

MAC0338 Análise de Algoritmos

Slides de Paulo Feofiloff

[com erros do coelho]

MAC0338 Análise de Algoritmos

Slides de **Paulo Feofiloff**

[com erros do coelho]

“A análise de algoritmos é uma disciplina de engenharia. Um engenheiro civil, por exemplo, tem métodos e tecnologia para **prever** o comportamento de uma estrutura antes de construí-la.

Da mesma forma, um projetista de algoritmos deve ser capaz de **prever** o comportamento de um algoritmo antes de implementá-lo.”

Avisos

- **Página da MAC0338:**

<http://paca.ime.usp.br/>

- **Paca:** Cadastro, fórum, entregas de trabalho

- **Monitor:** Rafael Cosentino

5a. das 12:30 às 14:00 (?)

cosen@ime.usp.br

- **Livros:**

- CLRS = Cormen, Leiserson, Rivest, Stein,
Introduction to Algorithms

- AU = Aho, Ullman, *Foundations of Computer Science*

- TAOCP = Knuth, *The Art of Computer Programming*

- **Tarefas:** Tarefa 1 está disponível na Paca.

MAC0338

Continuação natural de [MAC0323 Estrutura de Dados](#).

A disciplina

- estuda **algoritmos eficientes e elegantes** para alguns problemas computacionais básicos;
- prova a correção de algoritmos iterativos a partir de suas **relações invariantes**;
- explora a **estrutura recursiva dos problemas** para construir algoritmos eficientes;
- formaliza o conceito de **desempenho (assintótico) de algoritmos**;
- calcula o desempenho de vários **algoritmos básicos**.

Principais tópicos

- Elementos de análise assintótica (notação O , Ω e Θ)
- Solução de recorrências
- Análise da correção e desempenho de algoritmos iterativos
- Análise da correção e desempenho de algoritmos recursivos
- Análise de pior caso e análise probabilística
- Algoritmos de busca e ordenação
- Algoritmos de programação dinâmica
- Algoritmos gulosos
- Algoritmos para problemas em grafos
- Análise amortizada de desempenho
- Introdução à teoria da complexidade: problemas completos em **NP**

Introdução à AA

CLRS 2.1–2.2

AU 3.3, 3.6

Exercício 1.A

Quanto vale S no fim do algoritmo?

1 $S \leftarrow 0$

2 **para** $i \leftarrow 2$ **até** $n - 2$ **faça**

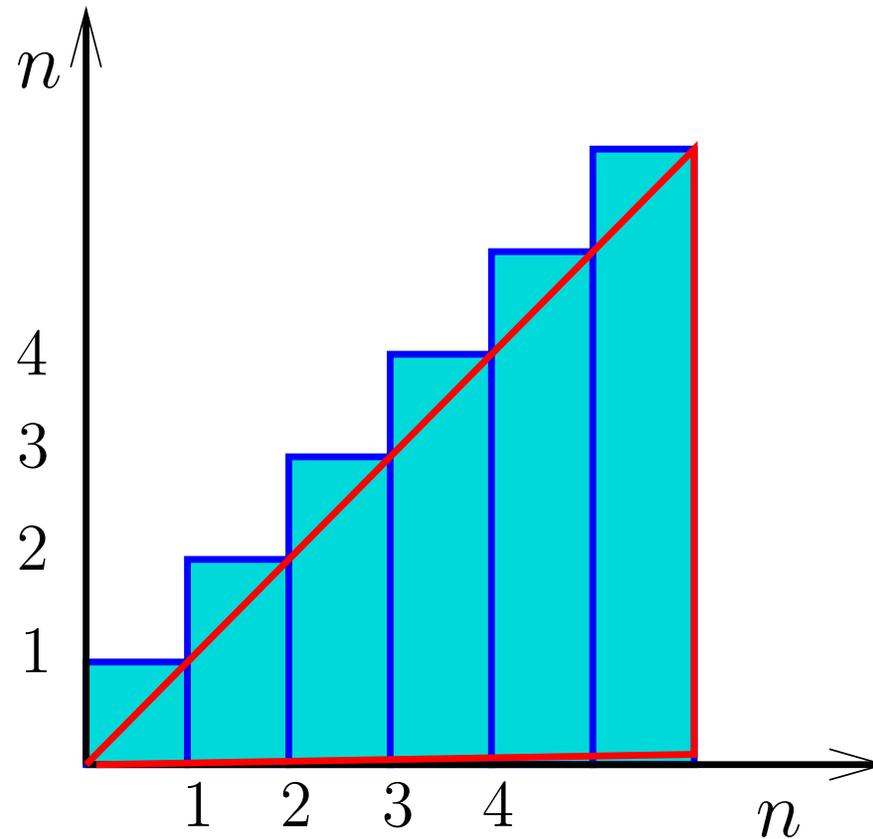
3 **para** $j \leftarrow i$ **até** n **faça**

4 $S \leftarrow S + 1$

Escreva um algoritmo mais eficiente que tenha o mesmo efeito.

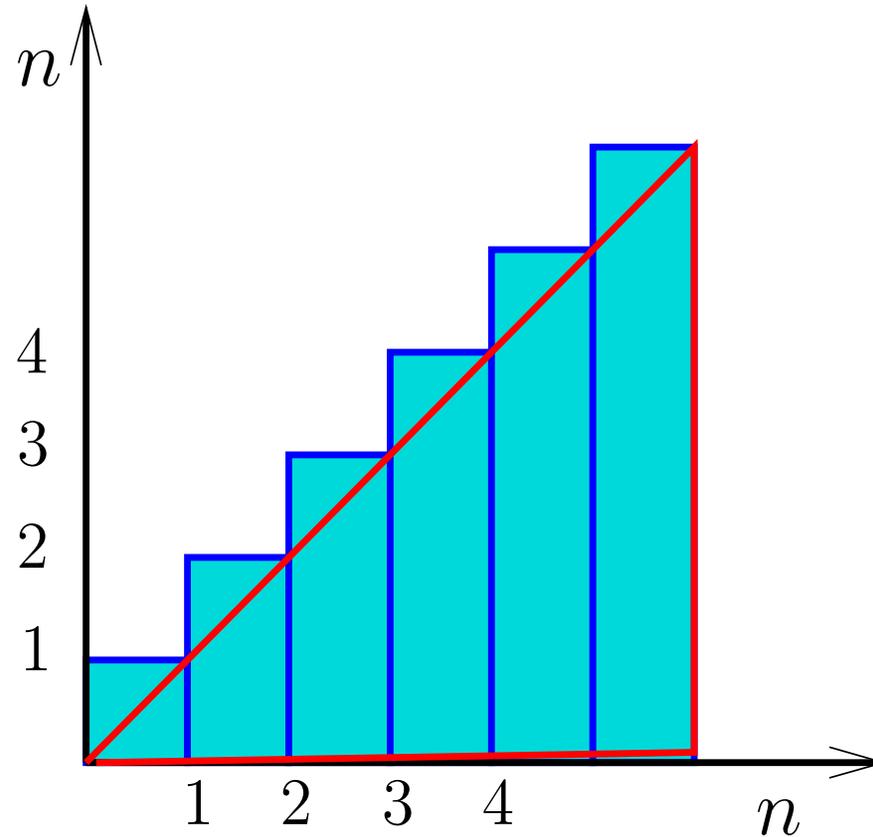
$$1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = ?$$

Carl Friedrich Gauss, 1787



$$1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = ?$$

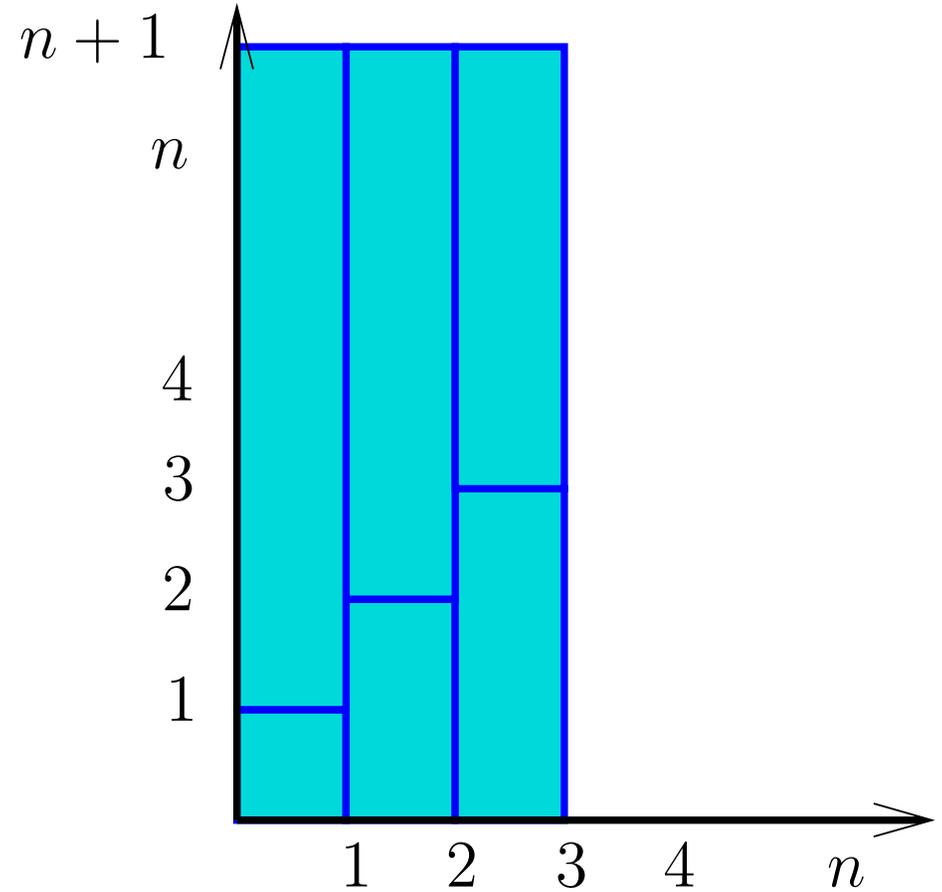
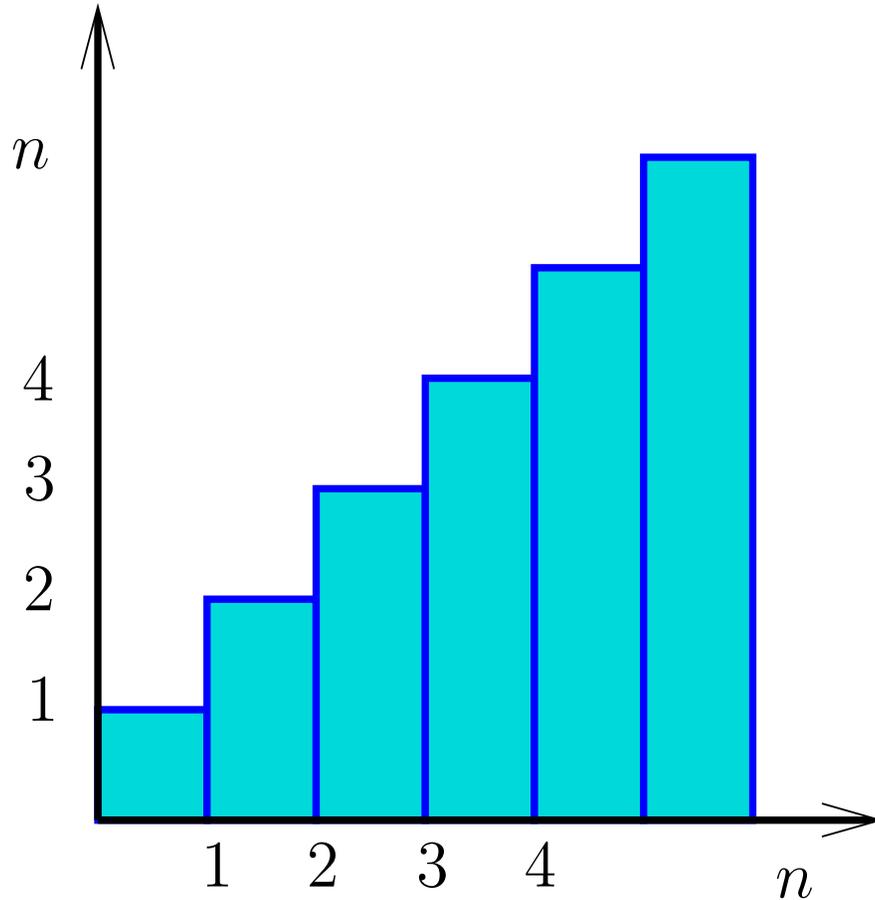
Carl Friedrich Gauss, 1787



$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

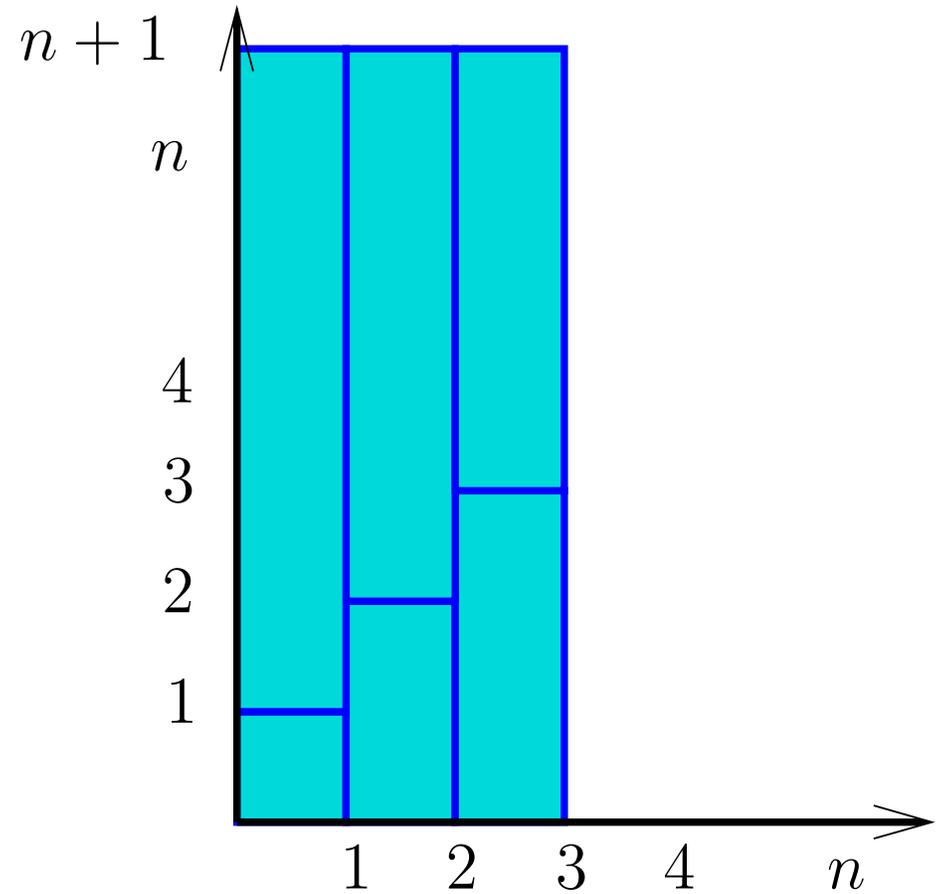
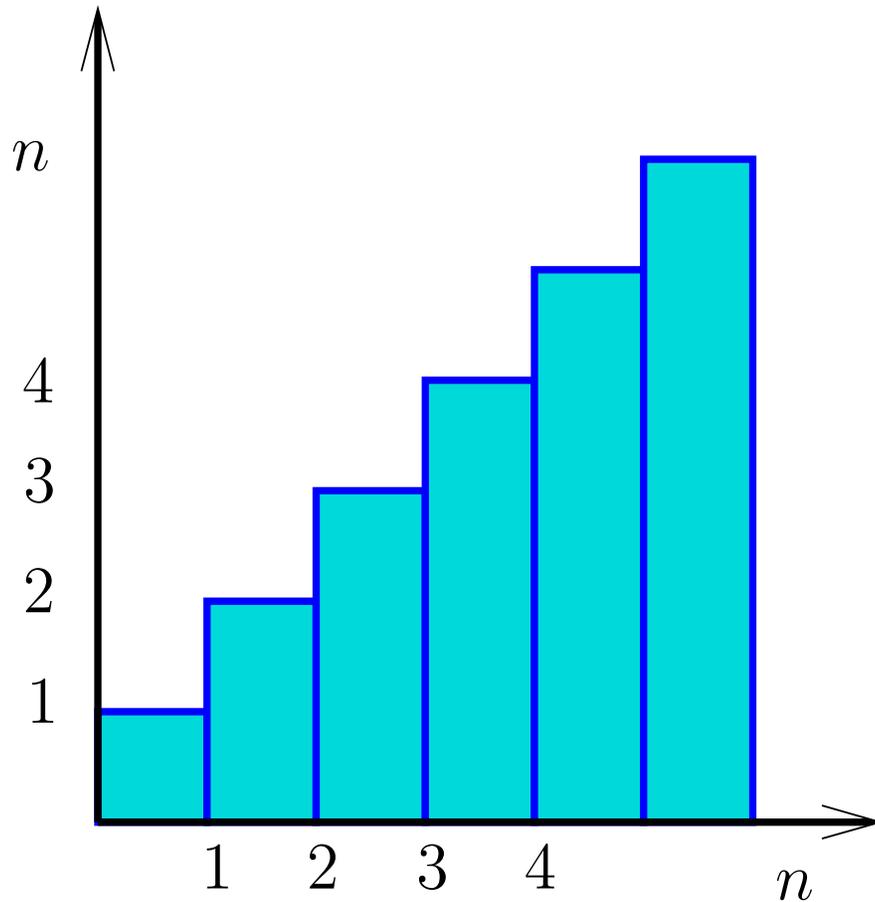
$$1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = ?$$

Carl Friedrich Gauss, 1787



$$1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = ?$$

Carl Friedrich Gauss, 1787



$$(n + 1) \times \frac{n}{2} = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Solução

Se $n \geq 4$ então no fim da execução das linhas 1–4,

$$\begin{aligned} S &= (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 4 + 3 \\ &= (n + 2)(n - 3)/2 \\ &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 3. \end{aligned}$$

Ordenação

$A[1..n]$ é **crescente** se $A[1] \leq \dots \leq A[n]$.

Problema: Rearranjar um vetor $A[1..n]$ de modo que ele fique crescente.

Entra:

| | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| | 1 | | | | | | | | | n |
| 33 | 55 | 33 | 44 | 33 | 22 | 11 | 99 | 22 | 55 | 77 |

Ordenação

$A[1..n]$ é **crescente** se $A[1] \leq \dots \leq A[n]$.

Problema: Rearranjar um vetor $A[1..n]$ de modo que ele fique crescente.

Entra:

| | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| | 1 | | | | | | | | | n |
| 33 | 55 | 33 | 44 | 33 | 22 | 11 | 99 | 22 | 55 | 77 |

Sai:

| | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| | 1 | | | | | | | | | n |
| 11 | 22 | 22 | 33 | 33 | 33 | 44 | 55 | 55 | 77 | 99 |

Ordenação por inserção

chave = 38

| | | | | | | | | | | | |
|--|----|----|----|----|----|----------|----|----|----|----------|----|
| | 1 | | | | | <i>j</i> | | | | <i>n</i> | |
| | 20 | 25 | 35 | 40 | 44 | 55 | 38 | 99 | 10 | 65 | 50 |

Ordenação por inserção

chave = 38

| | | | | | | | | | | | |
|--|----|----|----|----|----------|----------|----|----|----|----------|----|
| | 1 | | | | <i>i</i> | <i>j</i> | | | | <i>n</i> | |
| | 20 | 25 | 35 | 40 | 44 | 55 | 38 | 99 | 10 | 65 | 50 |

Ordenação por inserção

chave = 38

| | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----------|----------|----|----|----|----------|
| 1 | | | | | <i>i</i> | <i>j</i> | | | | <i>n</i> |
| 20 | 25 | 35 | 40 | 44 | 55 | 38 | 99 | 10 | 65 | 50 |

| | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----------|--|----------|----|----|----|----------|
| 1 | | | | <i>i</i> | | <i>j</i> | | | | <i>n</i> |
| 20 | 25 | 35 | 40 | 44 | | 55 | 99 | 10 | 65 | 50 |

Ordenação por inserção

chave = 38

| | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----------|----------|----|----|----|----------|
| 1 | | | | | <i>i</i> | <i>j</i> | | | | <i>n</i> |
| 20 | 25 | 35 | 40 | 44 | 55 | 38 | 99 | 10 | 65 | 50 |

| | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----------|--|----------|----|----|----|----------|
| 1 | | | | <i>i</i> | | <i>j</i> | | | | <i>n</i> |
| 20 | 25 | 35 | 40 | 44 | | 55 | 99 | 10 | 65 | 50 |

| | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----------|--|----|----------|----|----|----|----------|
| 1 | | | <i>i</i> | | | <i>j</i> | | | | <i>n</i> |
| 20 | 25 | 35 | 40 | | 44 | 55 | 99 | 10 | 65 | 50 |

Ordenação por inserção

chave = 38

| | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----------|----------|----|----|----|----------|
| 1 | | | | | <i>i</i> | <i>j</i> | | | | <i>n</i> |
| 20 | 25 | 35 | 40 | 44 | 55 | 38 | 99 | 10 | 65 | 50 |

| | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----------|--|----------|----|----|----|----------|
| 1 | | | | <i>i</i> | | <i>j</i> | | | | <i>n</i> |
| 20 | 25 | 35 | 40 | 44 | | 55 | 99 | 10 | 65 | 50 |

| | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----------|--|----|----------|----|----|----|----------|
| 1 | | | <i>i</i> | | | <i>j</i> | | | | <i>n</i> |
| 20 | 25 | 35 | 40 | | 44 | 55 | 99 | 10 | 65 | 50 |

| | | | | | | | | | | |
|----|----|----------|--|----|----|----------|----|----|----|----------|
| 1 | | <i>i</i> | | | | <i>j</i> | | | | <i>n</i> |
| 20 | 25 | 35 | | 40 | 44 | 55 | 99 | 10 | 65 | 50 |

Ordenação por inserção

chave = 38

| | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----------|----------|----|----|----|----------|
| 1 | | | | | <i>i</i> | <i>j</i> | | | | <i>n</i> |
| 20 | 25 | 35 | 40 | 44 | 55 | 38 | 99 | 10 | 65 | 50 |

| | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----------|--|----------|----|----|----|----------|
| 1 | | | | <i>i</i> | | <i>j</i> | | | | <i>n</i> |
| 20 | 25 | 35 | 40 | 44 | | 55 | 99 | 10 | 65 | 50 |

| | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----------|--|----|----------|----|----|----|----------|
| 1 | | | <i>i</i> | | | <i>j</i> | | | | <i>n</i> |
| 20 | 25 | 35 | 40 | | 44 | 55 | 99 | 10 | 65 | 50 |

| | | | | | | | | | | |
|----|----|----------|--|----|----|----------|----|----|----|----------|
| 1 | | <i>i</i> | | | | <i>j</i> | | | | <i>n</i> |
| 20 | 25 | 35 | | 40 | 44 | 55 | 99 | 10 | 65 | 50 |

| | | | | | | | | | | |
|----|----|----------|----|----|----|----------|----|----|----|----------|
| 1 | | <i>i</i> | | | | <i>j</i> | | | | <i>n</i> |
| 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 55 | 99 | 10 | 65 | 50 |

Ordenação por inserção

| | | | | | | | | | | | |
|--------------|----|----|----|----|----|----|----------|----|----|----------|----|
| <i>chave</i> | 1 | | | | | | <i>j</i> | | | <i>n</i> | |
| 99 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 55 | 99 | 10 | 65 | 50 |

Ordenação por inserção

| | | | | | | | | | | | |
|--------------|----|----|----|----|----|----|----------|----|----|----------|----|
| <i>chave</i> | 1 | | | | | | <i>j</i> | | | <i>n</i> | |
| 99 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 55 | 99 | 10 | 65 | 50 |

Ordenação por inserção

chave 1 j n

| | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 99 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 55 | 99 | 10 | 65 | 50 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

chave 1 j n

| | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 55 | 99 | 10 | 65 | 50 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

Ordenação por inserção

chave 1 j n

| | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 99 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 55 | 99 | 10 | 65 | 50 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

chave 1 j n

| | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 10 | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 55 | 99 | 65 | 50 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

Ordenação por inserção

chave 1 j n

| | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 99 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 55 | 99 | 10 | 65 | 50 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

chave 1 j n

| | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 10 | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 55 | 99 | 65 | 50 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

chave 1 j n

| | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 65 | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 55 | 99 | 65 | 50 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

Ordenação por inserção

chave 1 j n

| | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 99 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 55 | 99 | 10 | 65 | 50 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

chave 1 j n

| | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 10 | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 55 | 99 | 65 | 50 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

chave 1 j n

| | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 65 | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 55 | 65 | 99 | 50 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

Ordenação por inserção

chave 1 j n

| | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 99 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 55 | 99 | 10 | 65 | 50 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

chave 1 j n

| | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 10 | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 55 | 99 | 65 | 50 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

chave 1 j n

| | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 65 | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 55 | 65 | 99 | 50 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

chave 1 j

| | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 50 | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 55 | 65 | 99 | 50 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

Ordenação por inserção

chave 1 *j* *n*

| | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 99 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 55 | 99 | 10 | 65 | 50 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

chave 1 *j* *n*

| | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 10 | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 55 | 99 | 65 | 50 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

chave 1 *j* *n*

| | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 65 | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 55 | 65 | 99 | 50 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

chave 1 *j*

| | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 50 | 10 | 20 | 25 | 35 | 38 | 40 | 44 | 50 | 55 | 65 | 99 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

Ordenação por inserção

Algoritmo rearranja $A[1..n]$ em ordem crescente.

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

1 **para** $j \leftarrow 2$ **até** n **faça**

2 $chave \leftarrow A[j]$

3 $i \leftarrow j - 1$

4 **enquanto** $i \geq 1$ **e** $A[i] > chave$ **faça**

5 $A[i + 1] \leftarrow A[i]$ ▷ desloca

6 $i \leftarrow i - 1$

7 $A[i + 1] \leftarrow chave$ ▷ insere

Ordenação por inserção

Algoritmo rearranja $A[1 .. n]$ em ordem crescente

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

0 $j \leftarrow 2$

1 **enquanto** $j \leq n$ **faça**

2 $chave \leftarrow A[j]$

3 $i \leftarrow j - 1$

4 **enquanto** $i \geq 1$ **e** $A[i] > chave$ **faça**

5 $A[i + 1] \leftarrow A[i]$ ▷ desloca

6 $i \leftarrow i - 1$

7 $A[i + 1] \leftarrow chave$ ▷ insere

8 $j \leftarrow j + 1$

O algoritmo faz o que promete?

Correção do algoritmo!

O algoritmo faz o que promete?

Correção do algoritmo!

Relação **invariante** chave:

(i0) na linha 1 vale que: $A[1..j-1]$ é crescente.

| | | | | | | | | | | | |
|--|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|-----|----|
| | 1 | | | | | j | | | | n | |
| | 20 | 25 | 35 | 40 | 44 | 55 | 38 | 99 | 10 | 65 | 50 |

O algoritmo faz o que promete?

Correção do algoritmo!

Relação **invariante** chave:

(i0) na linha 1 vale que: $A[1..j-1]$ é crescente.

| | | | | | | | | | | | |
|--|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|-----|----|
| | 1 | | | | | j | | | | n | |
| | 20 | 25 | 35 | 40 | 44 | 55 | 38 | 99 | 10 | 65 | 50 |

Supondo que a invariante vale.

Correção do algoritmo é **evidente**.

No início da última iteração das linhas 1–7 tem-se que $j = n + 1$. Da invariante concluí-se que $A[1..n]$ é crescente.

Mais invariantes

Na linha 4 vale que:

(i1) $A[1 \dots i]$ e $A[i + 2 \dots j]$ são crescentes

(i2) $A[1 \dots i] \leq A[i + 2 \dots j]$

(i3) $A[i + 2 \dots j] > chave$

| | | | | | | | | | | | |
|--------------|----|----|----------|--|----|----|----------|----|----|----|----------|
| <i>chave</i> | 1 | | <i>i</i> | | | | <i>j</i> | | | | <i>n</i> |
| 38 | 20 | 25 | 35 | | 40 | 44 | 55 | 99 | 10 | 65 | 50 |

Mais invariantes

Na linha 4 vale que:

(i1) $A[1 \dots i]$ e $A[i + 2 \dots j]$ são crescentes

(i2) $A[1 \dots i] \leq A[i + 2 \dots j]$

(i3) $A[i + 2 \dots j] > chave$

| | | | | | | | | | | | |
|--------------|----|----|----------|--|----|----|----------|----|----|----|----------|
| <i>chave</i> | 1 | | <i>i</i> | | | | <i>j</i> | | | | <i>n</i> |
| 38 | 20 | 25 | 35 | | 40 | 44 | 55 | 99 | 10 | 65 | 50 |

invariantes (i1), (i2) e (i3)

+ condição de parada do **enquanto** da linha 4

+ atribuição da linha 7 \Rightarrow validade (i0)

Demonstre!

Correção de algoritmos iterativos

Estrutura “típica” de demonstrações da correção de algoritmos iterativos através de suas relações invariantes consiste em:

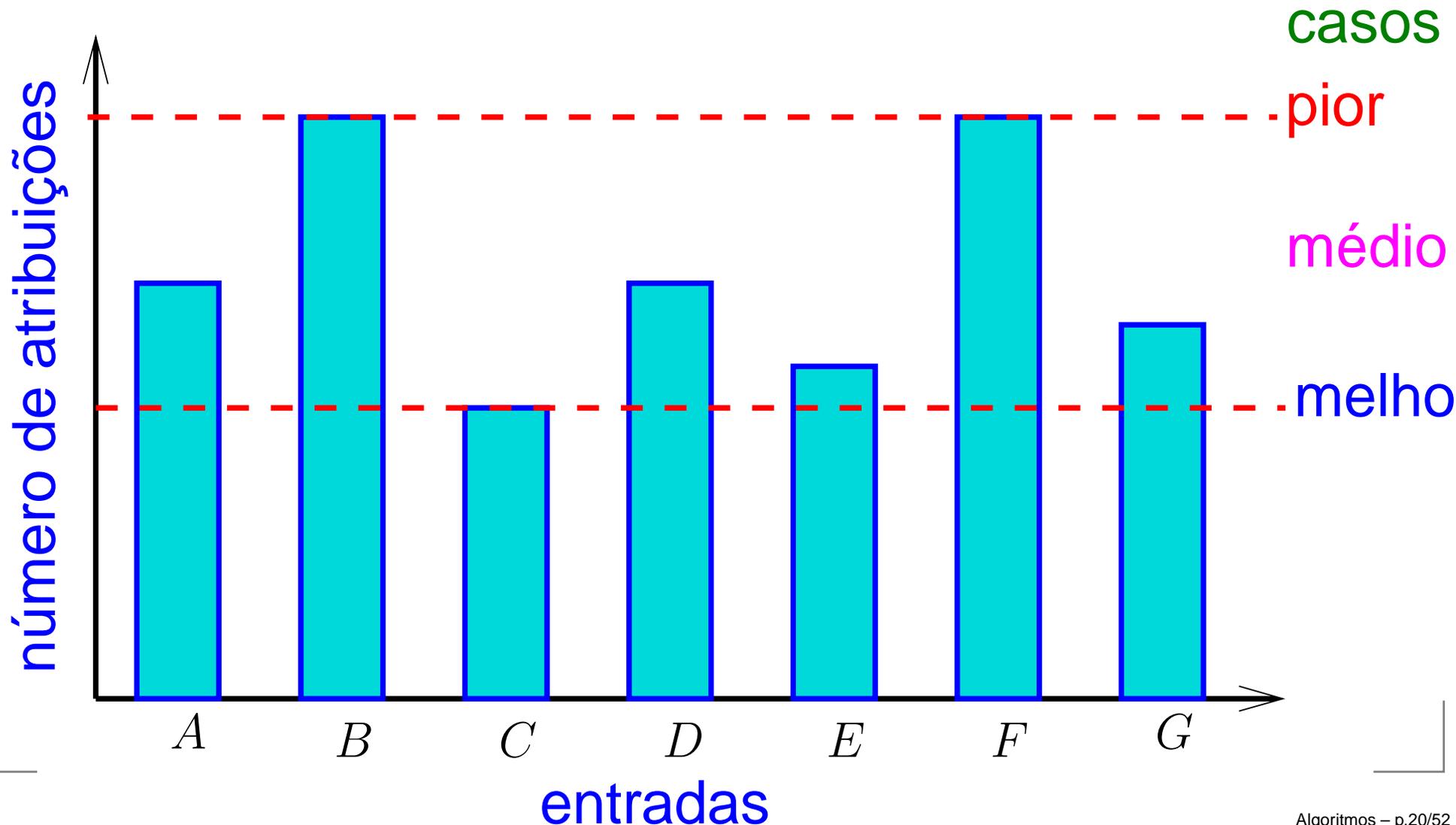
1. verificar que a relação **vale no início** da primeira iteração;
2. demonstrar que
se a relação **vale no início** da iteração, **então** ela **vale no final** da iteração (com os papéis de alguns atores possivelmente trocados);
3. concluir que, se **relação vale** no início da **última iteração**, **então** a **relação junto com a condição** de parada **implicam na correção** do algoritmo.

Quantas atribuições (\leftarrow) algoritmo faz?

Quantas atribuições (\leftarrow) algoritmo faz?

Número mínimo, médio ou máximo?

Melhor caso, caso médio, pior caso?



Quantas atribuições (\leftarrow) algoritmo faz?

LINHAS 3–6 ($A, j, chave$)

3 $i \leftarrow j - 1$ $\triangleright 2 \leq j \leq n$

4 **enquanto** $i \geq 1$ **e** $A[i] > chave$ **faça**

5 $A[i + 1] \leftarrow A[i]$

6 $i \leftarrow i - 1$

| linha | atribuições (número máximo) |
|--------------|-----------------------------|
| 3 | ? |
| 4 | ? |
| 5 | ? |
| 6 | ? |
| total | ? |

Quantas atribuições (\leftarrow) algoritmo faz?

LINHAS 3–6 ($A, j, chave$)

3 $i \leftarrow j - 1$ $\triangleright 2 \leq j \leq n$

4 **enquanto** $i \geq 1$ **e** $A[i] > chave$ **faça**

5 $A[i + 1] \leftarrow A[i]$

6 $i \leftarrow i - 1$

| linha | atribuições (número máximo) |
|--------------|-----------------------------|
| 3 | = 1 |
| 4 | = 0 |
| 5 | ? |
| 6 | ? |
| total | ? |

Quantas atribuições (\leftarrow) algoritmo faz?

LINHAS 3–6 ($A, j, chave$)

3 $i \leftarrow j - 1$ $\triangleright 2 \leq j \leq n$

4 **enquanto** $i \geq 1$ **e** $A[i] > chave$ **faça**

5 $A[i + 1] \leftarrow A[i]$

6 $i \leftarrow i - 1$

| linha | atribuições (número máximo) |
|--------------|-----------------------------|
| 3 | = 1 |
| 4 | = 0 |
| 5 | $\leq j - 1$ |
| 6 | ? |
| total | ? |

Quantas atribuições (\leftarrow) algoritmo faz?

LINHAS 3–6 ($A, j, chave$)

3 $i \leftarrow j - 1 \quad \triangleright 2 \leq j \leq n$

4 **enquanto** $i \geq 1$ **e** $A[i] > chave$ **faça**

5 $A[i + 1] \leftarrow A[i]$

6 $i \leftarrow i - 1$

| linha | atribuições (número máximo) |
|-------|-----------------------------|
| 3 | = 1 |
| 4 | = 0 |
| 5 | $\leq j - 1$ |
| 6 | $\leq j - 1$ |

total $\leq 2j - 1 \leq 2n - 1$

Quantas atribuições (\leftarrow) algoritmo faz?

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

- 1 **para** $j \leftarrow 2$ **até** n **faça** $\triangleright j \leftarrow j + 1$ escondido
- 2 $chave \leftarrow A[j]$
- 3 LINHAS 3–6 ($A, j, chave$)
- 7 $A[i + 1] \leftarrow chave$

| linha | atribuições (número máximo) |
|--------------|-----------------------------|
| 1 | ? |
| 2 | ? |
| 3–6 | ? |
| 7 | ? |
| total | ? |

Quantas atribuições (\leftarrow) algoritmo faz?

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

- 1 **para** $j \leftarrow 2$ **até** n **faça** $\triangleright j \leftarrow j + 1$ escondido
- 2 $chave \leftarrow A[j]$
- 3 LINHAS 3–6 ($A, j, chave$)
- 7 $A[i + 1] \leftarrow chave$

| linha | atribuições (número máximo) |
|-------|-----------------------------|
| 1 | $= n - 1 + 1$ |
| 2 | $= n - 1$ |
| 3–6 | $\leq (n - 1)(2n - 1)$ |
| 7 | $= n - 1$ |

$$\text{total} \leq 2n^2 - 1$$

Análise mais fina

| linha | atribuições (número máximo) |
|--------------|-----------------------------|
| 1 | ? |
| 2 | ? |
| 3 | ? |
| 4 | ? |
| 5 | ? |
| 6 | ? |
| 7 | ? |
| total | ? |

Análise mais fina

| linha | atribuições (número máximo) |
|-------|---|
| 1 | $= n - 1 + 1$ |
| 2 | $= n - 1$ |
| 3 | $= n - 1$ |
| 4 | $= 0$ |
| 5 | $\leq 1 + 2 + \dots + (n-1) = n(n-1)/2$ |
| 6 | $\leq 1 + 2 + \dots + (n-1) = n(n-1)/2$ |
| 7 | $= n - 1$ |

$$\text{total} \leq n^2 + 3n - 3$$

$n^2 + 3n - 3$ versus n^2

| n | $n^2 + 3n - 3$ | n^2 |
|-----|----------------|-------|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 7 | 4 |

$n^2 + 3n - 3$ versus n^2

| n | $n^2 + 3n - 3$ | n^2 |
|-----|----------------|-------|
|-----|----------------|-------|

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 4 |
|---|---|---|

| | | |
|---|----|---|
| 3 | 15 | 9 |
|---|----|---|

| | | |
|----|-----|-----|
| 10 | 127 | 100 |
|----|-----|-----|

$n^2 + 3n - 3$ versus n^2

| n | $n^2 + 3n - 3$ | n^2 |
|------|----------------|---------|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 7 | 4 |
| 3 | 15 | 9 |
| 10 | 127 | 100 |
| 100 | 10297 | 10000 |
| 1000 | 1002997 | 1000000 |

$n^2 + 3n - 3$ versus n^2

| n | $n^2 + 3n - 3$ | n^2 |
|--------|----------------|-------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 7 | 4 |
| 3 | 15 | 9 |
| 10 | 127 | 100 |
| 100 | 10297 | 10000 |
| 1000 | 1002997 | 1000000 |
| 10000 | 100029997 | 100000000 |
| 100000 | 10000299997 | 10000000000 |

n^2 domina os outros termos

Exercício 1.B

Se a execução de cada linha de código consome **1 unidade** de tempo, qual o consumo total?

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

```
1  para  $j \leftarrow 2$  até  $n$  faça
2       $chave \leftarrow A[j]$ 

3       $i \leftarrow j - 1$ 
4      enquanto  $i \geq 1$  e  $A[i] > chave$  faça
5           $A[i + 1] \leftarrow A[i]$     ▷ desloca
6           $i \leftarrow i - 1$ 

7       $A[i + 1] \leftarrow chave$     ▷ insere
```

Solução

| linha | todas as execuções da linha |
|--------------|---|
| 1 | $= n$ |
| 2 | $= n - 1$ |
| 3 | $= n - 1$ |
| 4 | $\leq 2 + 3 + \dots + n = (n - 1)(n + 2)/2$ |
| 5 | $\leq 1 + 2 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$ |
| 6 | $\leq 1 + 2 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$ |
| 7 | $= n - 1$ |
| total | $\leq (3/2)n^2 + (7/2)n - 4$ |

Exercício 1.C

Se a execução da linha i consome t_i unidades de tempo, para $i = 1, \dots, 7$, qual o consumo total?

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

```
1  para  $j \leftarrow 2$  até  $n$  faça
2       $chave \leftarrow A[j]$ 

3       $i \leftarrow j - 1$ 
4      enquanto  $i \geq 1$  e  $A[i] > chave$  faça
5           $A[i + 1] \leftarrow A[i]$   $\triangleright$  desloca
6           $i \leftarrow i - 1$ 

7       $A[i + 1] \leftarrow chave$   $\triangleright$  insere
```

Solução para $t_i = 1$

| linha | todas as execuções da linha |
|--------------|---|
| 1 | $= n$ |
| 2 | $= n - 1$ |
| 3 | $= n - 1$ |
| 4 | $\leq 2 + 3 + \dots + n = (n - 1)(n + 2)/2$ |
| 5 | $\leq 1 + 2 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$ |
| 6 | $\leq 1 + 2 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$ |
| 7 | $= n - 1$ |
| total | $\leq (3/2)n^2 + (7/2)n - 4$ |

Solução

| linha | todas as execuções da linha | |
|--------------|---|--------------|
| 1 | = n | $\times t_1$ |
| 2 | = $n - 1$ | $\times t_2$ |
| 3 | = $n - 1$ | $\times t_3$ |
| 4 | $\leq 2 + 3 + \dots + n = (n - 1)(n + 2)/2$ | $\times t_4$ |
| 5 | $\leq 1 + 2 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$ | $\times t_5$ |
| 6 | $\leq 1 + 2 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$ | $\times t_6$ |
| 7 | = $n - 1$ | $\times t_7$ |
| total | \leq | ? |

Solução

| linha | todas as execuções da linha | |
|-------|---|--------------|
| 1 | = n | $\times t_1$ |
| 2 | = $n - 1$ | $\times t_2$ |
| 3 | = $n - 1$ | $\times t_3$ |
| 4 | $\leq 2 + 3 + \dots + n = (n - 1)(n + 2)/2$ | $\times t_4$ |
| 5 | $\leq 1 + 2 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$ | $\times t_5$ |
| 6 | $\leq 1 + 2 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$ | $\times t_6$ |
| 7 | = $n - 1$ | $\times t_7$ |

$$\begin{aligned} \text{total} &\leq ((t_4 + t_5 + t_6)/2) \times n^2 \\ &+ (t_1 + t_2 + t_3 + t_4/2 - t_5/2 - t_6/2 + t_7) \times n \\ &- (t_2 + t_3 + t_4 + t_7) \end{aligned}$$

Solução

| linha | todas as execuções da linha | | |
|-------|-----------------------------|--|--------------|
| 1 | = | n | $\times t_1$ |
| 2 | = | $n - 1$ | $\times t_2$ |
| 3 | = | $n - 1$ | $\times t_3$ |
| 4 | \leq | $2 + 3 + \dots + n = (n - 1)(n + 2)/2$ | $\times t_4$ |
| 5 | \leq | $1 + 2 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$ | $\times t_5$ |
| 6 | \leq | $1 + 2 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$ | $\times t_6$ |
| 7 | = | $n - 1$ | $\times t_7$ |

$$\text{total} \leq c_2 \times n^2 + c_1 \times n + c_0$$

c_2, c_1, c_0 são constantes que **dependem da máquina**.

n^2 é para **sempre!** Está nas entranhas do algoritmo!

Exercícios

Exercício 1.D (bom!)

Quanto vale S no fim do seguinte algoritmo?

```
1    $S \leftarrow 0$ 
2    $i \leftarrow n$ 
3   enquanto  $i > 0$  faça
4       para  $j \leftarrow 1$  até  $i$  faça
5            $S \leftarrow S + 1$ 
6        $i \leftarrow \lfloor i/2 \rfloor$ 
```

Exercício 1.E

Prove a invariante do algoritmo **ORDENA-POR-INSERÇÃO**.

Exercício 1.F

Quantas comparações faz o algoritmo **ORDENA-POR-INSERÇÃO**, no pior caso, ao receber um vetor $A[1..n]$?

Exercício 1.G

Quantas atribuições faz o algoritmo abaixo?

```
 $s \leftarrow 0$ 
para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
     $s \leftarrow s + i$ 
devolva  $s$ 
```

Escreva um algoritmo melhorado que produza o mesmo efeito com menos atribuições.

Exercícios

Exercício 1.H (AU 3.7.1)

O algoritmo abaixo opera sobre um vetor $A[1..n]$. Quantas atribuições ele faz no pior caso? Quantas comparações?

```
1    $s \leftarrow 0$ 
2   para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
3        $s \leftarrow s + A[i]$ 
4    $m \leftarrow s/n$ 
5    $k \leftarrow 1$ 
6   para  $i \leftarrow 2$  até  $n$  faça
7       se  $(A[i] - m)^2 < (A[k] - m)^2$ 
8           então  $k \leftarrow i$ 
9   devolva  $k$ 
```

Exercício 1.I (AU 3.7.2)

O fragmento abaixo opera sobre uma matriz $A[1..n, 1..n]$. Quantas atribuições faz?

```
1   para  $i \leftarrow 1$  até  $n - 1$  faça
2       para  $j \leftarrow i + 1$  até  $n$  faça
3           para  $k \leftarrow i$  até  $n$  faça
4                $A[j, k] \leftarrow A[j, k] - A[i, k] \cdot A[j, i] / A[i, i]$ 
```

Exercícios

Exercício 1.J (AU 3.7.3*)

Quantas atribuições faz o algoritmo?

SUMPOWERSOFTWO (n)

1 $s \leftarrow 0$

2 **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**

3 $j \leftarrow i$

4 **enquanto** $2 \lfloor j/2 \rfloor = j$ **faça**

5 $j \leftarrow \lfloor j/2 \rfloor$

6 $s \leftarrow s + 1$

7 **devolva** s

Chão, teto, log etc

CLRS 3.2, A.1

AU 2.9

Definições

$\lfloor x \rfloor :=$ inteiro i tal que $i \leq x < i + 1$

$\lceil x \rceil :=$ inteiro j tal que $j - 1 < x \leq j$

Diz-se que

$\lfloor x \rfloor$ é o **chão** de x

$\lceil x \rceil$ é o **teto** de x

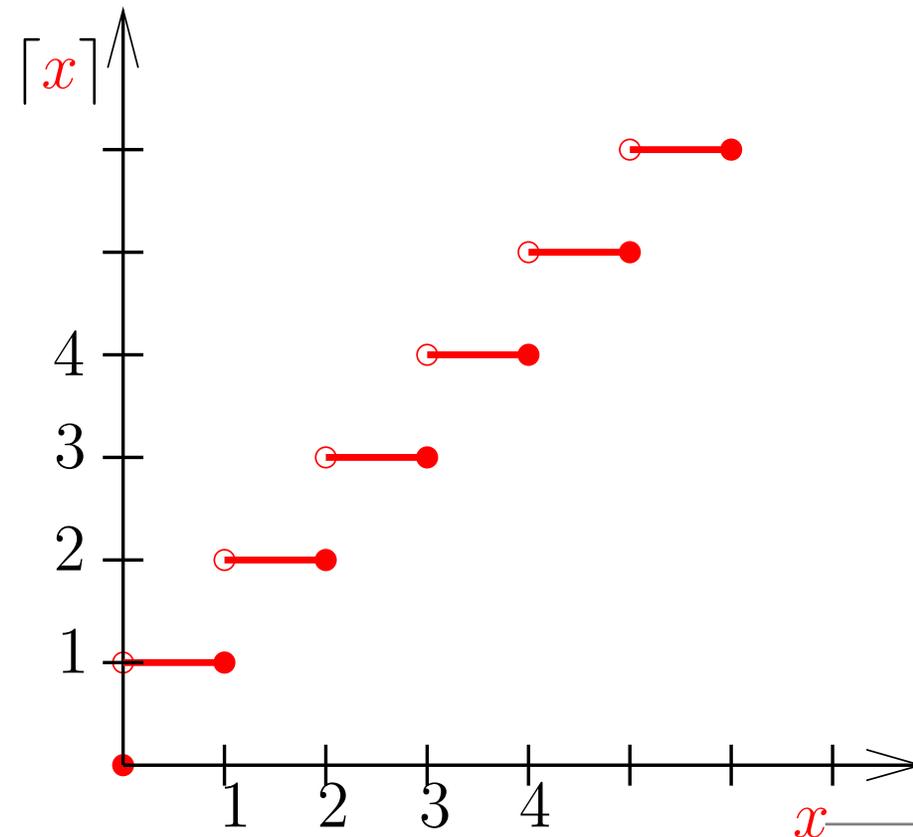
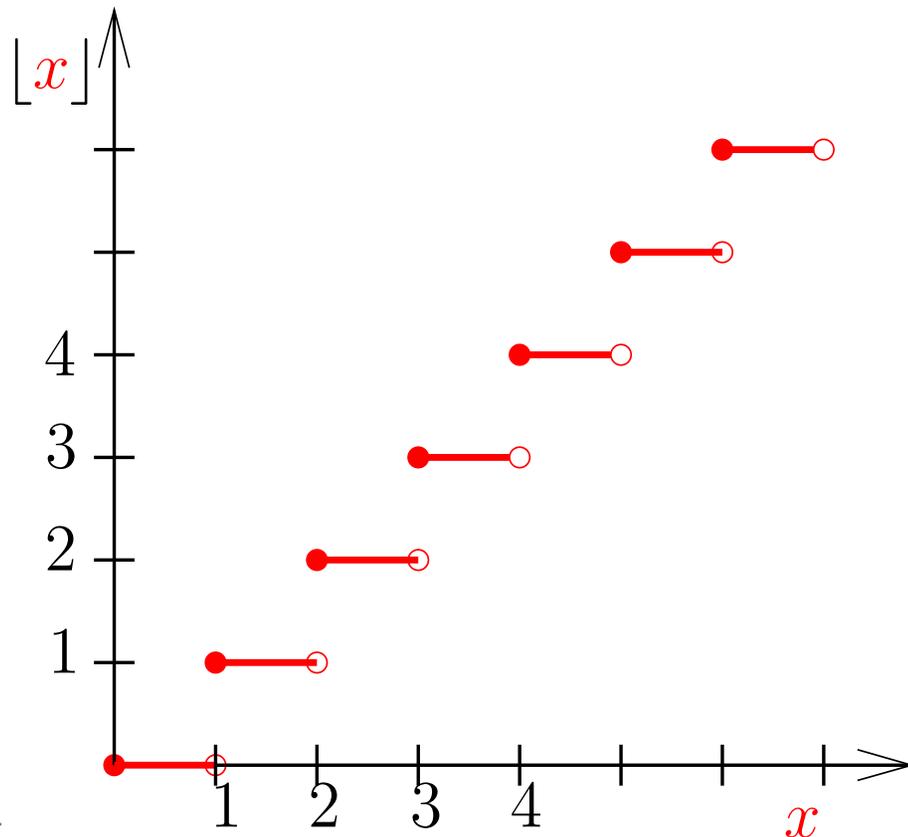
Exercício A1.A

Desenhe os gráficos das funções $\lfloor x \rfloor$ e $\lceil x \rceil$ para x não-negativo.

Exercício A1.A

Desenhe os gráficos das funções $\lfloor x \rfloor$ e $\lceil x \rceil$ para x não-negativo.

Solução



Exercícios

Exercício A1.B

Mostre que para qualquer inteiro $n \geq 1$.

$$\frac{n-1}{2} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{n}{2} \quad \text{e} \quad \frac{n}{2} \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \frac{n+1}{2}$$

para qualquer inteiro $n \geq 1$.

Exercício A1.C

É verdade que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x + y \rfloor$ para quaisquer x e y ? É verdade que $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil = \lceil x + y \rceil$ para quaisquer x e y ?

Exercício A1.D

Desenhe os gráficos das funções $\lg x$ e 2^x para x inteiro não-negativo.

Exercícios

Exercício A1.E

Explique o significado da expressão $\log_{3/2} n$.

Exercício A1.F

Calcule $5^{\log_5 n}$, $\log_3 3^n$ e $\lg 2^n$.

Exercício A1.G

Qual a relação entre $\log_8 n$ e $\log_2 n$?

Exercício A1.H

Se $i := \lfloor \lg n \rfloor$, qual a relação entre n e 2^i ?

Se $j := \lceil \lg n \rceil$, qual a relação entre n e 2^j ?

Exercício A1.I

É verdade que $\lfloor \lg n \rfloor + 1 = \lceil \lg(n+1) \rceil$ para todo inteiro $n \geq 1$?

Exercício A1.J

Escreva um algoritmo que calcule $\lfloor \lg n \rfloor$.

Exercício A1.L

Mostre que para qualquer número real x tem-se $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$.

Exercício A1.M

Mostre que $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n$ para todo inteiro positivo n .

Mais exercícios

Exercício A1.N

Mostre que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$, com igualdade se e somente se $x + y - 1 < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
Encontre uma fórmula análoga para $\lceil \cdot \rceil$.

Exercício A1.O

Se c é inteiro e x é racional, é verdade que $\lceil cx \rceil = c \lceil x \rceil$?

Exercício A1.P

Use a notação $\lfloor \cdot \rfloor$ para representar o resto da divisão de n por 7.

Exercício A1.Q

É verdade que $\lceil 2 \lceil 2n/3 \rceil / 3 \rceil = \lceil 4n/9 \rceil$? É verdade que $\lfloor 2 \lfloor 2n/3 \rfloor / 3 \rfloor = \lfloor 4n/9 \rfloor$?

Exercício A1.R

É verdade que $\lfloor \lfloor n/2 \rfloor / 2 \rfloor = \lfloor n/4 \rfloor$?

Exercício A1.S

Se n, a, b são inteiros positivos, é verdade que $\lfloor \lfloor n/a \rfloor / b \rfloor = \lfloor n/ab \rfloor$?

Exercício A1.T

É verdade que $\lfloor \lg n \rfloor \geq \lg(n-1)$ para todo inteiro $n \geq 2$? É verdade que $\lceil \lg n \rceil \leq \lg(n+1)$ para todo inteiro $n \geq 1$?

Mais exercícios ainda

Exercício A1.U

Prove que para qualquer número racional $x > 1$ tem-se

$$\lfloor \lg x \rfloor \leq \lg \lfloor x \rfloor \leq \lg x \leq \lg \lceil x \rceil \leq \lceil \lg x \rceil$$

Exercício A1.V

Quanto vale $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n + \dots$?