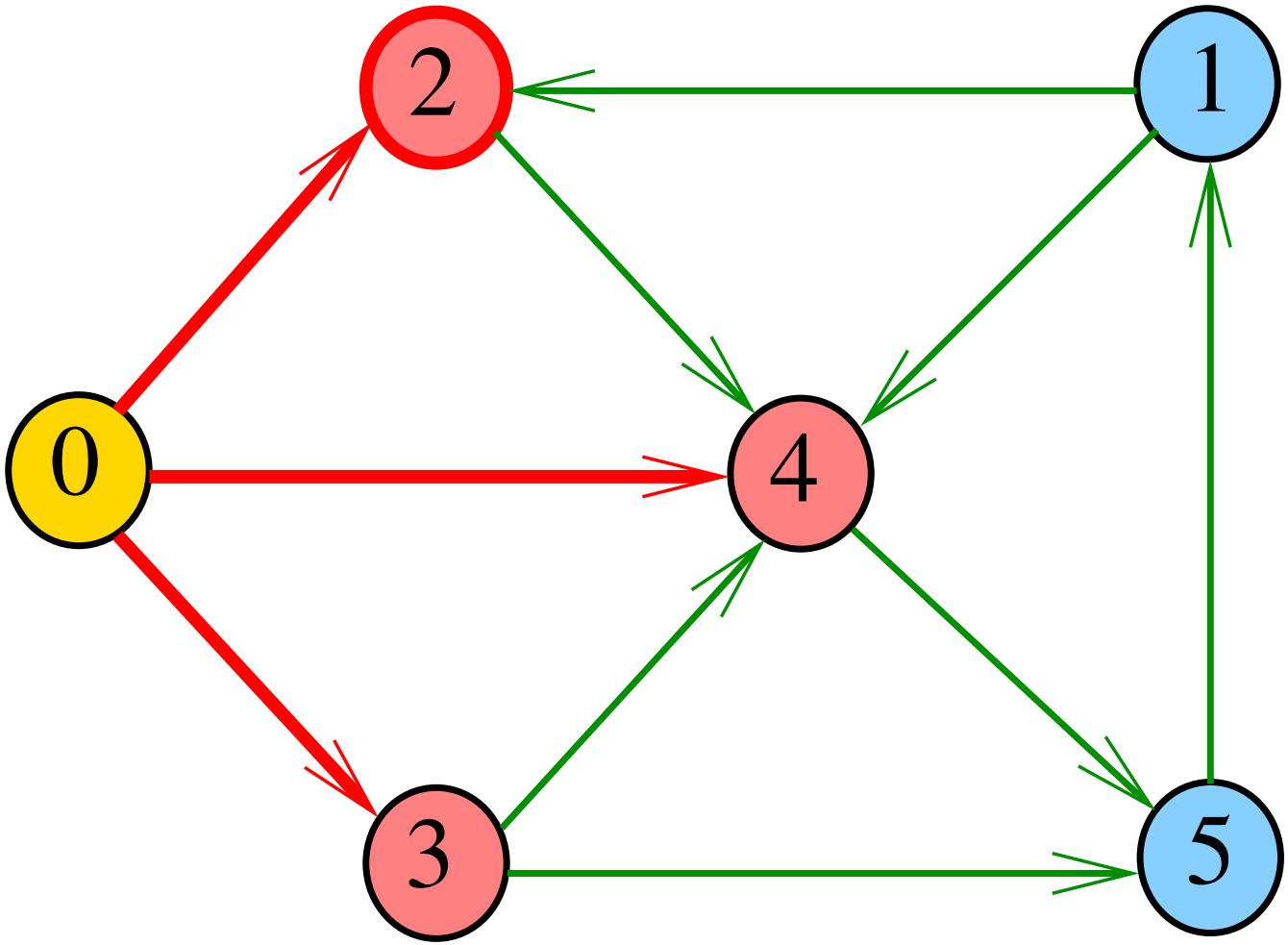
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	**0**	**2**	**3**	**4**		



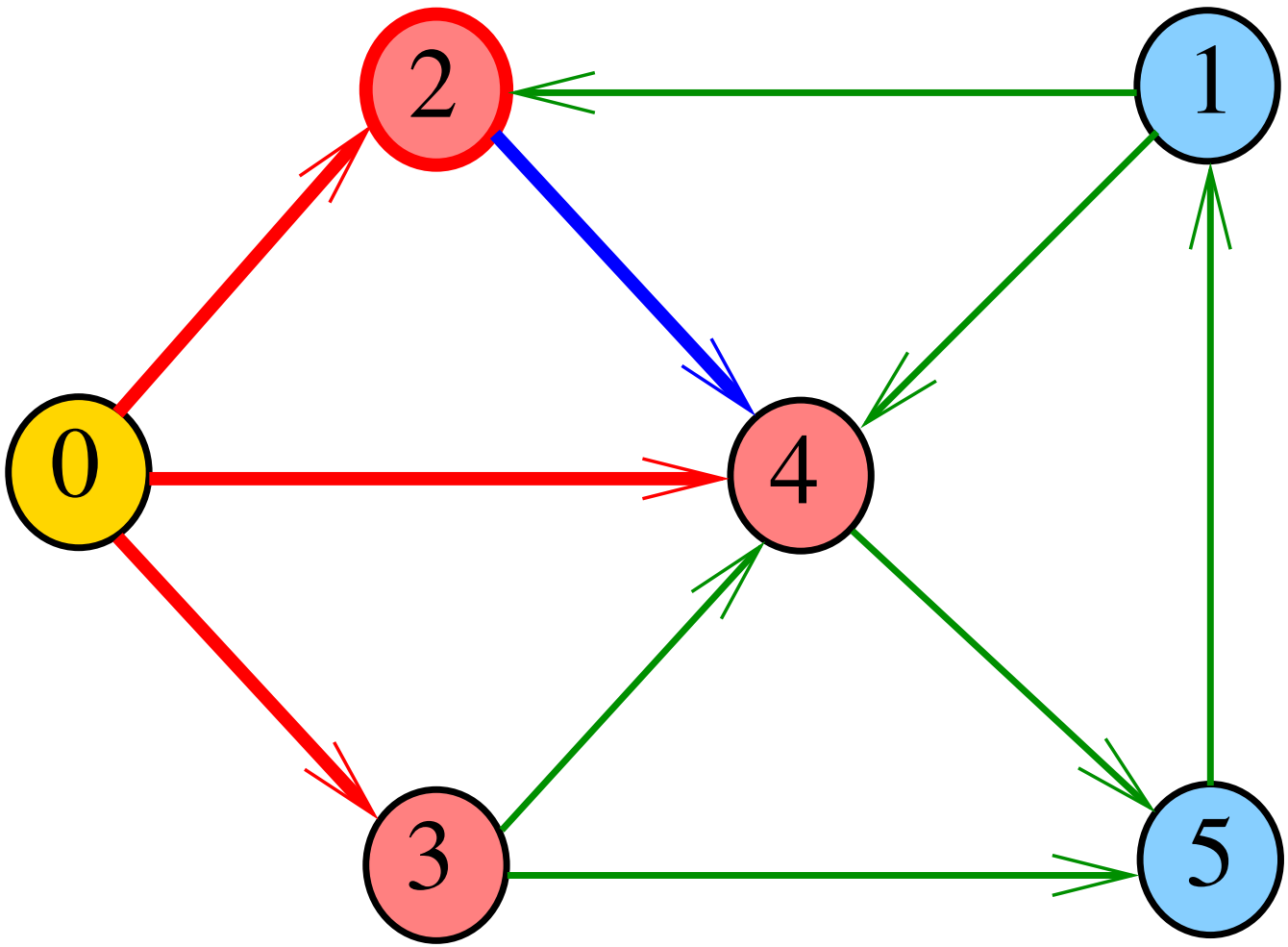
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		



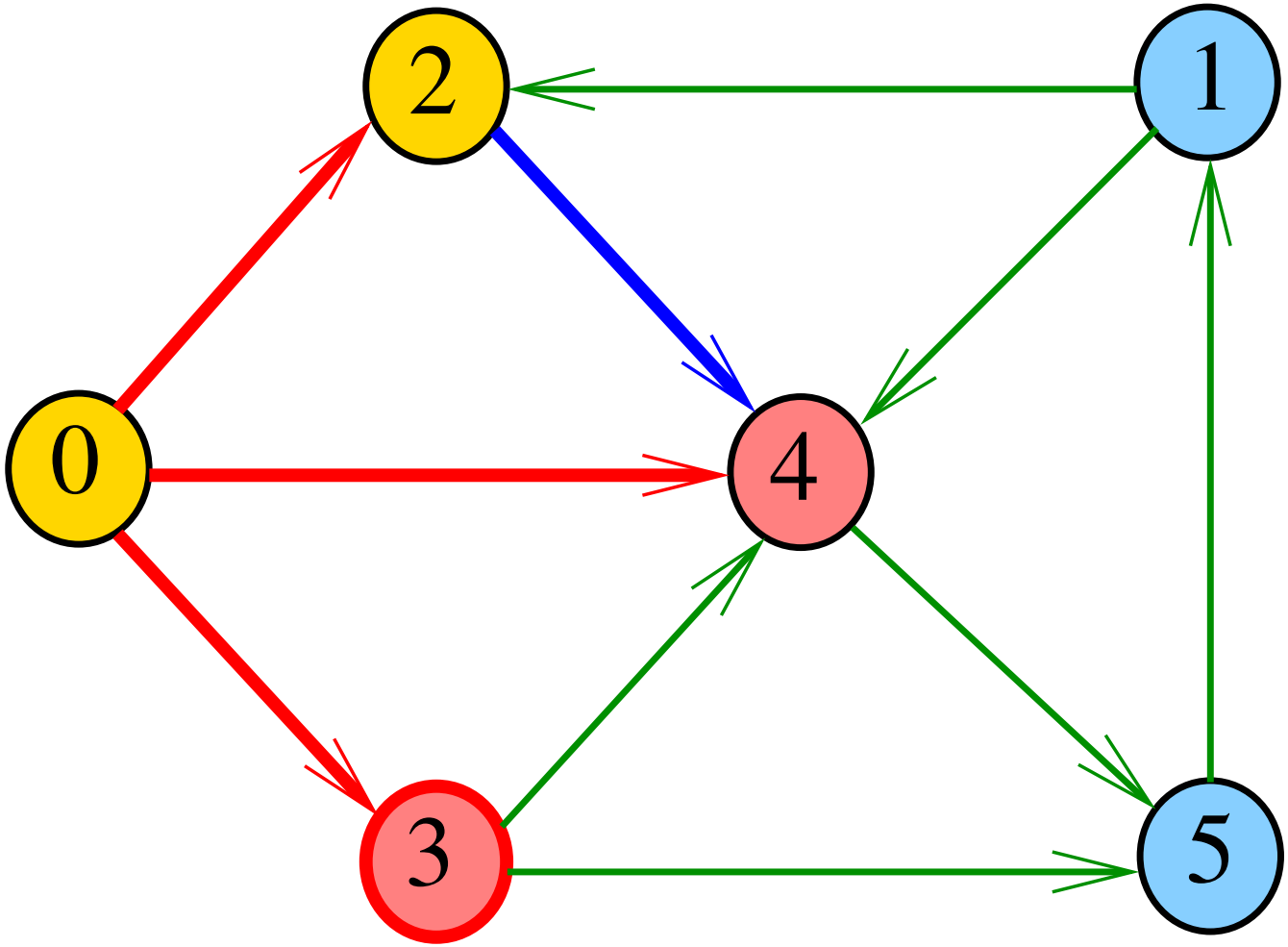
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		



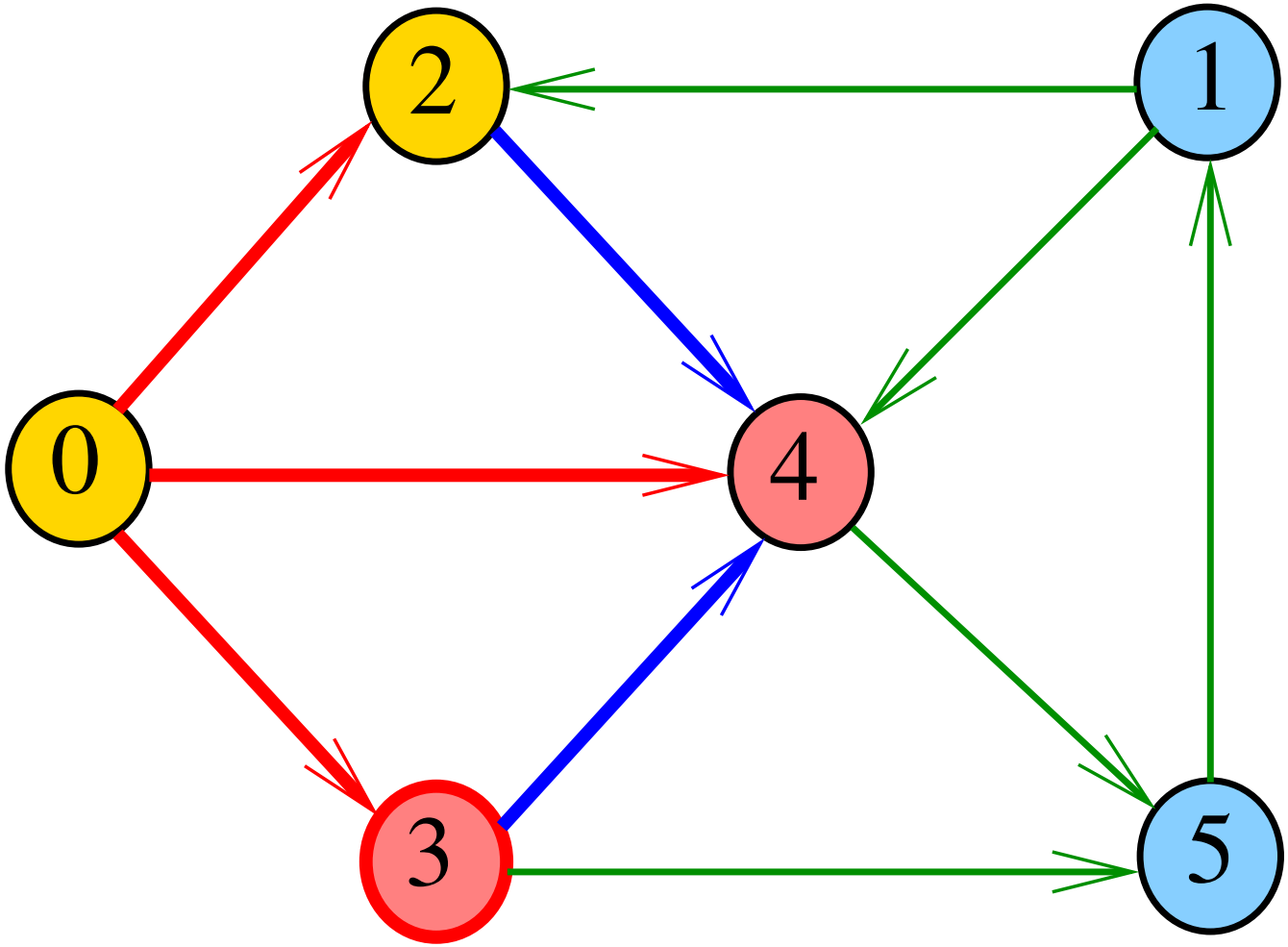
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	**0**	**2**	**3**	**4**		



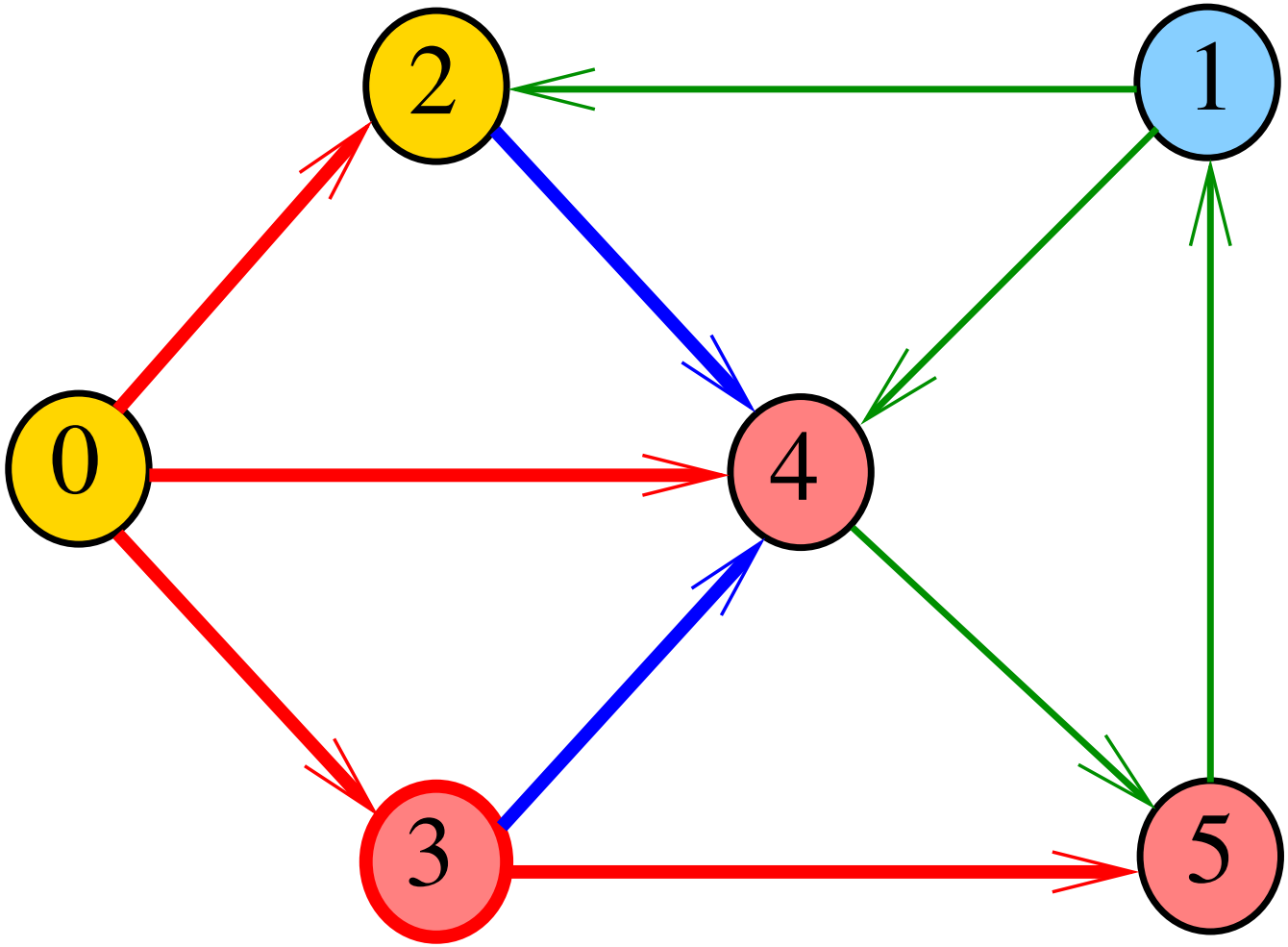
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		



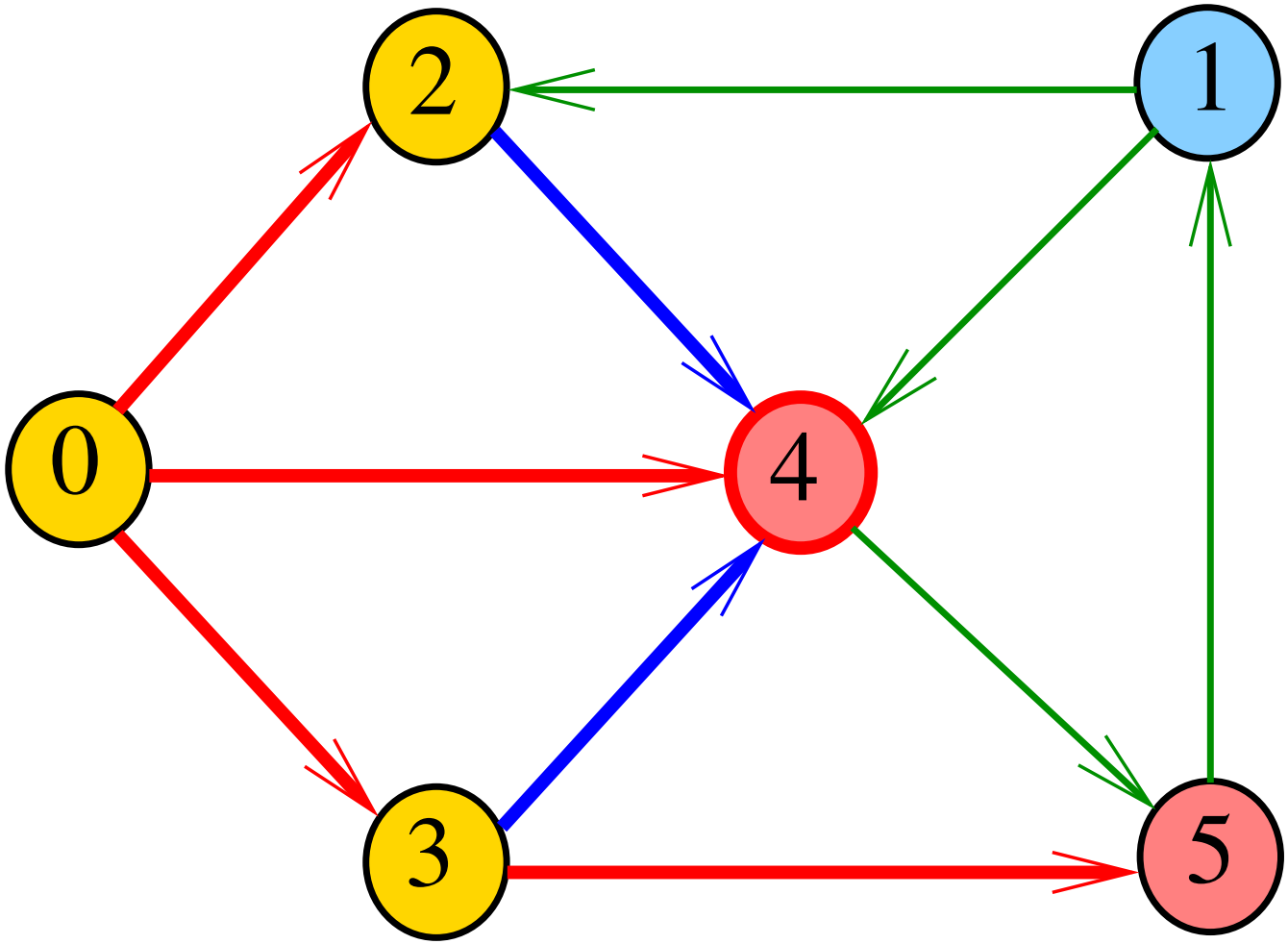
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	**0**	**2**	**3**	**4**	**5**	



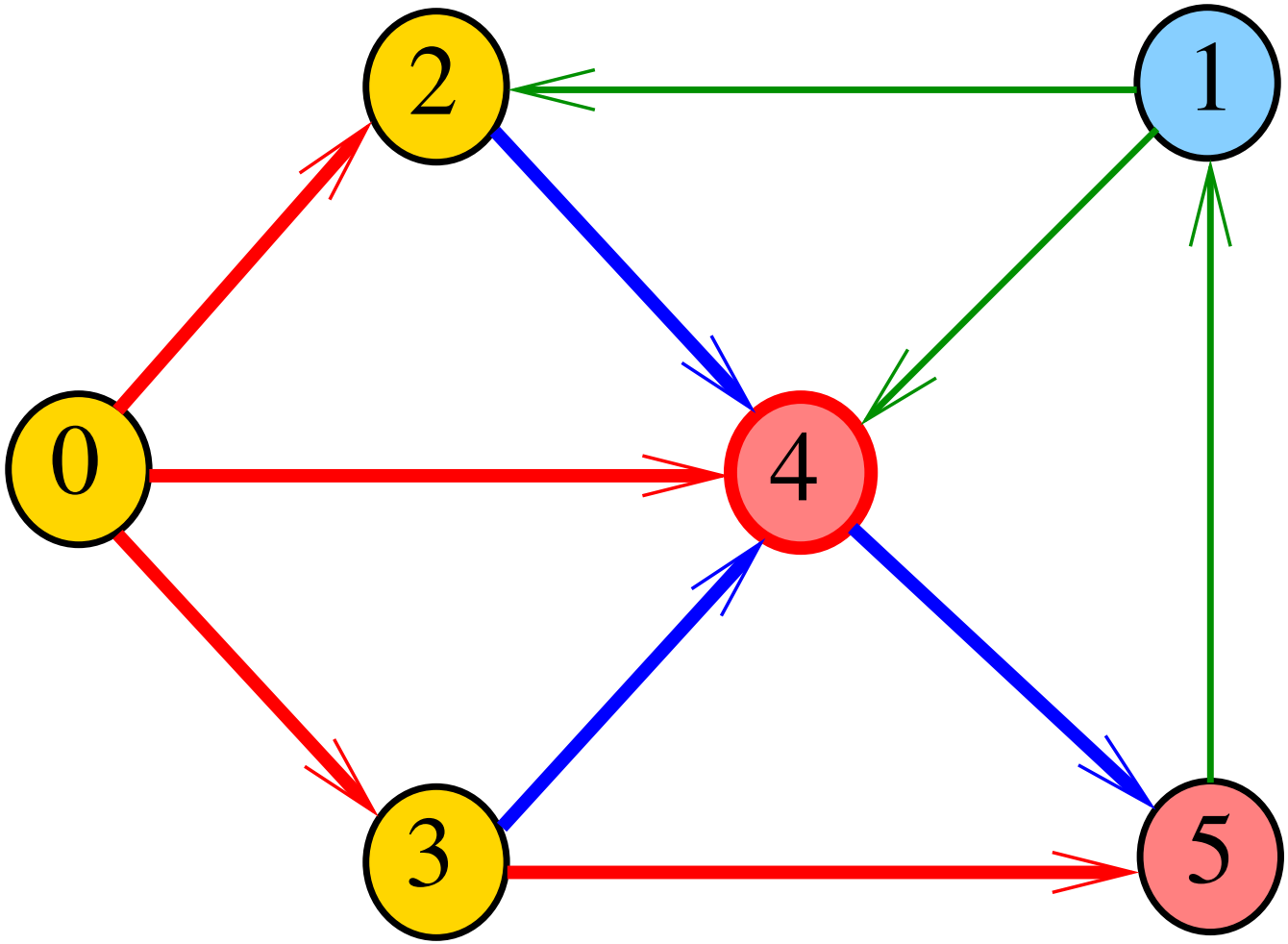
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	**0**	**2**	**3**	**4**	**5**	



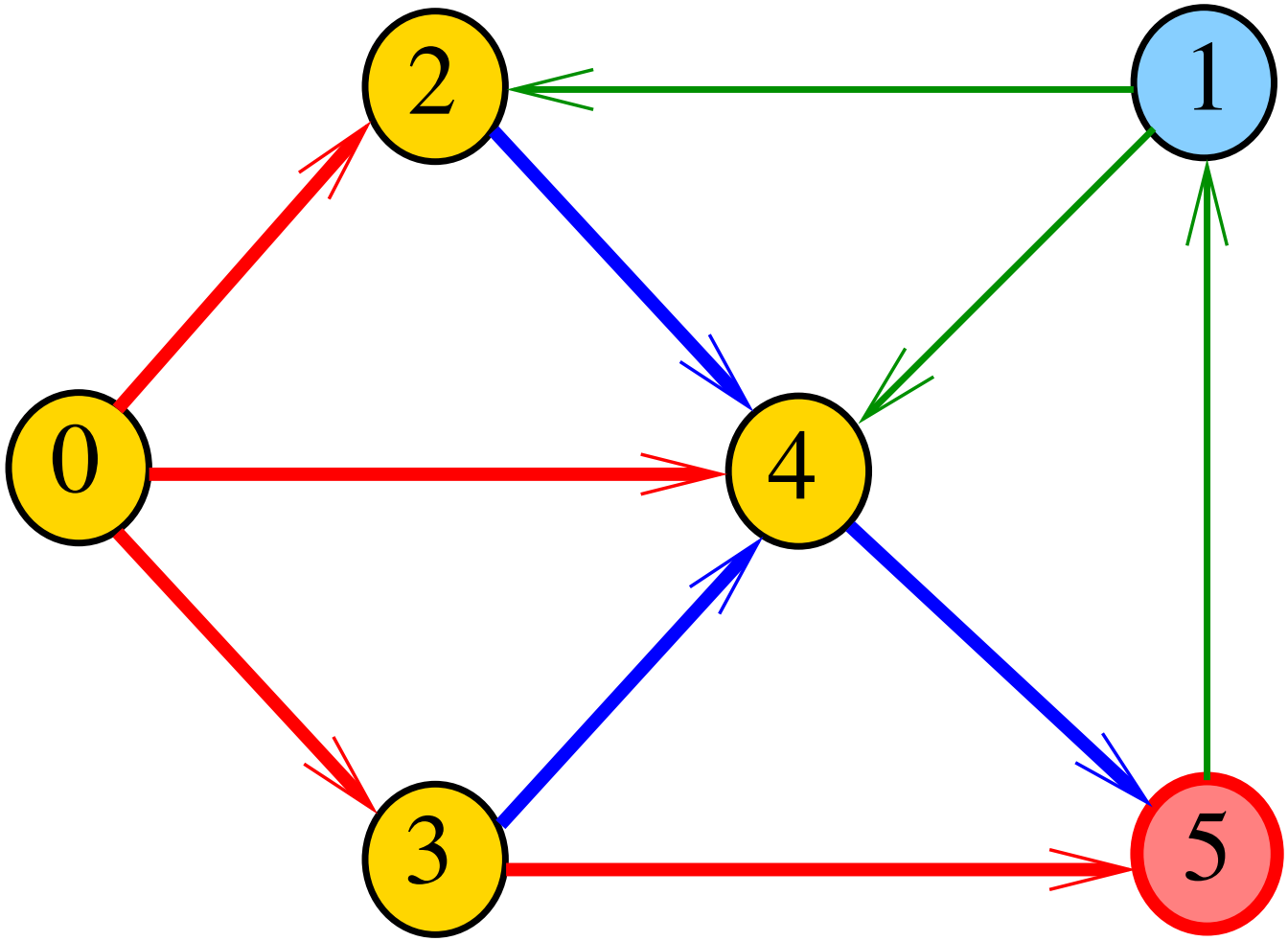
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	



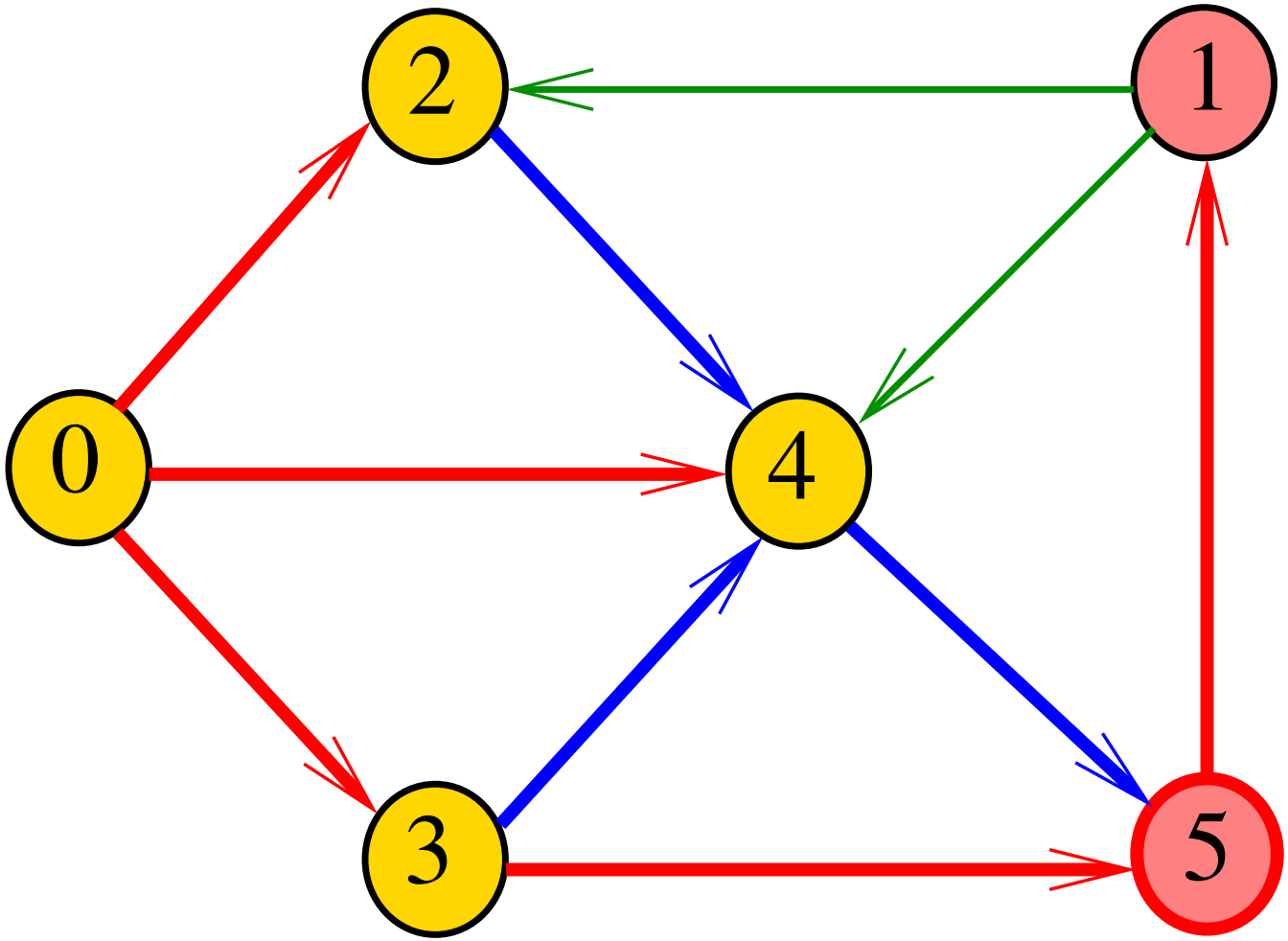
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	**0**	**2**	**3**	**4**	**5**	



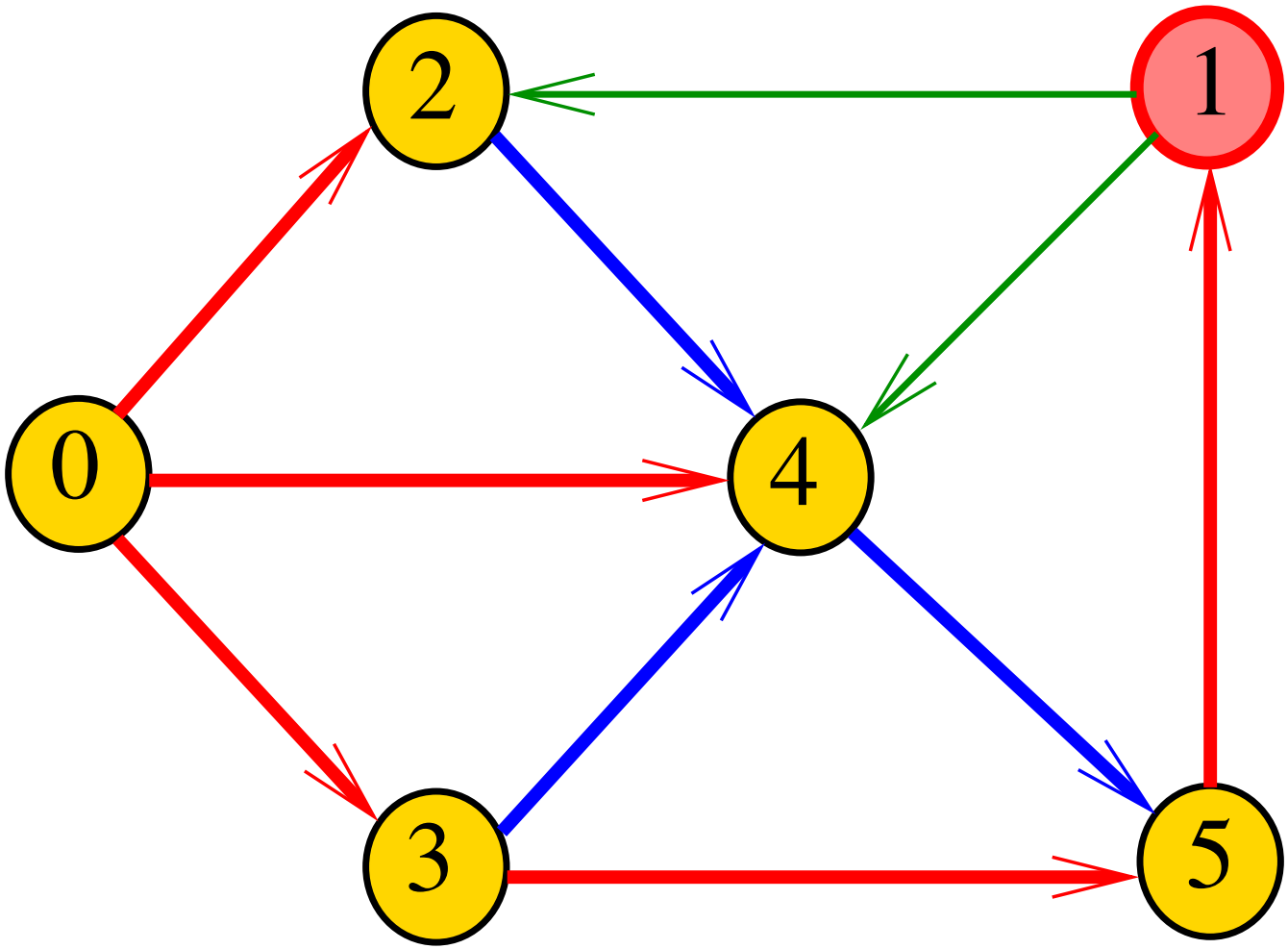
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1



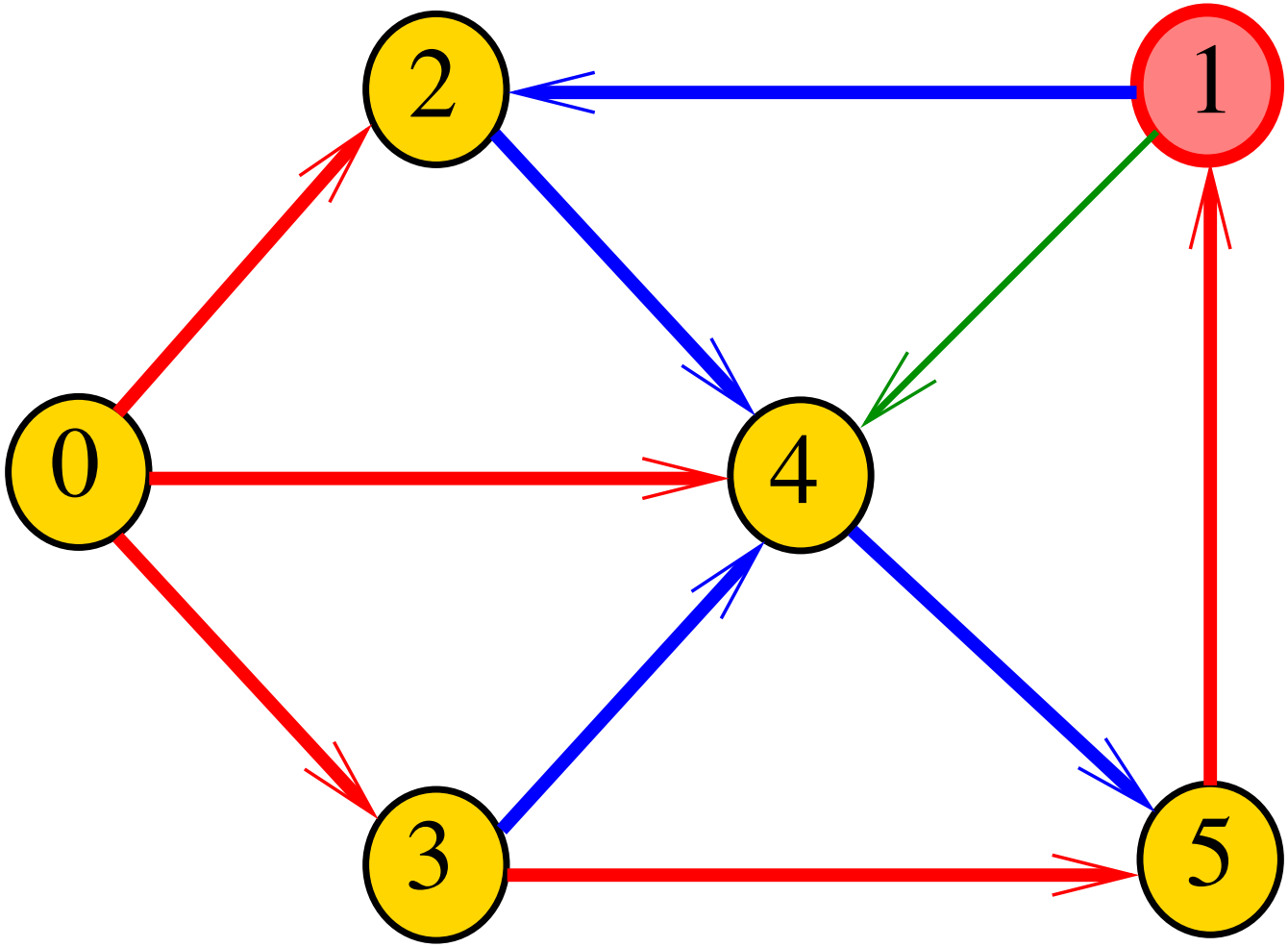
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	**0**	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**



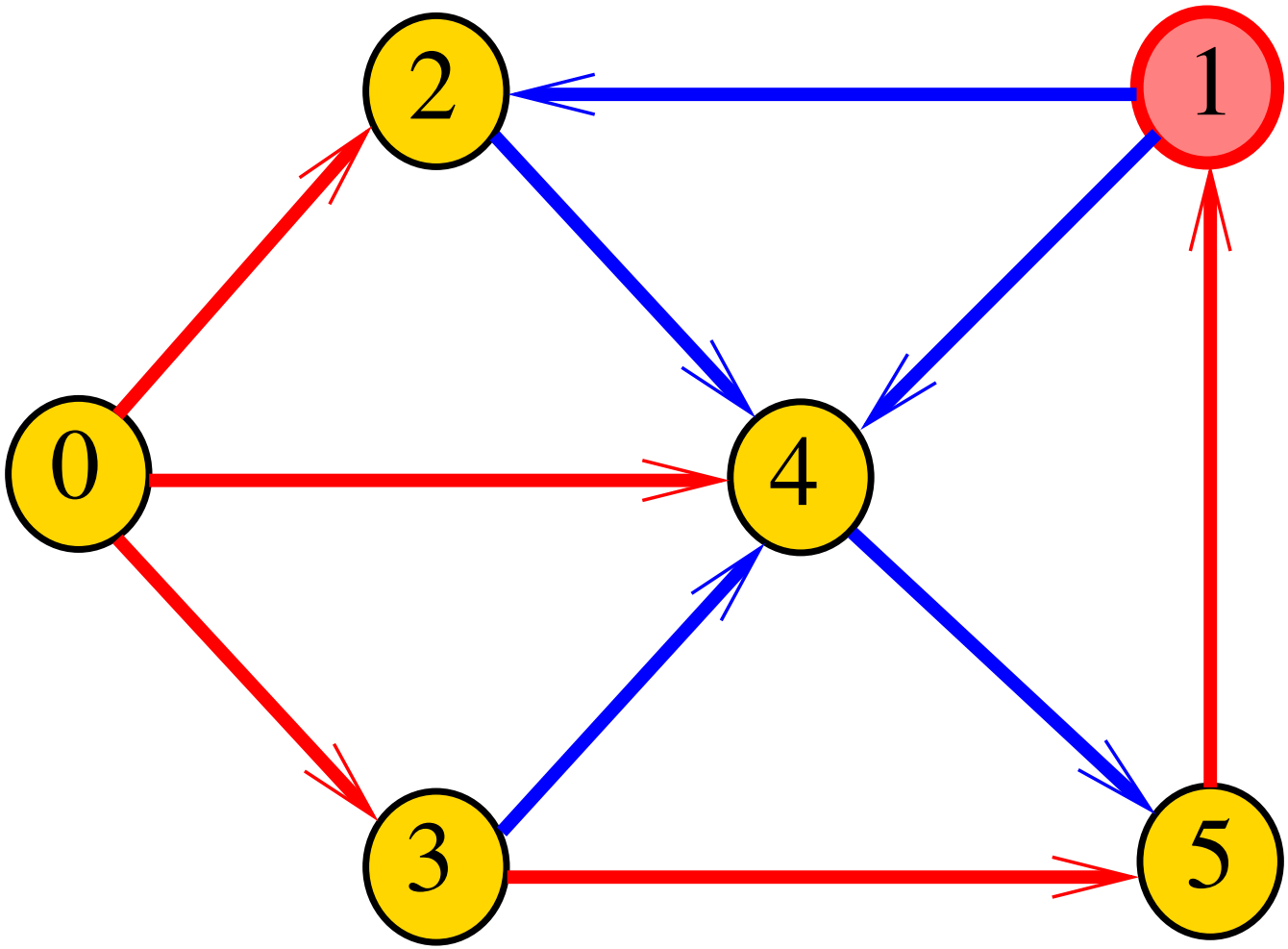
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	**0**	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**



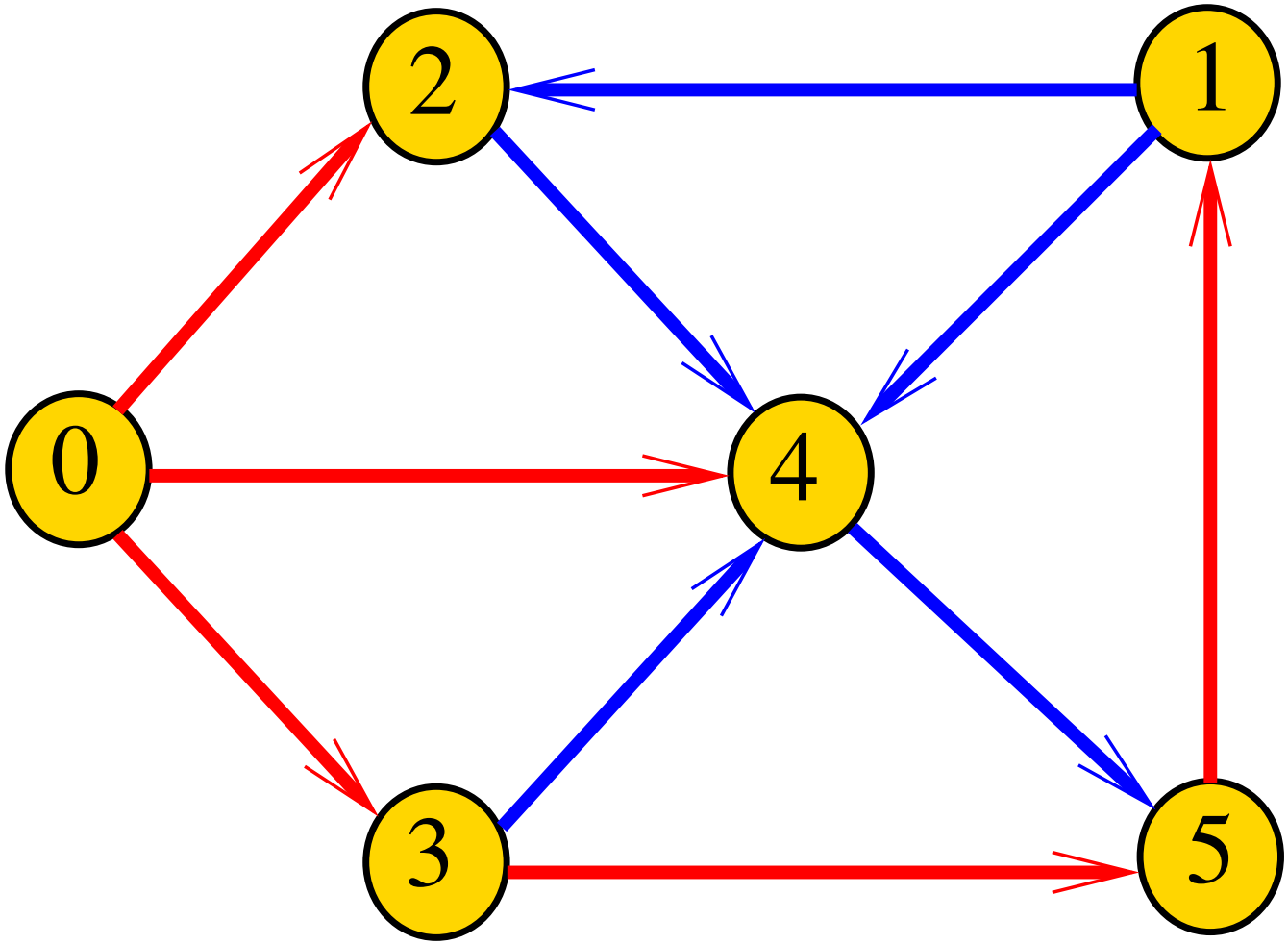
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	**0**	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**



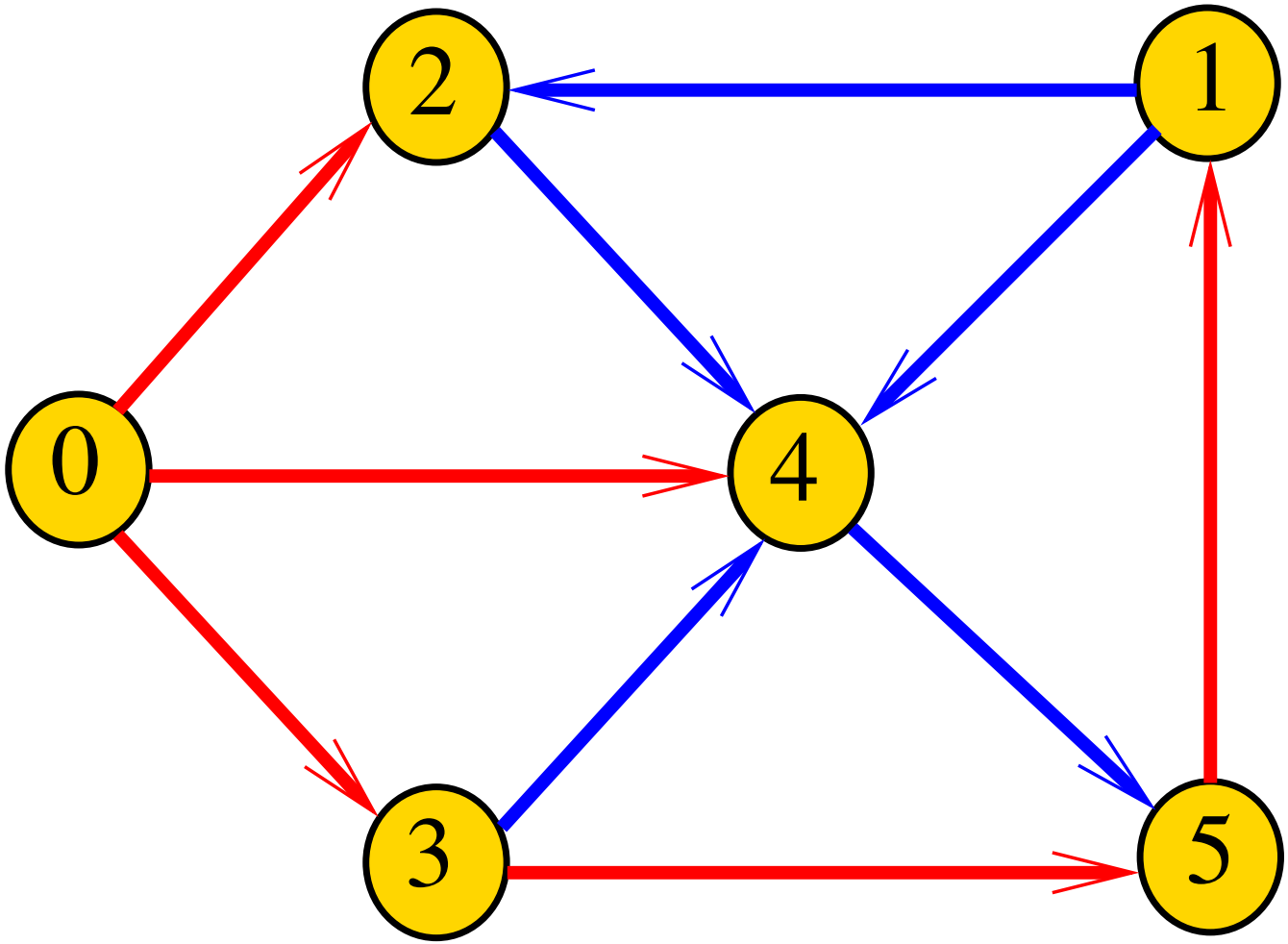
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	**0**	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**



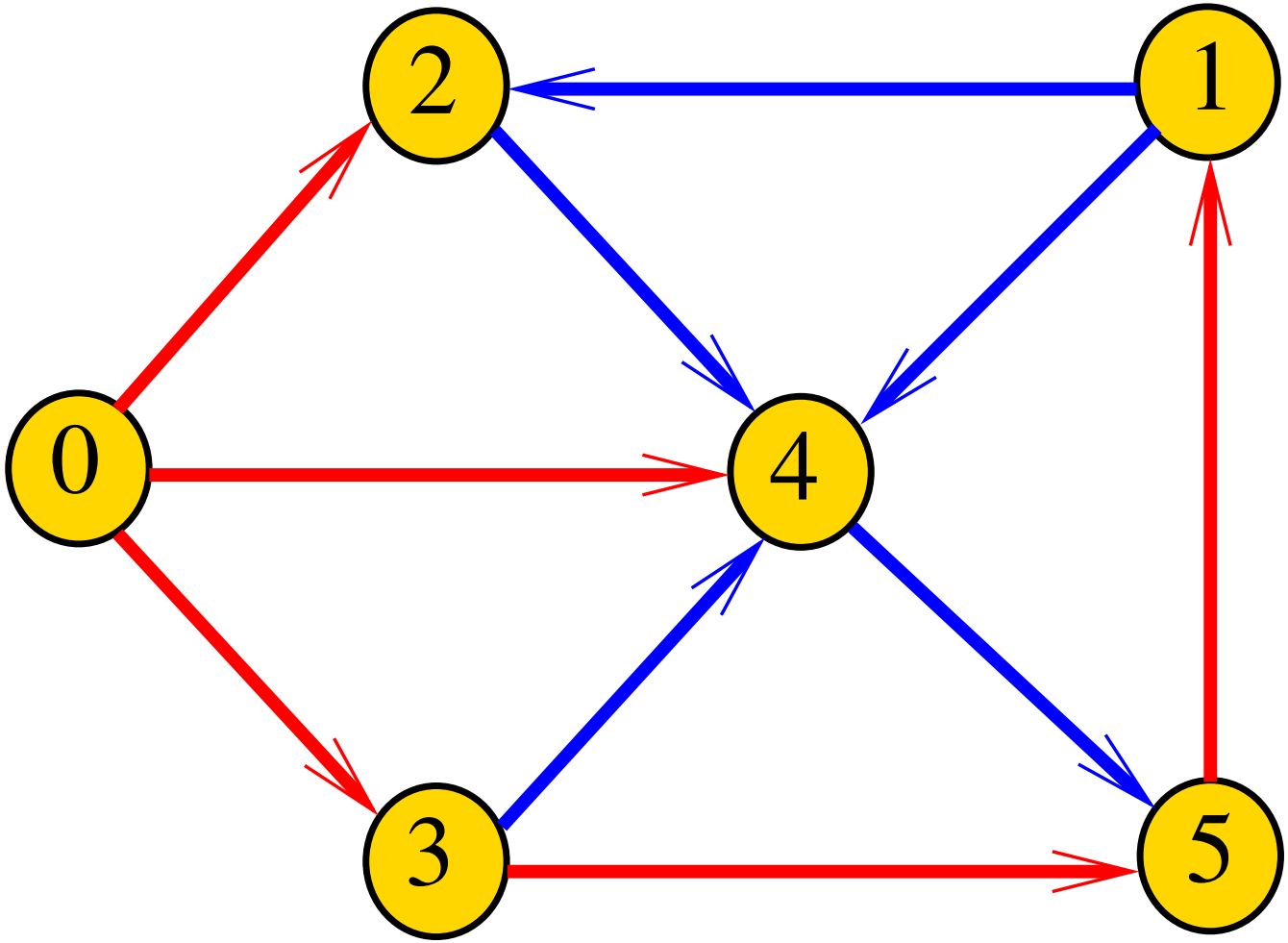
Arborescência da BFS

A busca em largura a partir de um vértice `s` descreve a arborescência com raiz `s`



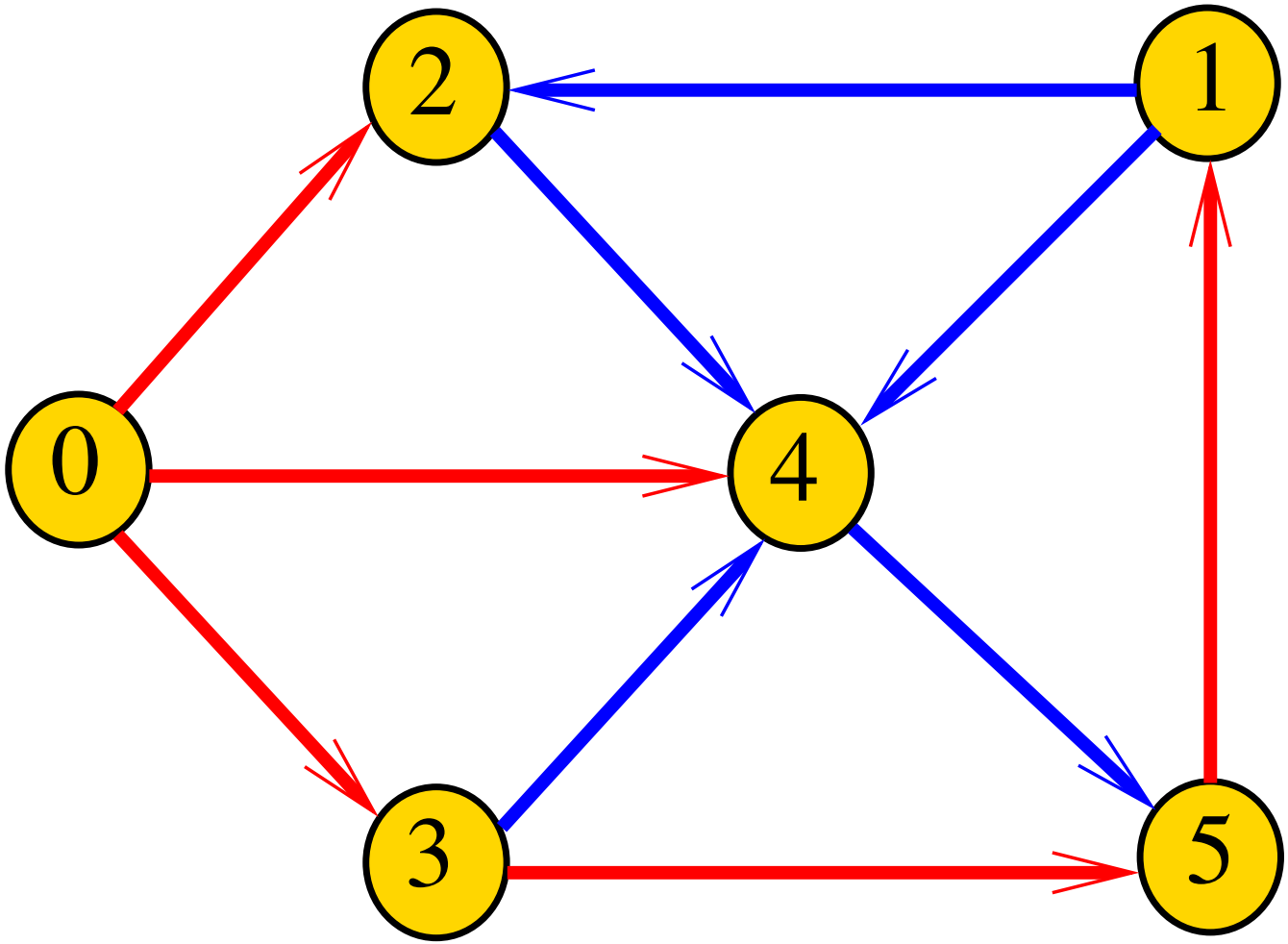
Arborescência da BFS

Essa arborescência é conhecida como
arborescência de busca em largura (= *BFS tree*)



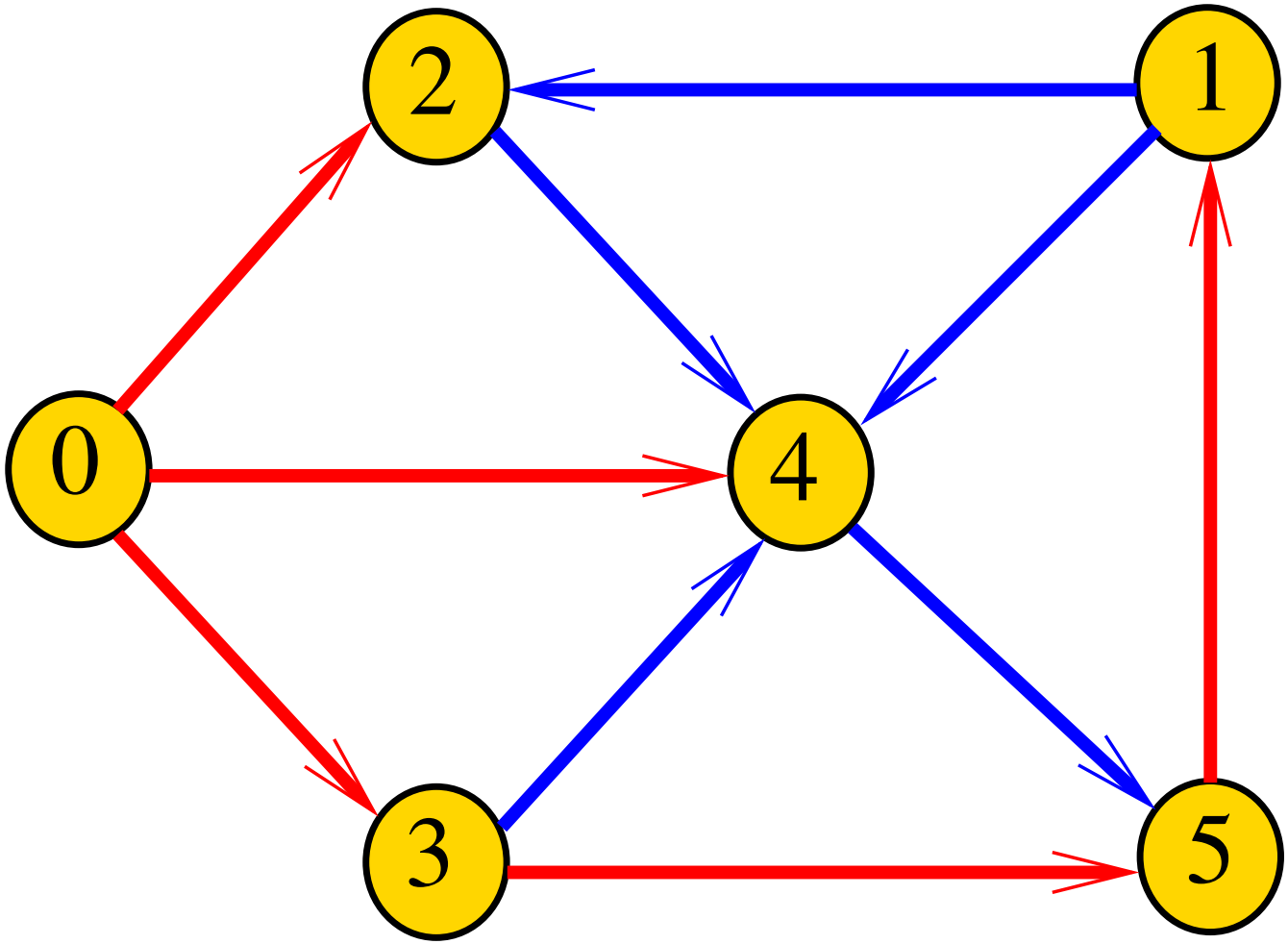
Representação da BFS

Podemos representar essa arborescência explicitamente por um vetor de pais `edgeTo[]`



Representação da BFS

v	0	1	2	3	4	5
edgeTo	0	5	0	0	0	3



Class BFSpaths

BFSpaths visita todos os vértices do digrafo G que podem ser alcançados a partir de s.

A visita aos vértices é registrada no vetor marked[]. Se v foi então marked[v] == true.

Para isso BFSpaths usa uma fila de vértices:

```
Queue<Integer> q = new Queue<Integer>();
```

BFSpaths: esqueleto

```
public class BFSpaths {
   private final int s;
   private boolean[] marked;
   private int[] edgeTo;
   public BFSpaths(Digraph G, int s) {}
   private void bfs(Digraph G, int s) {}
   public boolean hasPath(int v) {}
   public Iterable<Integer> pathTo(int v)
}
```

BFSpaths

Encontra um caminho de s a todo vértice alcançável a partir de s.

```
public BFSpaths(Digraph G, int s) {
   marked = new boolean[G.V()];
   edgeTo = new int[G.V()];
   this.s = s;
   bfs(G, s);
}
```

bfs(): inicializações

```
private void bfs(Digraph G, int s) {
   Queue<Integer> q= new Queue<Integer>();
   marked[v] = true;
   q.enqueue(s);

   // aqui vem a iteração do próximo slide
```

bfs(): iteração

```
    while (!q.isEmpty()) {
        int v = q.dequeue();
        for (int w :  G.adj(v)) {
            if (!marked[w]) {
                edgeTo[w] = v;
                marked[w] = true;
                q.enqueue(w);
            }
        }
    }
}
```

BFSpaths

Há um caminho de `s` a `v`?

```
// Método copiado de DFSpaths.
public boolean hasPath(int v) {
   return marked[v];
}
```

BFSpaths

Retorna um caminho de s a v ou null se um tal caminho não existe.

```
// Método copiado de DFSpaths.
public Iterable<Integer> pathTo(int v) {
   if (!hasPath(v)) return null;
   Stack<Integer> path =
           new Stack<Integer>();
   for (int x = v; x != s; x = edgeTo[x])
       path.push(x);
   path.push(s);
   return path;
}
```

Relações invariantes

Digamos que um vértice `v` foi **visitado** se

```
marked[v] == true
```

No início de cada iteração vale que

- todo vértice que está na fila já foi visitado;
- se um vértice `v` já foi visitado mas algum de seus vizinhos ainda não foi visitado, então `v` está na fila.

Cada vértice entra na fila no máximo uma vez. Portanto, basta que a fila tenha espaço suficiente para `G.V()` vértices.

Consumo de tempo

O consumo de tempo da função `BFSpaths` para vetor de listas de adjacência é $O(V + E)$.

O consumo de tempo da função `BFSpaths`para matriz de adjacência é $O(V^2)$.

BFS versus DFS

- busca em largura usa **fila**, busca em profundidade usa **pilha**
- a busca em largura é descrita em **estilo iterativo**, enquanto a busca em profundidade é descrita, usualmente, em **estilo recursivo**
- busca em largura começa tipicamente num **vértice especificado**, a busca em profundidade, o próprio **algoritmo escolhe o vértice** inicial
- a busca em largura apenas **visita os vértices que podem ser atingidos** a partir do vértice inicial, a busca em profundidade, tipicamente, **visita todos os vértices** do digrafo

Certificados

Achievement Certificate

_____

is presented with the

Computer Achievement Award

On the _____ Day of _____ In the Year _____.

Signed,

_____

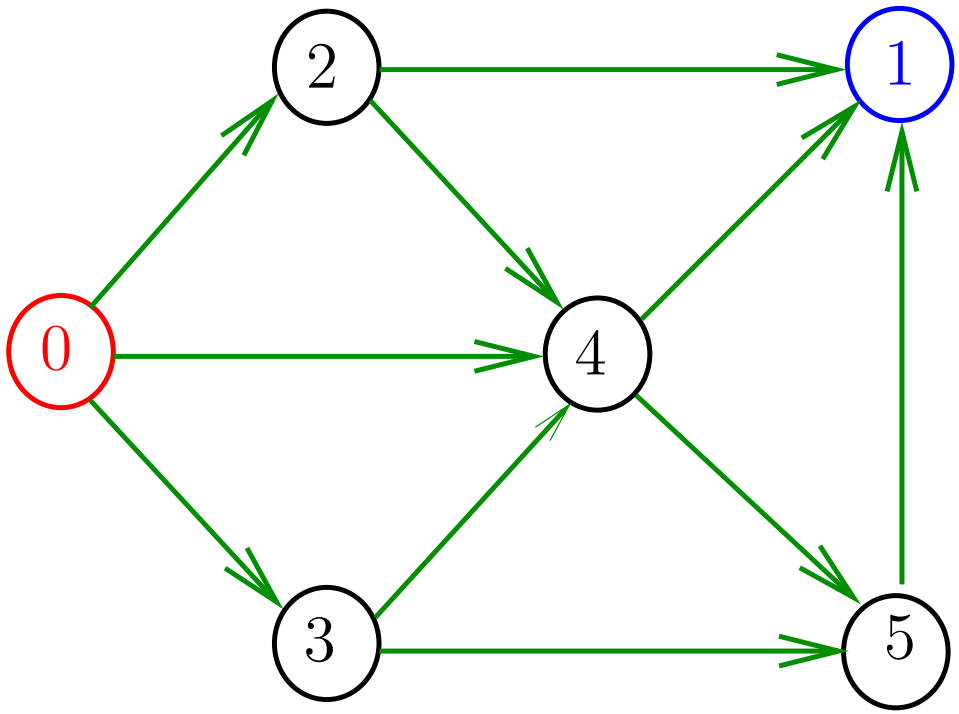
Certificate Provided by www.hooverwebdesign.com

Fonte: Free Printable Computer Achievement Award Certificates

Procurando um caminho

Problema: dados um digrafo `G` e dois vértices `s` e `t` decidir se existe um caminho de `s` a `t`

Exemplo: para `s` = 0 e `t` = 1 a resposta é SIM



Certificados

Como é possível 'verificar' a resposta?

Como é possível 'verificar' que existe caminho?

Como é possível 'verificar' que não existe caminho?

Certificados

Como é possível 'verificar' a resposta?

Como é possível 'verificar' que existe caminho?

Como é possível 'verificar' que não existe caminho?

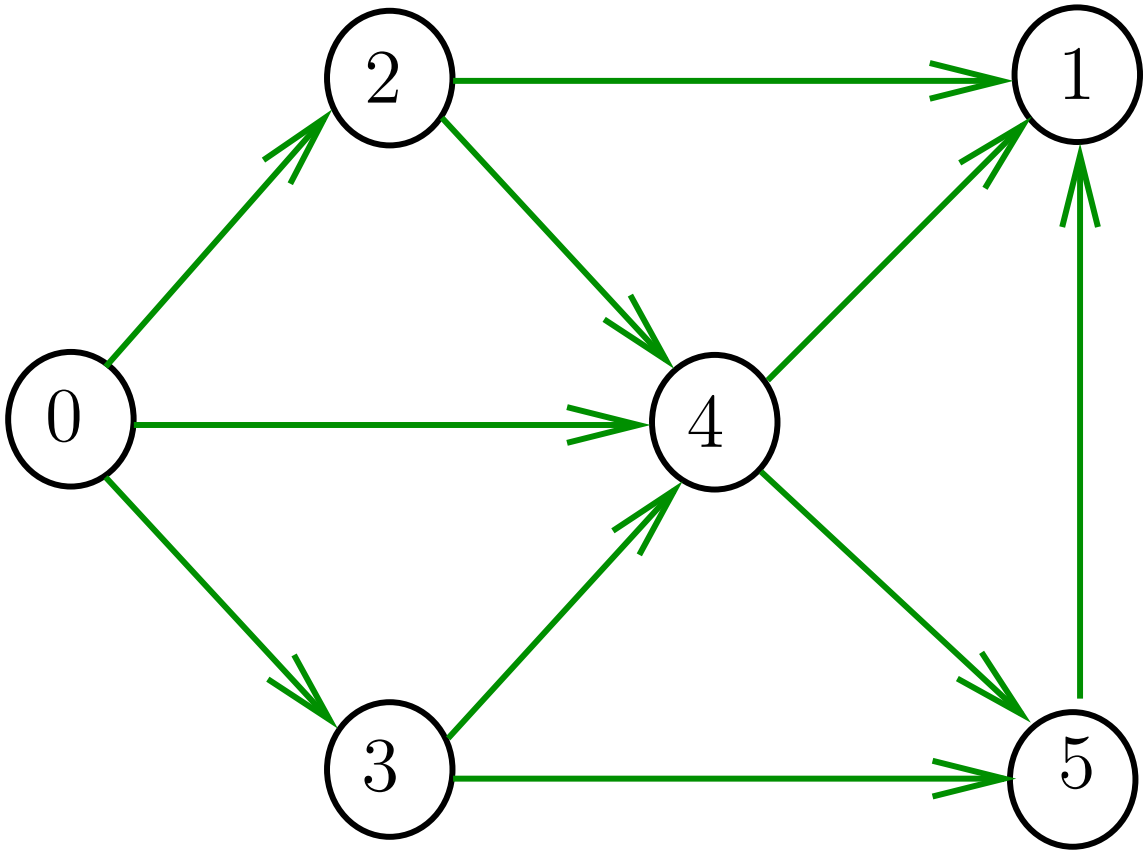
Veremos questões deste tipo freqüentemente

Elas terão um papel **suuupeeer** importante no final de MAC0338 Análise de Algoritmos e em MAC0414 Autômatos, Computabilidade e Complexidade

Elas estão relacionadas com o Teorema da Dualidade visto em MAC0315 Otimização Linear

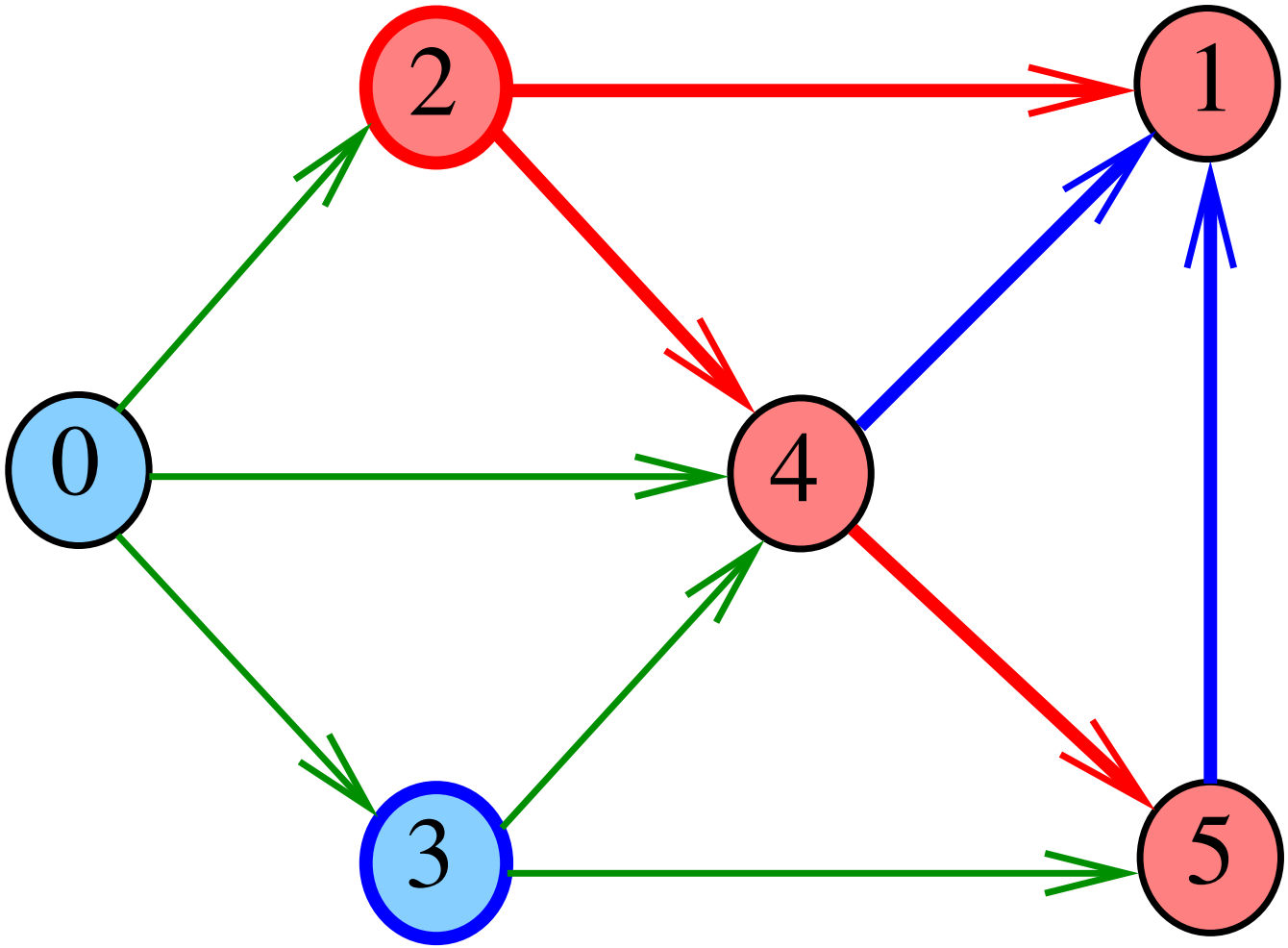
Certificado de inexistência

Como é possível demonstrar que o problema não tem solução?




```
dfs(G,2)
  2-1 dfs(G,1)
  2-4 dfs(G,4)
    4-1
    4-5 dfs(G,5)
      5-1
nao existe caminho
```

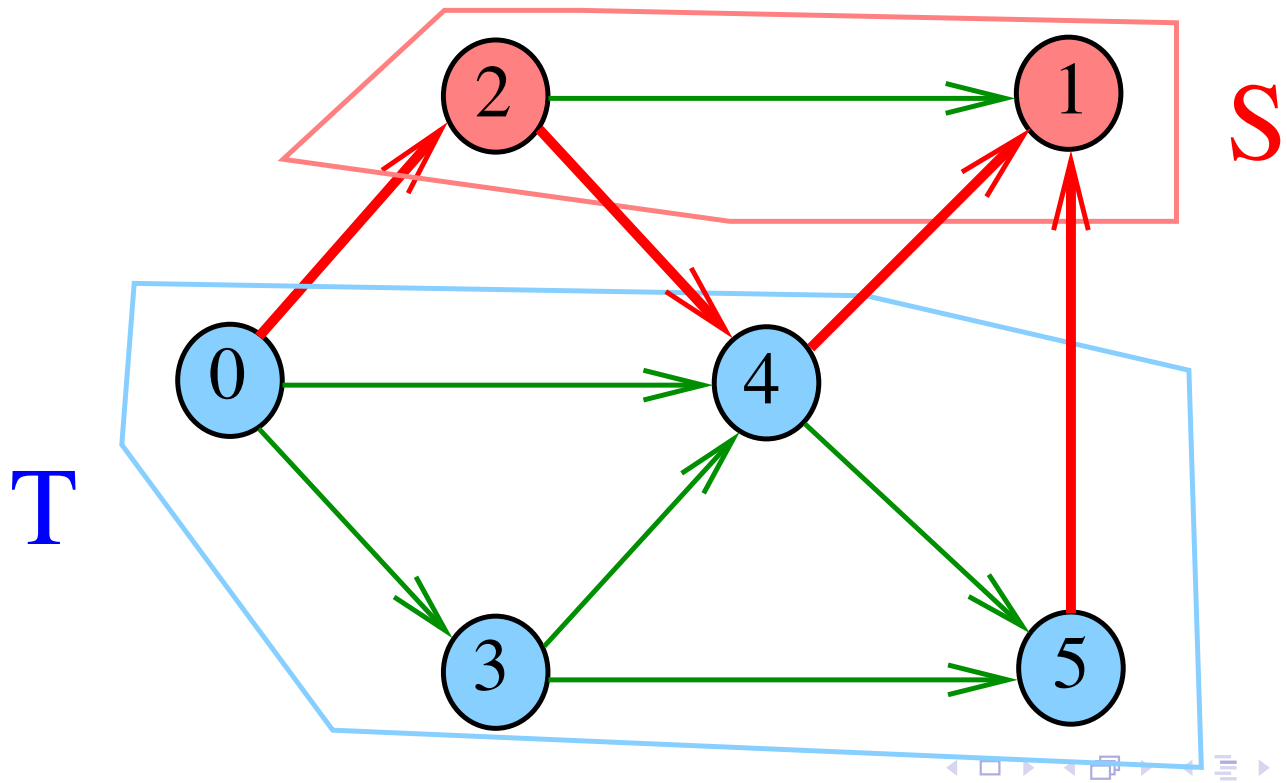
DFSpath(G,2,3)



Cortes (= *cuts*)

Um **corte** é uma bipartição do conjunto de vértices
Um arco **pertence** ou **atravessa** um corte (S, T) se tiver uma ponta em S e outra em T

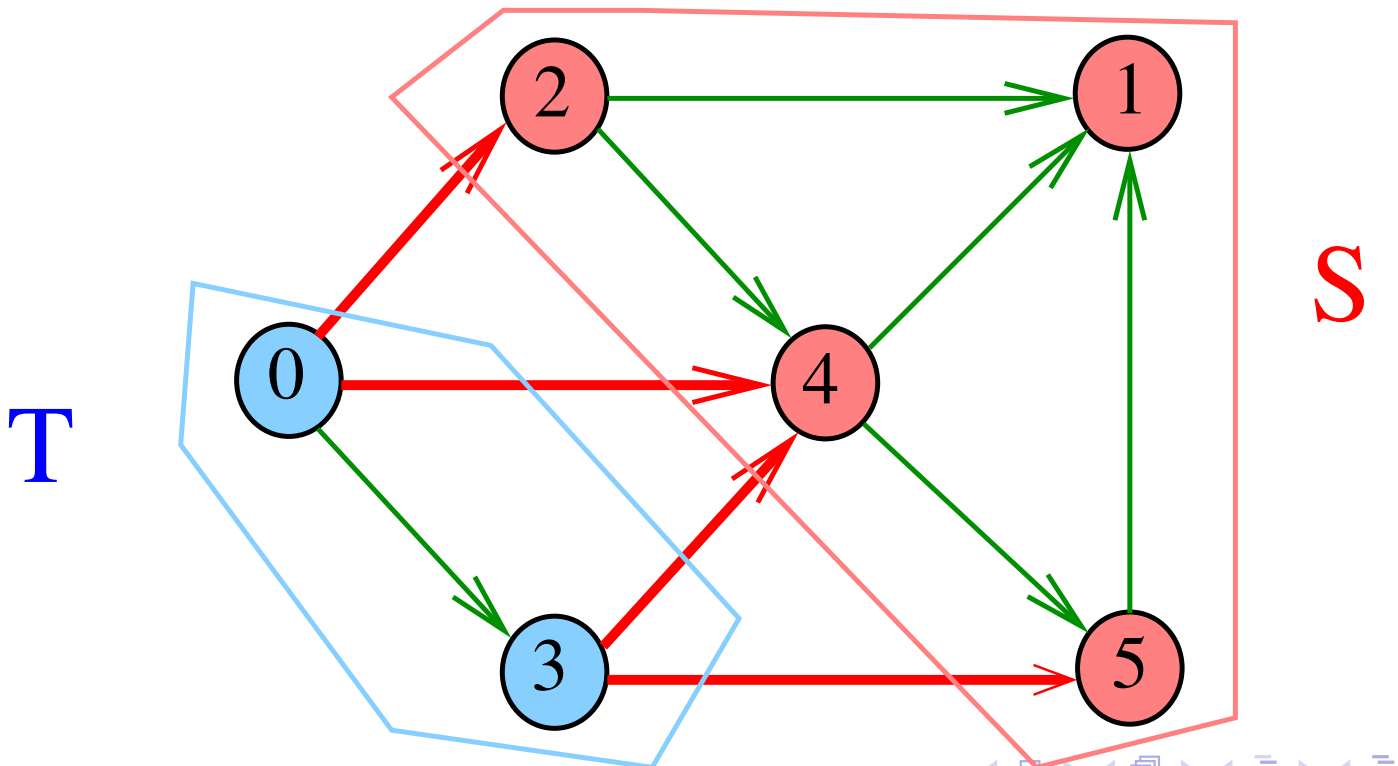
Exemplo 1: arcos em vermelho estão no corte (S, T)



Cortes (= *cuts*)

Um **corte** é uma bipartição do conjunto de vértices
Um arco **pertence** ou **atravessa** um corte (S, T) se tiver uma ponta em S e outra em T

Exemplo 2: arcos em vermelho estão no corte (S, T)

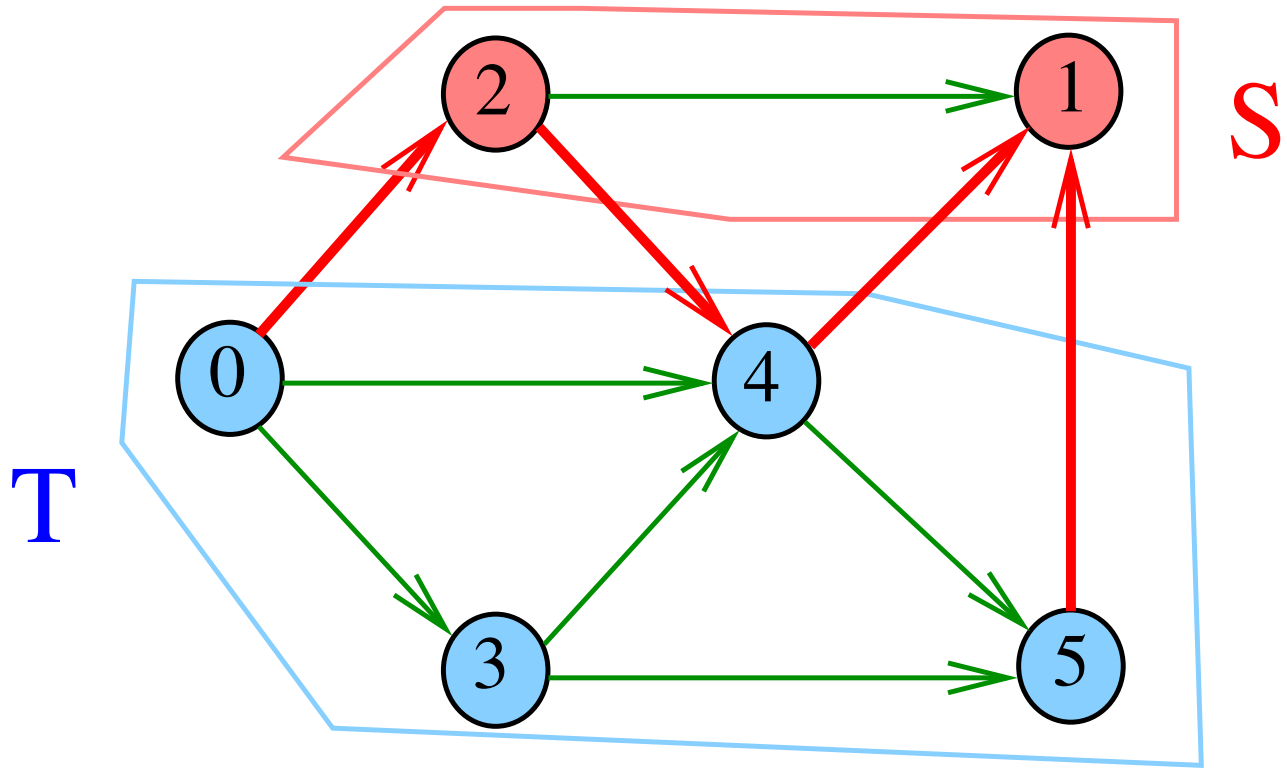


st-Cortes (= st-*cuts*)

Um corte (S, T) é um **st-corte** se

s está em S e t está em T

Exemplo: (S, T) é um 1-3-corte um 2-5-corte ...



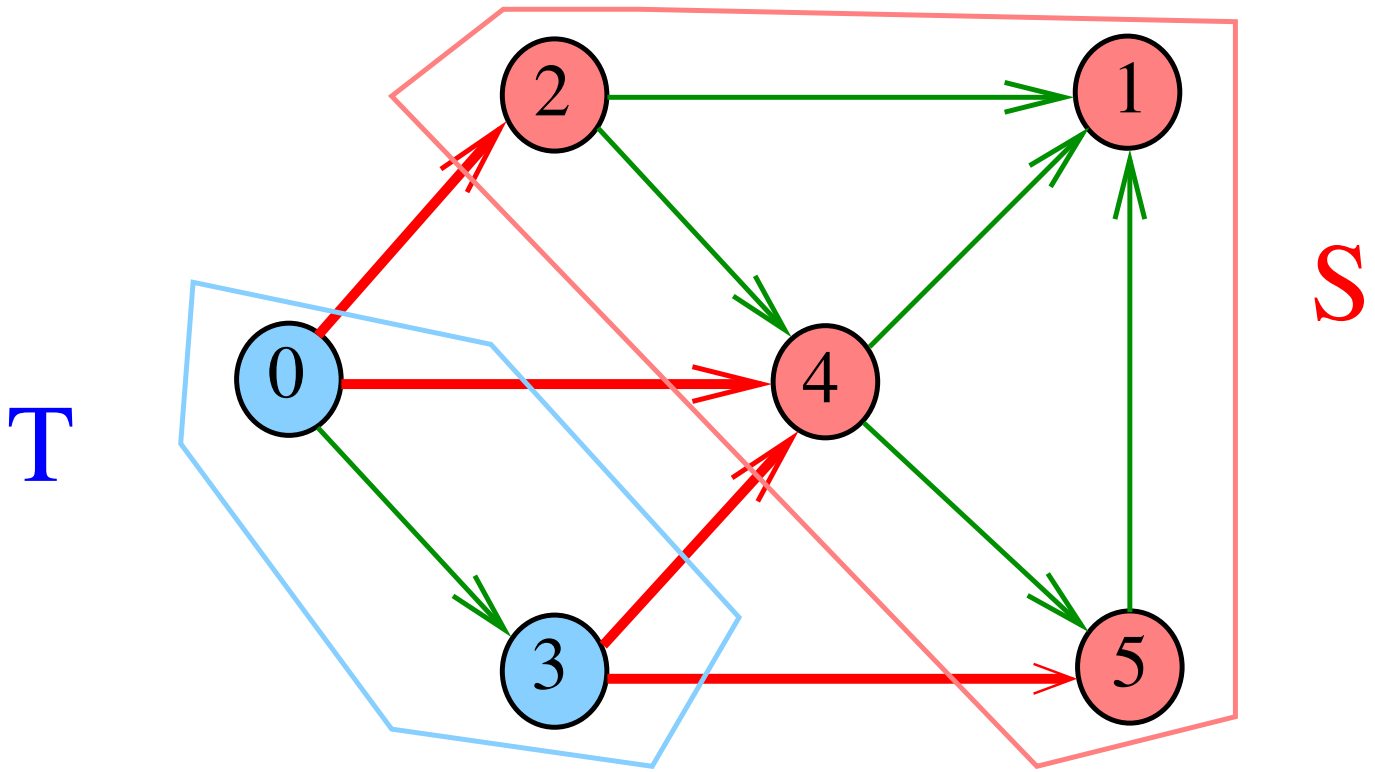
Certificado de inexistência

Para demonstrarmos que **não existe** um caminho de s a t basta exibirmos um st-corte (S, T) em que

> ***todo arco*** *no corte tem ponta inicial em* T *e ponta final em* S

Certificado de inexistência

Exemplo: certificado de que não há caminho de 2 a 3



Conclusão

Para quaisquer vértices s e t de um digrafo, vale uma e apenas umas das seguintes afirmações:

- existe um caminho de s a t
- existe st-corte (S, T) em que todo arco no corte tem ponta inicial em T e ponta final em S.

Fonte: Yin and yang (Wikipedia)

E DFSpaths e BFSpaths com isso?

No código das classes DFSpaths e BFSpaths se existe um caminho de s a t ele esta representado no vetor edgeTo[].

No código da classes DFSpaths e BFSpaths se não existe um caminho de s a t um st-corte separando s de t está representado no vetor marked[].

Em ambos os casos podemos fazer um trecho de código que verifica a resposta em tempo proporcional a V + E.