# Melhores momentos

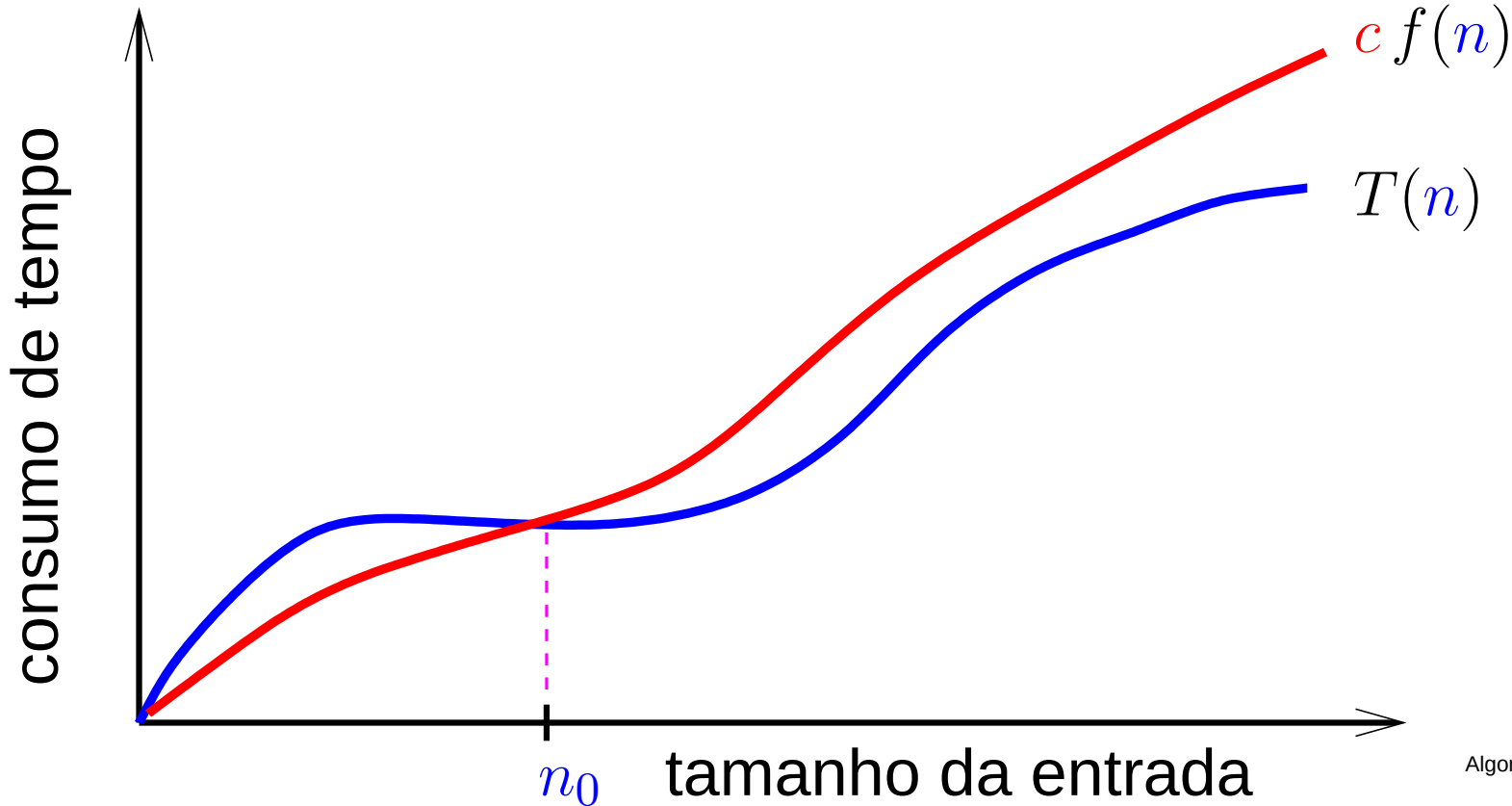
AULA PASSADA

# Definição

Sejam $T(n)$ e $f(n)$ funções dos inteiros no reais. Dizemos que $T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ se existem constantes positivas $c$ e $n_0$ tais que

$$T(n) \leq c\, f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.



# Notação $\mathrm{O}$

Intuitivamente...

$\mathrm{O}(f(n))$ $\approx$ funções q não crescem mais rápido que $f(n)$

$\approx$ funções menores ou iguais a um múltiplo de $f(n)$

$n^2$ $\quad$ $(3/2)n^2$ $\quad$ $9999n^2$ $\quad$ $n^2/1000$ $\quad$ etc.

crescem todas com a mesma velocidade, são todas $\mathrm{O}(n^2)$.

- $n^2 + 100n \lg n$ é $\mathrm{O}(n^2)$
- $n \lg n + 33n$ é $\mathrm{O}(n \lg n)$
- $0{,}00001n^3 - 200n^2$ não é $\mathrm{O}(n^2)$
- $10^{100}$ é $\mathrm{O}(1)$

# Uso da notação $\mathrm{O}$

$\mathrm{O}(f(n)) = \{T(n) :$ existem $c$ e $n_0$ tq $T(n) \leq cf(n), n \geq n_0\}$

"$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$" deve ser entendido como "$T(n) \in \mathrm{O}(f(n))$".

"$T(n) = \mathrm{O}(f(n))$" deve ser entendido como "$T(n) \in \mathrm{O}(f(n))$".

"$T(n) \leq \mathrm{O}(f(n))$" é feio.

"$T(n) \geq \mathrm{O}(f(n))$" não faz sentido!

"$T(n)$ é $g(n) + \mathrm{O}(f(n))$" significa que existem constantes positivas $c$ e $n_0$ tais que

$$T(n) \leq g(n) + c\, f(n)$$

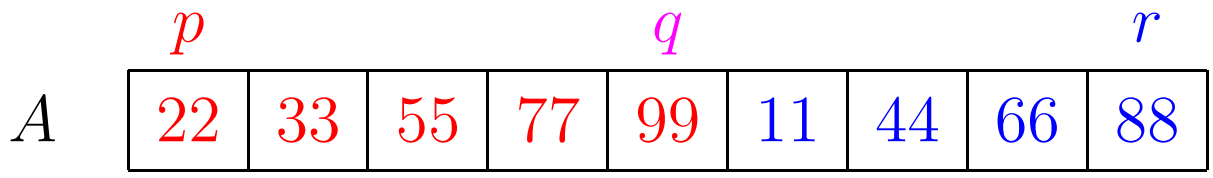
para todo $n \geq n_0$.

# Análise da intercalação

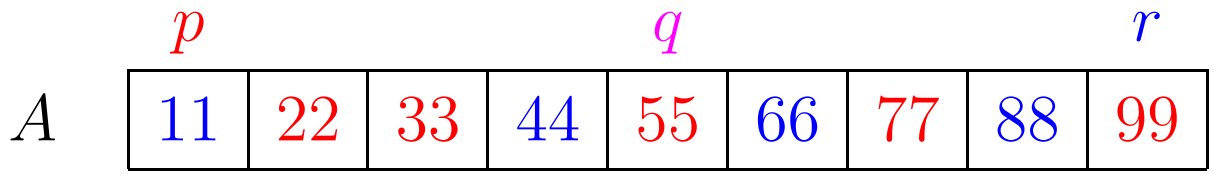
Problema: Dados $A[p\,..\,q]$ e $A[q{+}1\,..\,r]$ crescentes, rearranjar $A[p\,..\,r]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Para que valores de $q$ o problema faz sentido?

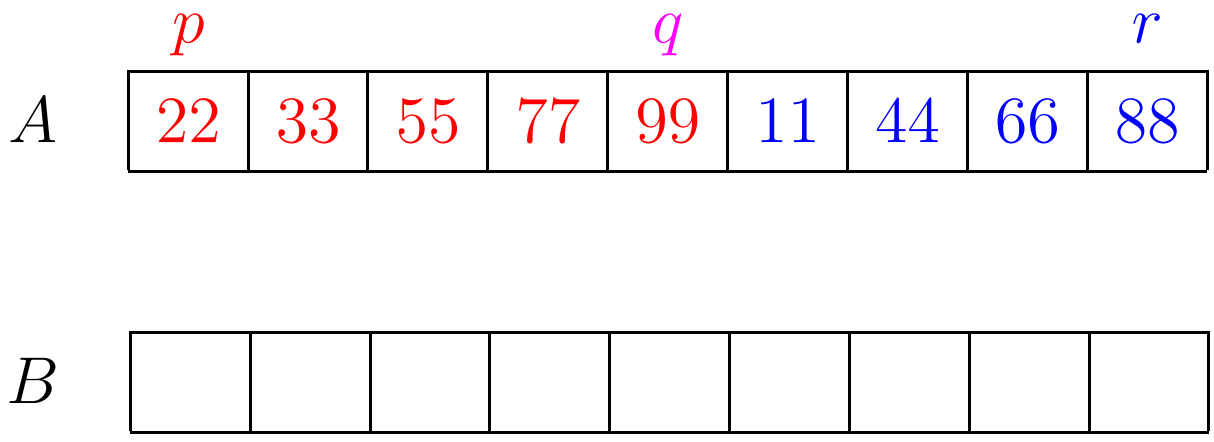
Entra:



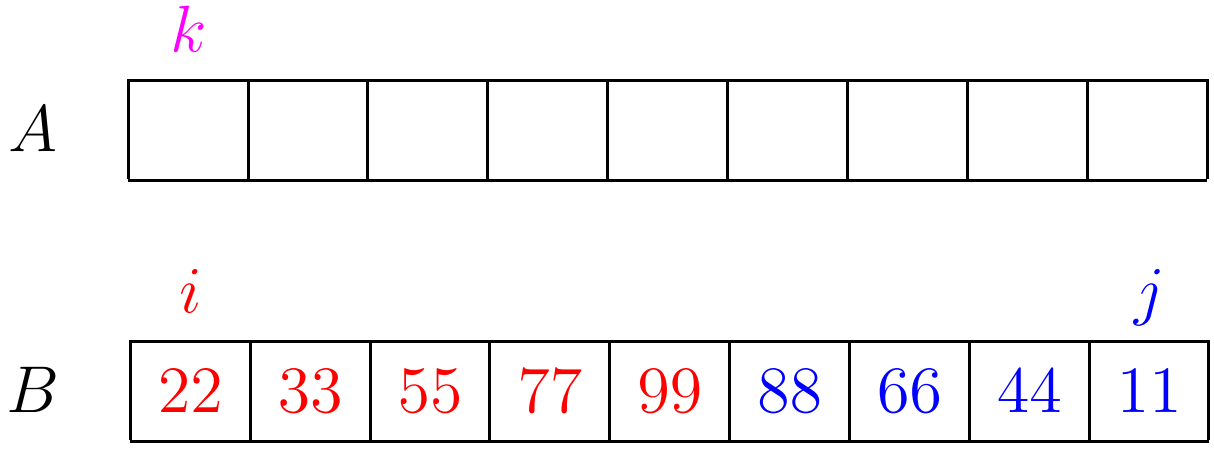

Sai:



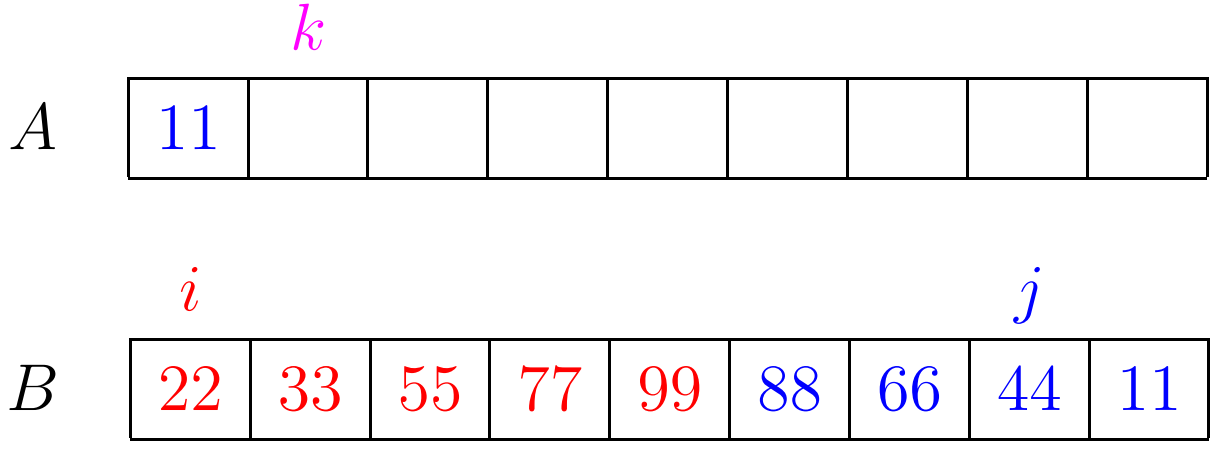
# Intercalação



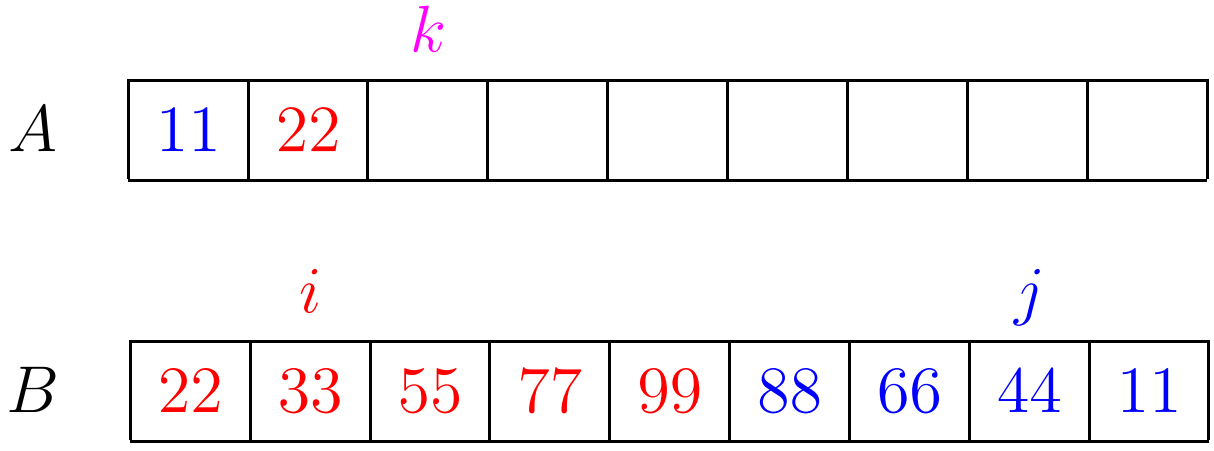
# Intercalação



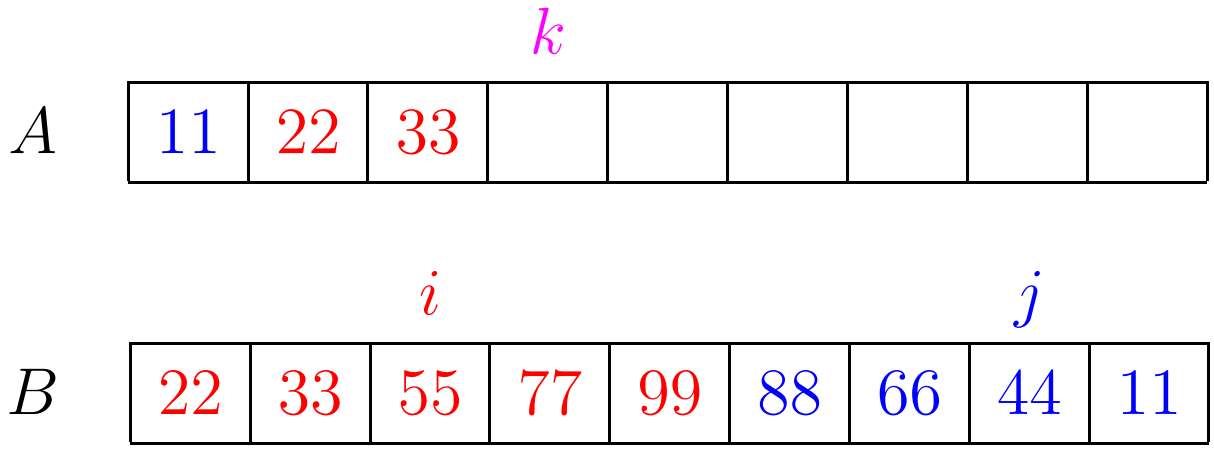
# Intercalação



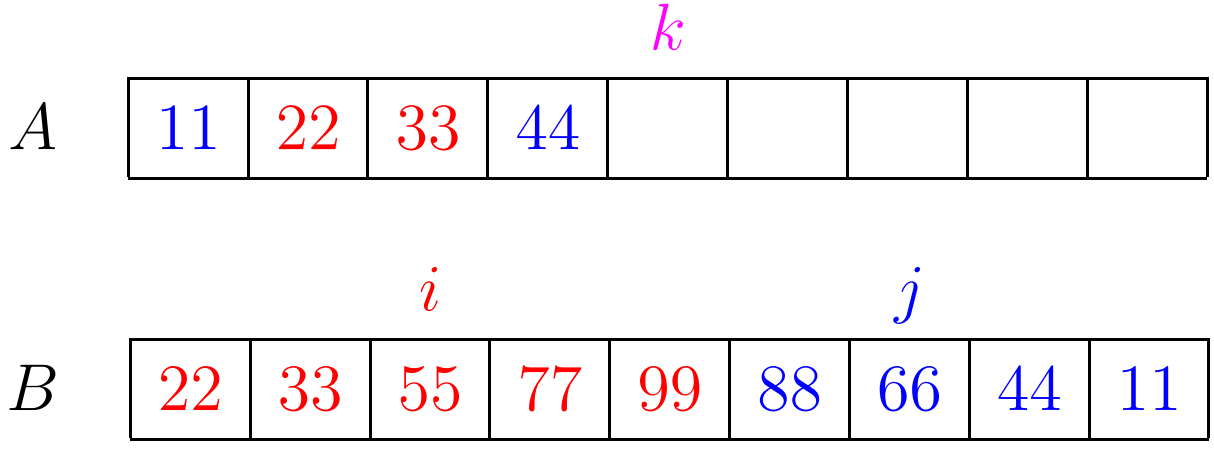
# Intercalação



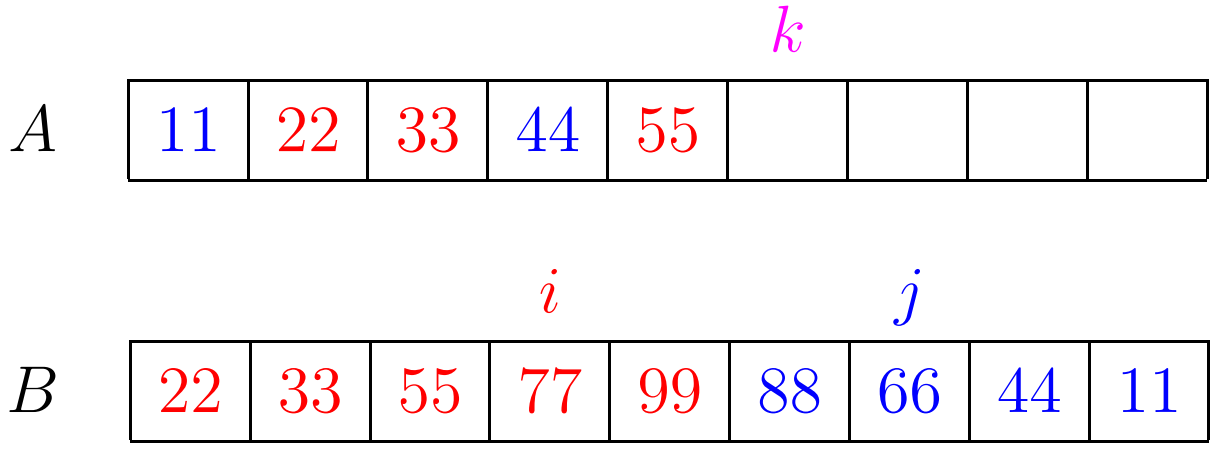
# Intercalação



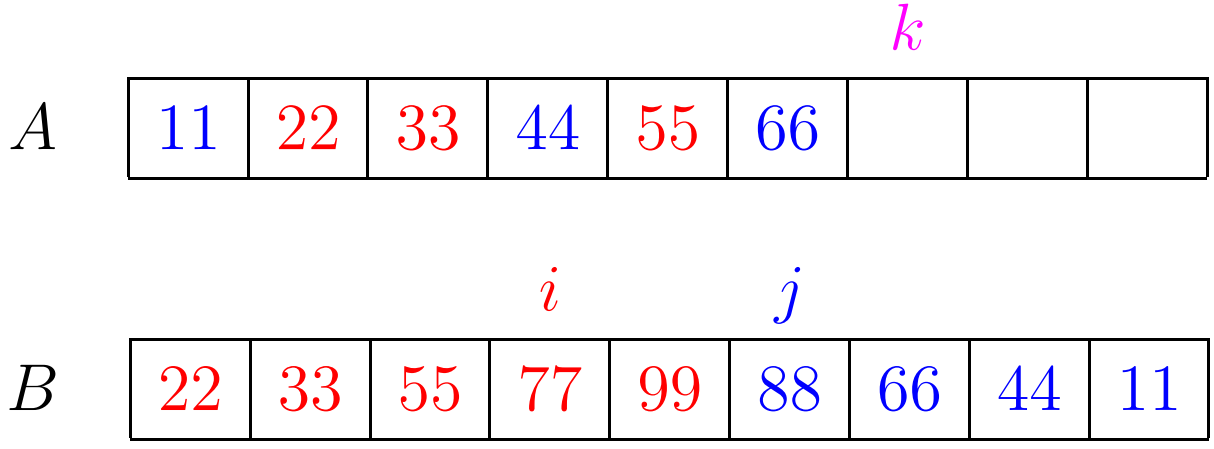
# Intercalação



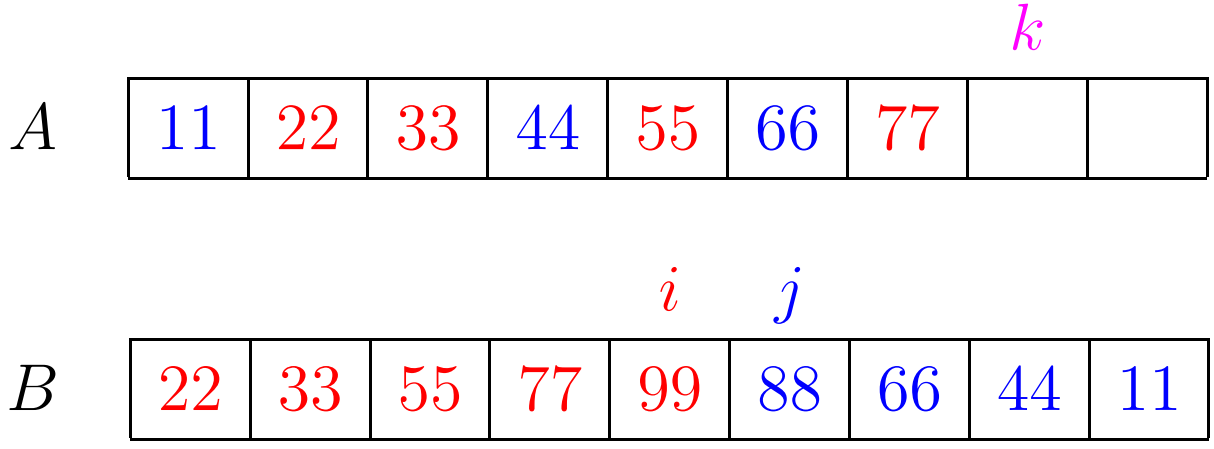
# Intercalação



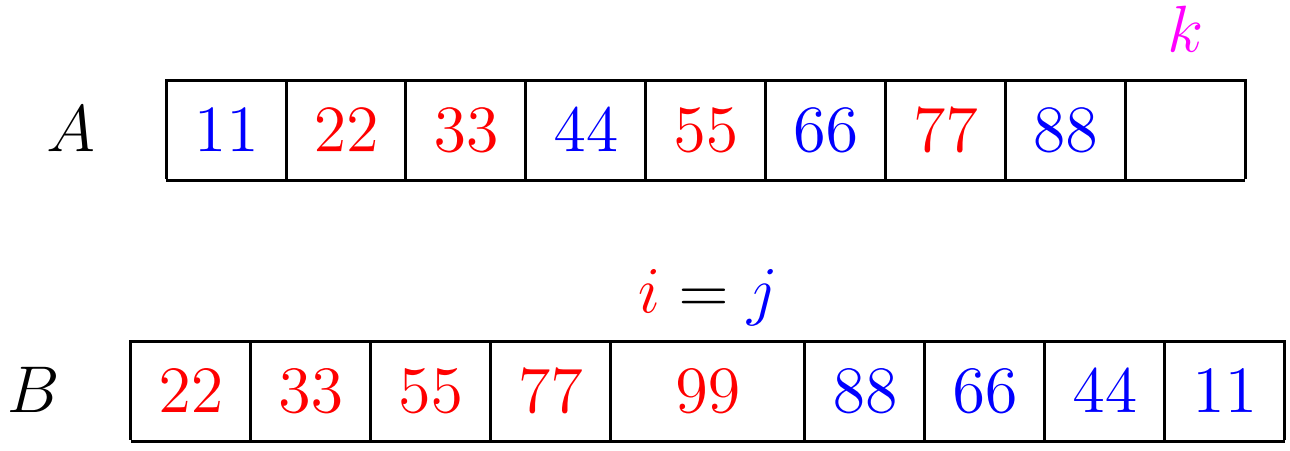
# Intercalação



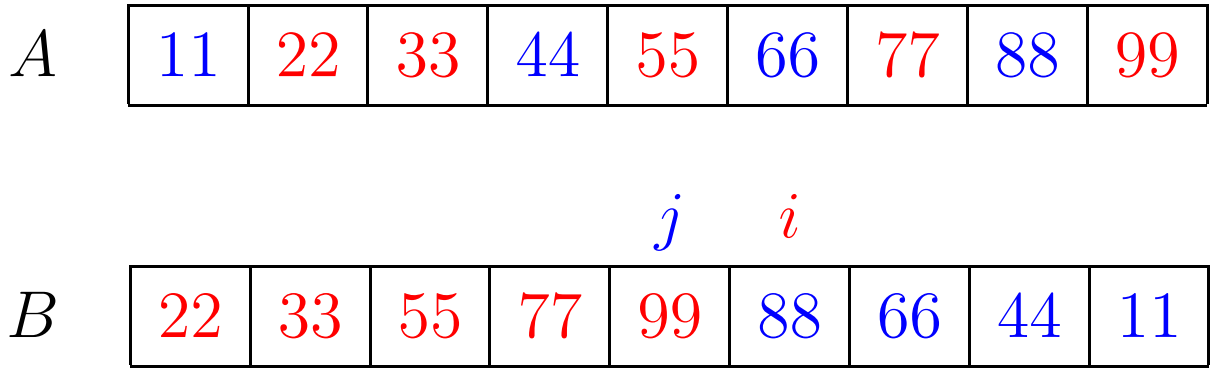
# Intercalação



# Intercalação



# Intercalação



# Intercalação

```
INTERCALA (A, p, q, r)
 0   ▷ B[p..r] é um vetor auxiliar
 1   para i ← p até q faça
 2         B[i] ← A[i]
 3   para j ← q + 1 até r faça
 4         B[r + q + 1 − j] ← A[j]
 5   i ← p
 6   j ← r
 7   para k ← p até r faça
 8         se B[i] ≤ B[j]
 9               então A[k] ← B[i]
10                     i ← i + 1
11               senão A[k] ← B[j]
12                     j ← j − 1
```

# Consumo de tempo

Quanto tempo consome em função de $n := r - p + 1$ (tamanho do problema)?

| linha | todas as execuções da linha |
|---|---|
| 1 | $= \quad q - p + 2 \;=\; n - r + q + 1$ |
| 2 | $= \quad q - p + 1 \;=\; n - r + q$ |
| 3 | $= \quad r - (q + 1) + 2 \;=\; n - q + p$ |
| 4 | $= \quad r - (q + 1) + 1 \;=\; n - q + p - 1$ |
| 5 | $= \quad 1$ |
| 6 | $= \quad 1$ |
| 7 | $= \quad r - p + 2 \;=\; n + 1$ |
| 8 | $= \quad r - p + 1 \;=\; n$ |
| 9–12 | $= \quad 2\,(r - p + 1) \;=\; 2n$ |
| total | $= \quad 8n - 2(r - p + 1) + 5 = \; 6n + 5$ |

# Conclusão

O algoritmo INTERCALA consome $6n + 5$ unidades de tempo.

# Consumo de tempo em $\mathrm{O}$

Quanto tempo consome em função de $n := r - p + 1$ (tamanho do problema)?

| linha | consumo de todas as execuções da linha |
|---|---|
| 1–4 | $\mathrm{O}(n)$ |
| 5–6 | $\mathrm{O}(1)$ |
| 7 | $n\mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(n)$ |
| 8 | $n\mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(n)$ |
| 9–12 | $n\mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(n)$ |
| total | $\mathrm{O}(4n + 1)$ = $\mathrm{O}(n)$ |

# Conclusão

O algoritmo INTERCALA consome $\mathrm{O}(n)$ unidades de tempo.

Também escreve-se

O algoritmo INTERCALA consome tempo $\mathrm{O}(n)$.

# $n\mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(n)$

"$n\mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(n)$" significa "$n\mathrm{O}(1) \subset \mathrm{O}(n)$".

Ou seja, se $T(n)$ é $\mathrm{O}(1)$, então $nT(n)$ é $\mathrm{O}(n)$.

Prova: De fato, se $T(n)$ é $\mathrm{O}(1)$ então existem constantes $c$ e $n_0$, tais que

$$T(n) \leq c \times 1$$

para todo $n \geq n_0$. Desta forma,

$$n\,T(n) \leq n\,c \times 1 = c\,n$$

para todo $n \geq n_0$. Logo $n\,T(n)$ é $\mathrm{O}(n)$.

# AULA 3

# Irmãos de $O$

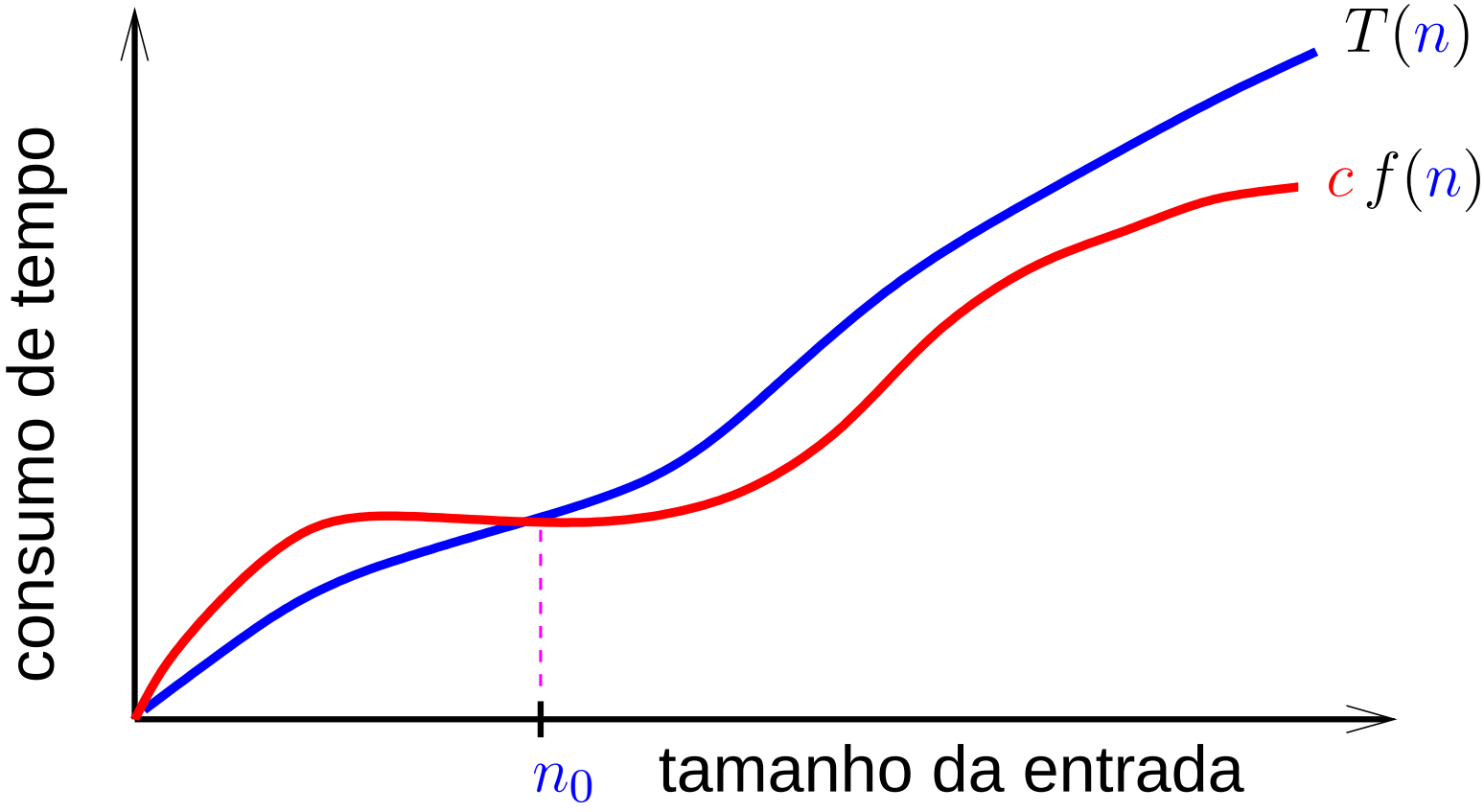
CLRS 3.1

# Definição

Dizemos que $T(n)$ é $\Omega(f(n))$ se existem constantes positivas $c$ e $n_0$ tais que

$$c\,f(n) \leq T(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

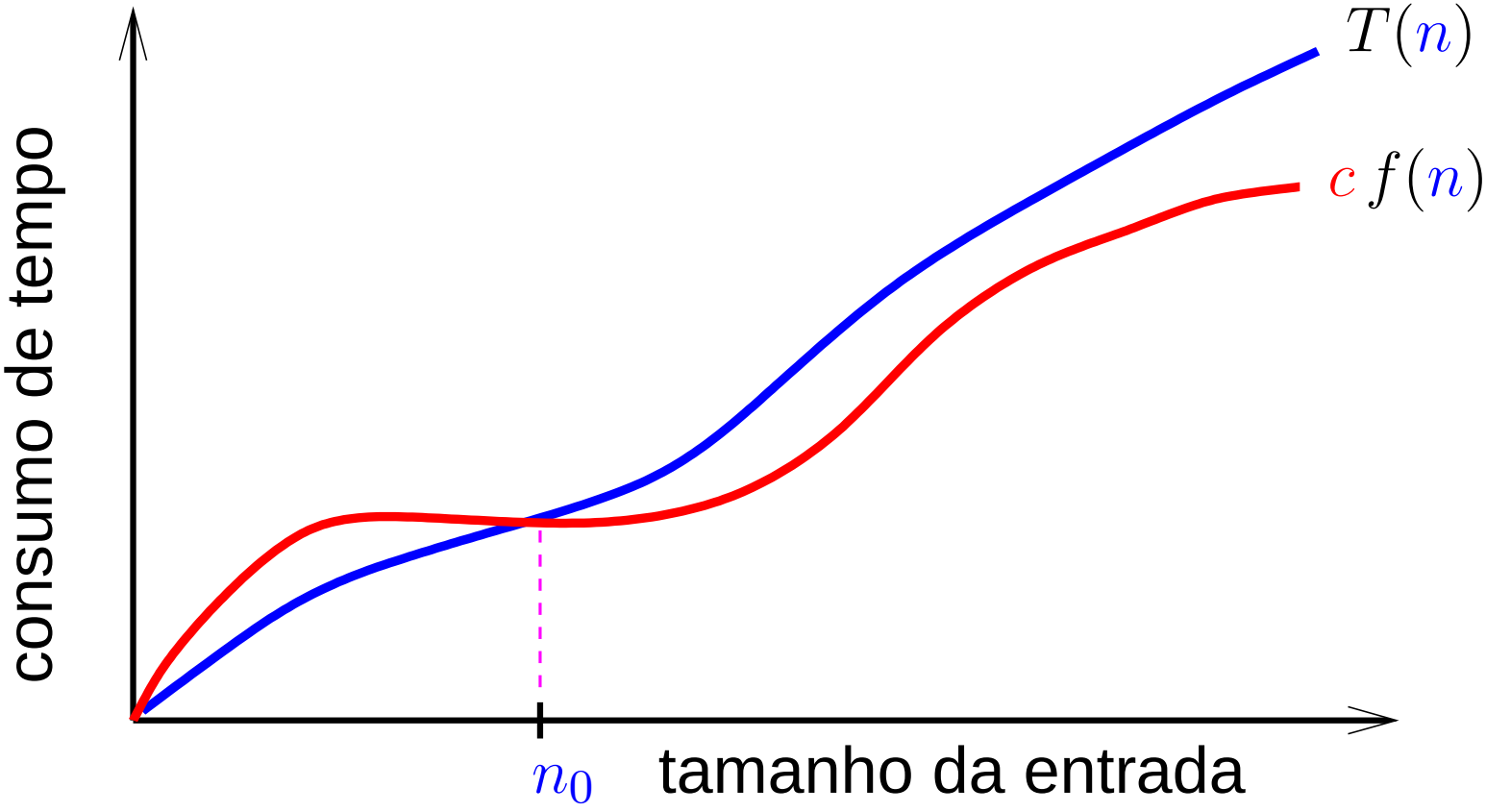


# Mais informal

$T(n) = \Omega(f(n))$ se existe $c > 0$ tal que

$$c\, f(n) \leq T(n)$$

para todo $n$ suficientemente GRANDE.



# Exemplos

**Exemplo 1**

Se $T(n) \geq 0.001n^2$ para todo $n \geq 8$, então $T(n)$ é $\Omega(n^2)$.

# Exemplos

**Exemplo 1**

Se $T(n) \geq 0.001n^2$ para todo $n \geq 8$, então $T(n)$ é $\Omega(n^2)$.

Prova: Aplique a definição com $c = 0.001$ e $n_0 = 8$.

# Exemplo 2

O consumo de tempo do INTERCALA é $\mathrm{O}(n)$ e também $\Omega(n)$.

# Exemplo 2

O consumo de tempo do INTERCALA é $\mathrm{O}(n)$ e também $\Omega(n)$.

| linha | todas as execuções da linha |
|---|---|
| 1 | $= \quad q - p + 2 \;=\; n - r + q + 1$ |
| 2 | $= \quad q - p + 1 \;=\; n - r + q$ |
| 3 | $= \quad r - (q + 1) + 2 \;=\; n - q + p$ |
| 4 | $= \quad r - (q + 1) + 1 \;=\; n - q + p - 1$ |
| 5 | $= \quad 1$ |
| 6 | $= \quad 1$ |
| 7 | $= \quad r - p + 2 \;=\; n + 1$ |
| 8 | $= \quad r - p + 1 \;=\; n$ |
| 9–12 | $= \quad 2\,(r - p + 1) \;=\; 2n$ |
| total | $= \quad 8n - 2(r - p + 1) + 5 = \; 6n + 5$ |

# Exemplo 3

Se $T(n)$ é $\Omega(f(n))$, então $f(n)$ é $\mathrm{O}(T(n))$.

# Exemplo 3

Se $T(n)$ é $\Omega(f(n))$, então $f(n)$ é $\mathrm{O}(T(n))$.

Prova: Se $T(n)$ é $\Omega(f(n))$, então existem constantes positivas $c$ e $n_0$ tais que

$$c\,f(n) \leq T(n)$$

para todo $n \geq n_0$. Logo,

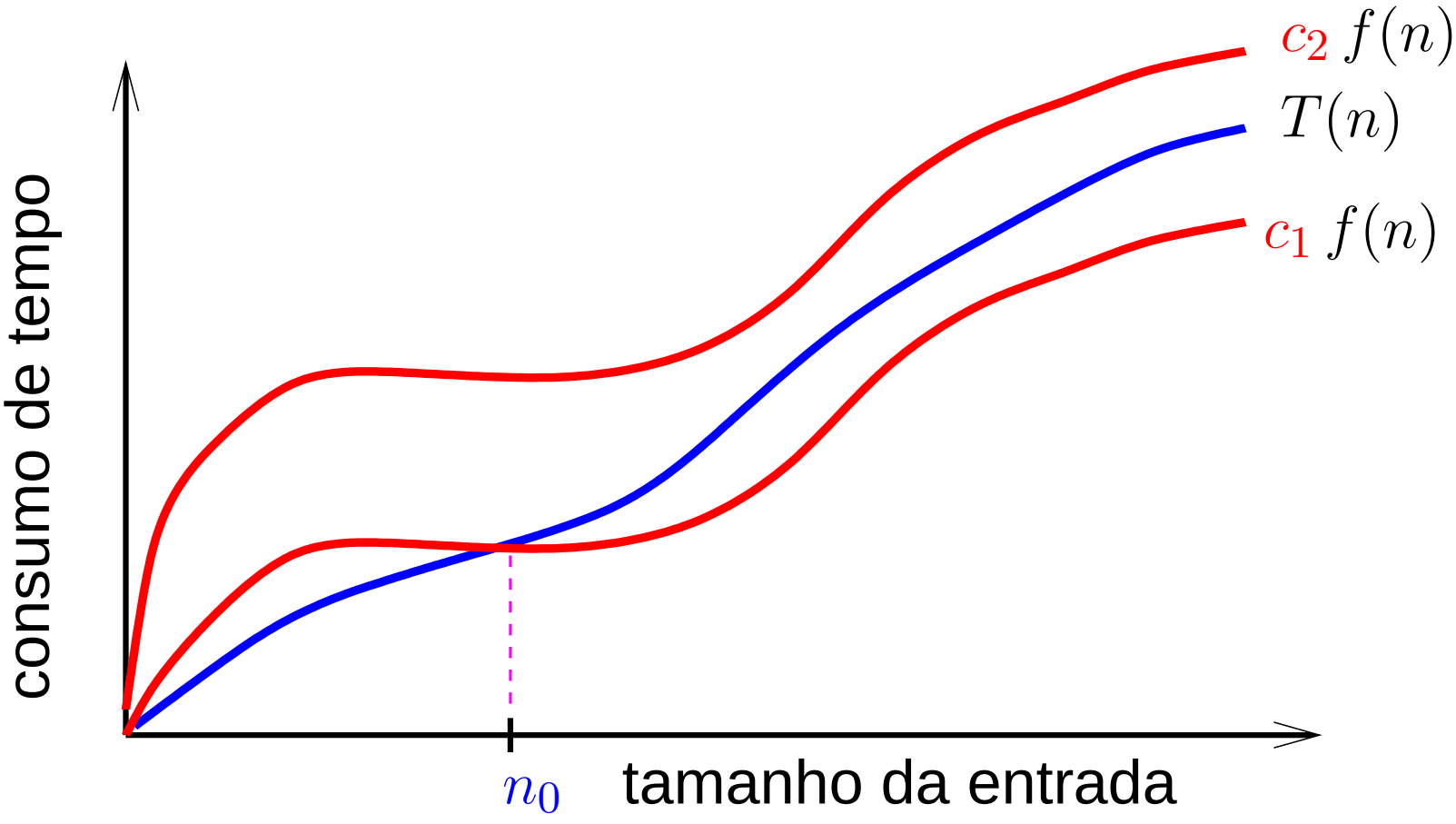
$$f(n) \leq 1/c\,T(n)$$

para todo $n \geq n_0$. Portanto, $f(n)$ é $\mathrm{O}(T(n))$.

# Definição

Sejam $T(n)$ e $f(n)$ funções dos inteiros no reais.
Dizemos que $T(n)$ é $\Theta(f(n))$ se

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ e $T(n)$ é $\Omega(f(n))$.

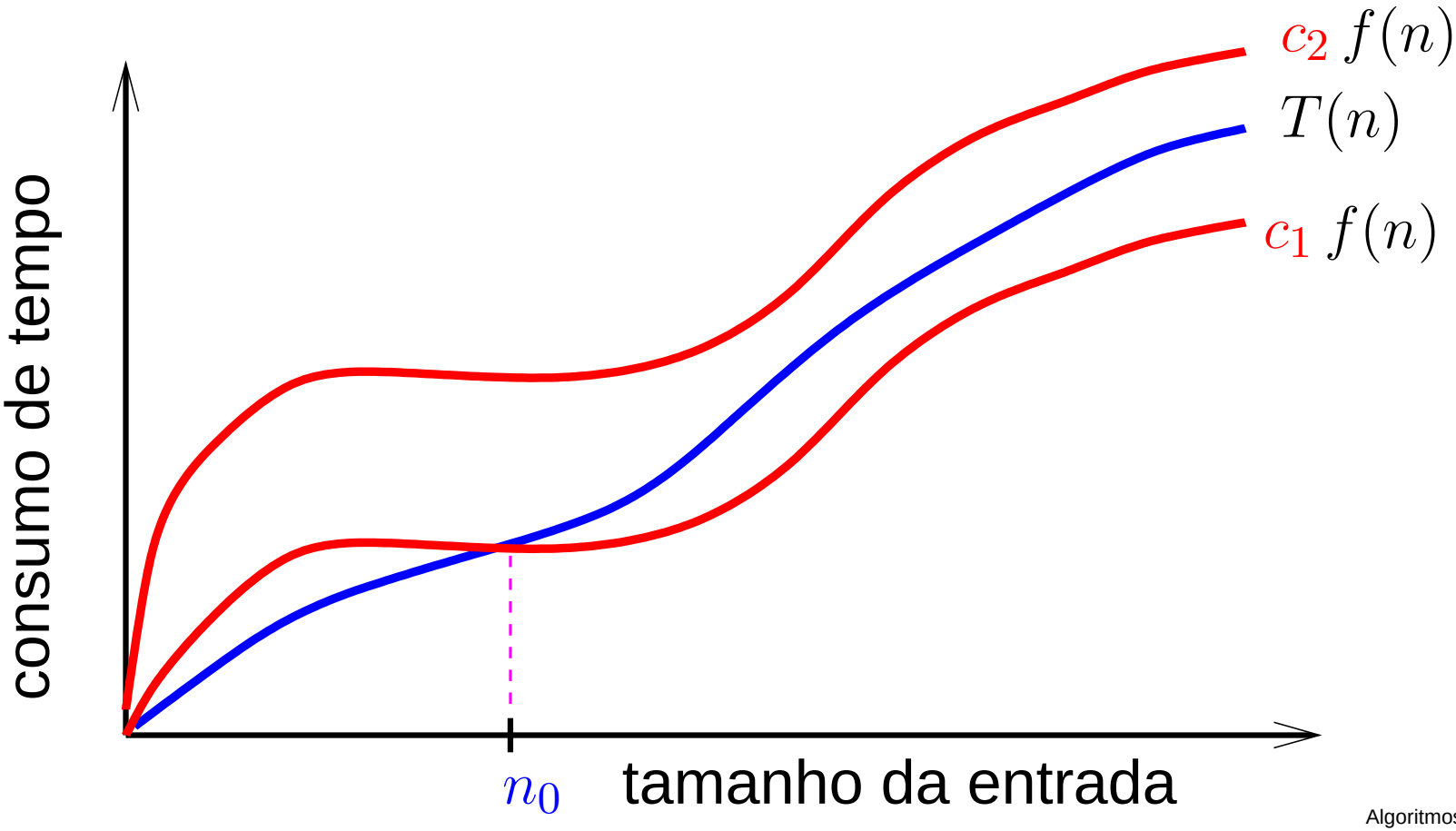


# Definição

Dizemos que $T(n)$ é $\Theta(f(n))$ se se existem constantes positivas $c_1, c_2$ e $n_0$ tais que

$$c_1\, f(n) \;\leq\; T(n) \;\leq\; c_2\, f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.



# Intuitivamente

Comparação assintótica, ou seja, para $n$ ENORME.

| comparação | comparação assintótica |
|---|---|
| $T(n) \leq f(n)$ | $T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ |
| $T(n) \geq f(n)$ | $T(n)$ é $\Omega(f(n))$ |
| $T(n) = f(n)$ | $T(n)$ é $\Theta(f(n))$ |

# Tamanho máximo de problemas

Suponha que cada operação consome $1$ microsegundo ($1\mu s$).

| consumo de tempo($\mu s$) | Tamanho máximo de problemas $(n)$ | | |
|---|---|---|---|
| | 1 segundo | 1 minuto | 1 hora |
| $400n$ | 2500 | 150000 | 9000000 |
| $20\,n\,\lceil \lg n \rceil$ | 4096 | 166666 | 7826087 |
| $2n^2$ | 707 | 5477 | 42426 |
| $n^4$ | 31 | 88 | 244 |
| $2^n$ | 19 | 25 | 31 |

Michael T. Goodrich e Roberto Tamassia, *Projeto de Algoritmos*, Bookman.

# Crescimento de algumas funções

| $n$ | $\lg n$ | $\sqrt{n}$ | $n \lg n$ | $n^2$ | $n^3$ | $2^n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1,4 | 2 | 4 | 8 | 4 |
| 4 | 2 | 2 | 8 | 16 | 64 | 16 |
| 8 | 3 | 2,8 | 24 | 64 | 512 | 256 |
| 16 | 4 | 4 | 64 | 256 | 4096 | 65536 |
| 32 | 5 | 5,7 | 160 | 1024 | 32768 | 4294967296 |
| 64 | 6 | 8 | 384 | 4096 | 262144 | 1,8 $10^{19}$ |
| 128 | 7 | 11 | 896 | 16384 | 2097152 | 3,4 $10^{38}$ |
| 256 | 8 | 16 | 1048 | 65536 | 16777216 | 1,1 $10^{77}$ |
| 512 | 9 | 23 | 4608 | 262144 | 134217728 | 1,3 $10^{154}$ |
| 1024 | 10 | 32 | 10240 | 1048576 | 1,1 $10^{9}$ | 1,7 $10^{308}$ |

# Nomes de classes $\Theta$

| classe | nome |
|---|---|
| $\Theta(1)$ | constante |
| $\Theta(\log n)$ | logarítmica |
| $\Theta(n)$ | linear |
| $\Theta(n \log n)$ | $n \log n$ |
| $\Theta(n^2)$ | quadrática |
| $\Theta(n^3)$ | cúbica |
| $\Theta(n^k)$ com $k \geq 1$ | polinomial |
| $\Theta(2^n)$ | exponencial |
| $\Theta(a^n)$ com $a > 1$ | exponencial |

# Palavras de Cautela

Suponha que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são algoritmos para um mesmo problema. Suponha que o consumo de tempo de $\mathcal{A}$ é "essencialmente" $100\,n$ e que o consumo de tempo de $\mathcal{B}$ é "essencialmente" $n \log_{10} n$.

# Palavras de Cautela

Suponha que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são algoritmos para um mesmo problema. Suponha que o consumo de tempo de $\mathcal{A}$ é "essencialmente" $100\,n$ e que o consumo de tempo de $\mathcal{B}$ é "essencialmente" $n \log_{10} n$.

$100\,n$ é $\Theta(n)$ e $n \log_{10} n$ é $\Theta(n \lg n)$.
Logo, $\mathcal{A}$ é assintoticamente mais eficiente que $\mathcal{B}$.

# Palavras de Cautela

Suponha que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são algoritmos para um mesmo problema. Suponha que o consumo de tempo de $\mathcal{A}$ é "essencialmente" $100\,n$ e que o consumo de tempo de $\mathcal{B}$ é "essencialmente" $n \log_{10} n$.

$100\,n$ é $\Theta(n)$ e $n \log_{10} n$ é $\Theta(n \lg n)$.
Logo, $\mathcal{A}$ é assintoticamente mais eficiente que $\mathcal{B}$.

$\mathcal{A}$ é mais eficiente que $B$ para $n \geq 10^{100}$.

$10^{100} =$ um *googol*
$\approx$ número de átomos no universo observável
$=$ número ENORME

# Palavras de Cautela

Conclusão:

> Lembre das constantes e termos de baixa ordem que estão "escondidos" na notação assintótica.

Em geral um algoritmo que consome tempo $\Theta(n \lg n)$, e com fatores constantes razoáveis, é bem eficiente.

Um algoritmo que consome tempo $\Theta(n^2)$ pode, algumas vezes ser satisfatório.

Um algoritmo que consome tempo $\Theta(2^n)$ é dificilmente aceitável.

Do ponto de vista de AA, eficiente $=$ polinomial.

# Exercícios

**Exercício 6.A**
Já sabemos que ORDENA-POR-INSERÇÃO é $\mathrm{O}(n^2)$.
Mostre que o algoritmo é $\Omega(n)$.

**Exercício 6.B**
Mostre que ORDENA-POR-INSERÇÃO é $\Omega(n^2)$
no pior caso.

**Exercício 6.C**
Mostre que ORDENA-POR-INSERÇÃO é $\mathrm{O}(n)$
no melhor caso.

# Mais exercícios

**Exercício 6.D**

Prove que $n^2 + 10n + 20 = \Omega(n^2)$. Prove que $n^2 - 10n - 20 = \Theta(n^2)$.

**Exercício 6.E**

Prove que $n = \Omega(\lg n)$.

**Exercício 6.F**

Prove que $\lg n = \Theta(\log_{10} n)$.

**Exercício 6.G**

É verdade que $2^n = \Omega(3^n)$?

**Exercício 6.H**

É verdade que $2n^3 + 5\sqrt{n} = \Theta(n^3)$?

# Mais exercícios ainda

**Exercício 6.I**

Suponha que os algoritmos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ só dependem de um parâmetro $n$. Suponha ainda que $\mathcal{A}$ consome $S(n)$ unidades de tempo enquanto $\mathcal{B}$ consome $T(n)$ unidades de tempo. Quero provar que algoritmo $\mathcal{A}$ é pelo menos tão eficiente quanto o algoritmo $\mathcal{B}$ (no sentido assintótico). Devo mostrar que existe $f(n)$ tal que

$S(n) = \mathrm{O}(f(n))$ e $T(n) = \mathrm{O}(f(n))$?

$S(n) = \mathrm{O}(f(n))$ e $T(n) = \Omega(f(n))$?

$S(n) = \Omega(f(n))$ e $T(n) = \mathrm{O}(f(n))$?

$S(n) = \Omega(f(n))$ e $T(n)\Omega(f(n))$?

Que devo fazer para mostrar que $\mathcal{A}$ é mais eficiente que $\mathcal{B}$?

**Exercício 6.J**

Mostre que o consumo de tempo do algoritmo INTERCALA é $\Theta(n)$, sendo $n$ o número de elementos do vetor que o algoritmo recebe.

# Recursão

CLRS 2.3
AU 2.6, 2.7, 2.9

"To understand recursion, we must first understand recursion."

# Recursão

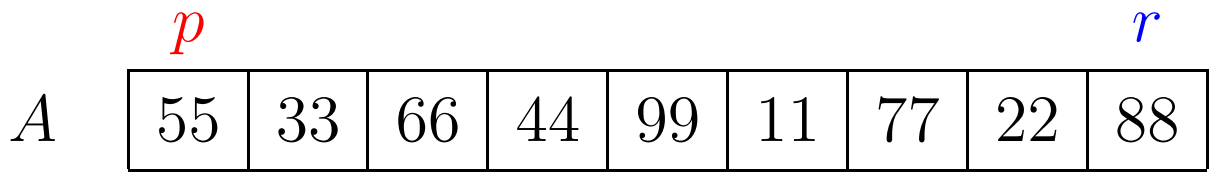
**Recursão:** resolve um problema a partir das soluções de seus subproblemas

# Recursão

**Recursão:** resolve um problema a partir das soluções de seus subproblemas

Problema: Rearranjar $A[p\,..\,r]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Entra:



# Recursão

**Recursão:** resolve um problema a partir das soluções de seus subproblemas

Problema: Rearranjar $A[p\,..\,r]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Entra:

| | $p$ | | | | | | | | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 55 | 33 | 66 | 44 | 99 | 11 | 77 | 22 | 88 |

Sai:

| | $p$ | | | | | | | | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 66 | 77 | 88 | 99 |

# Divisão-e-conquista

Algoritmos por divisão-e-conquista têm três passos em cada nível da recursão:

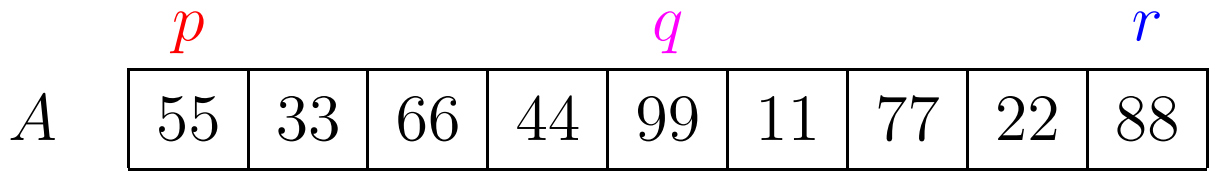
**Dividir:** o problema é dividido em subproblemas de tamanho menor;

**Conquistar:** os subproblemas são resolvidos recursivamente e subproblemas "pequenos" são resolvidos diretamente;

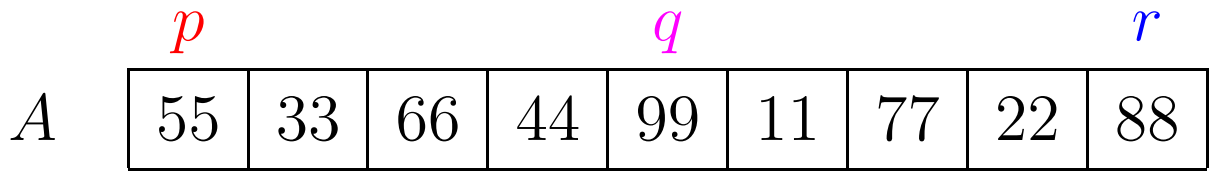
**Combinar:** as soluções dos subproblemas são combinadas para obter uma solução do problema original.

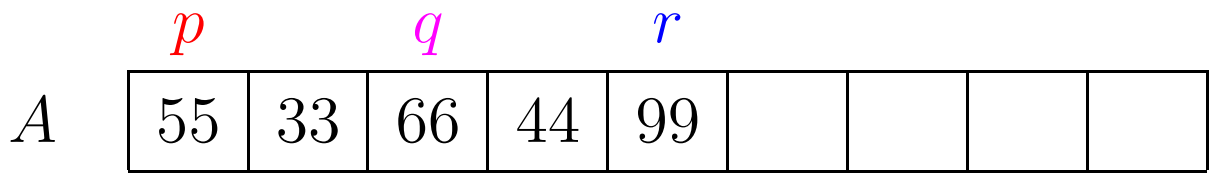
Exemplo: ordenação por intercalação (Merge-sort).

# Merge-Sort

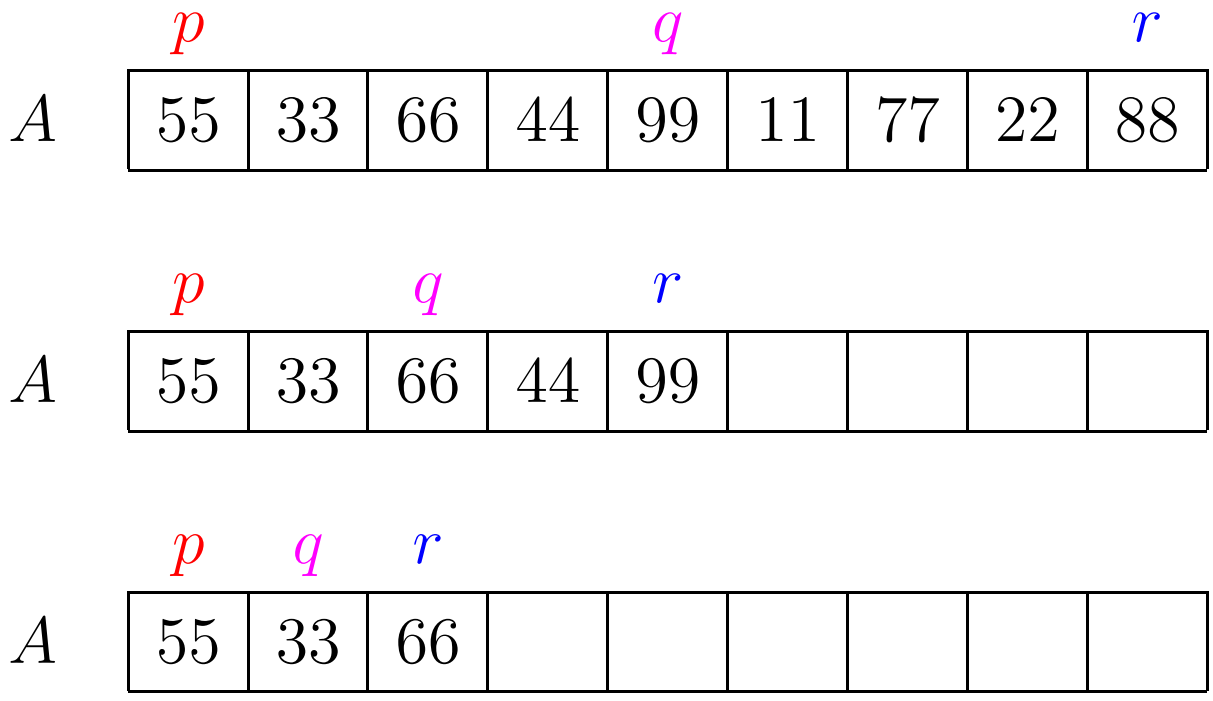


# Merge-Sort

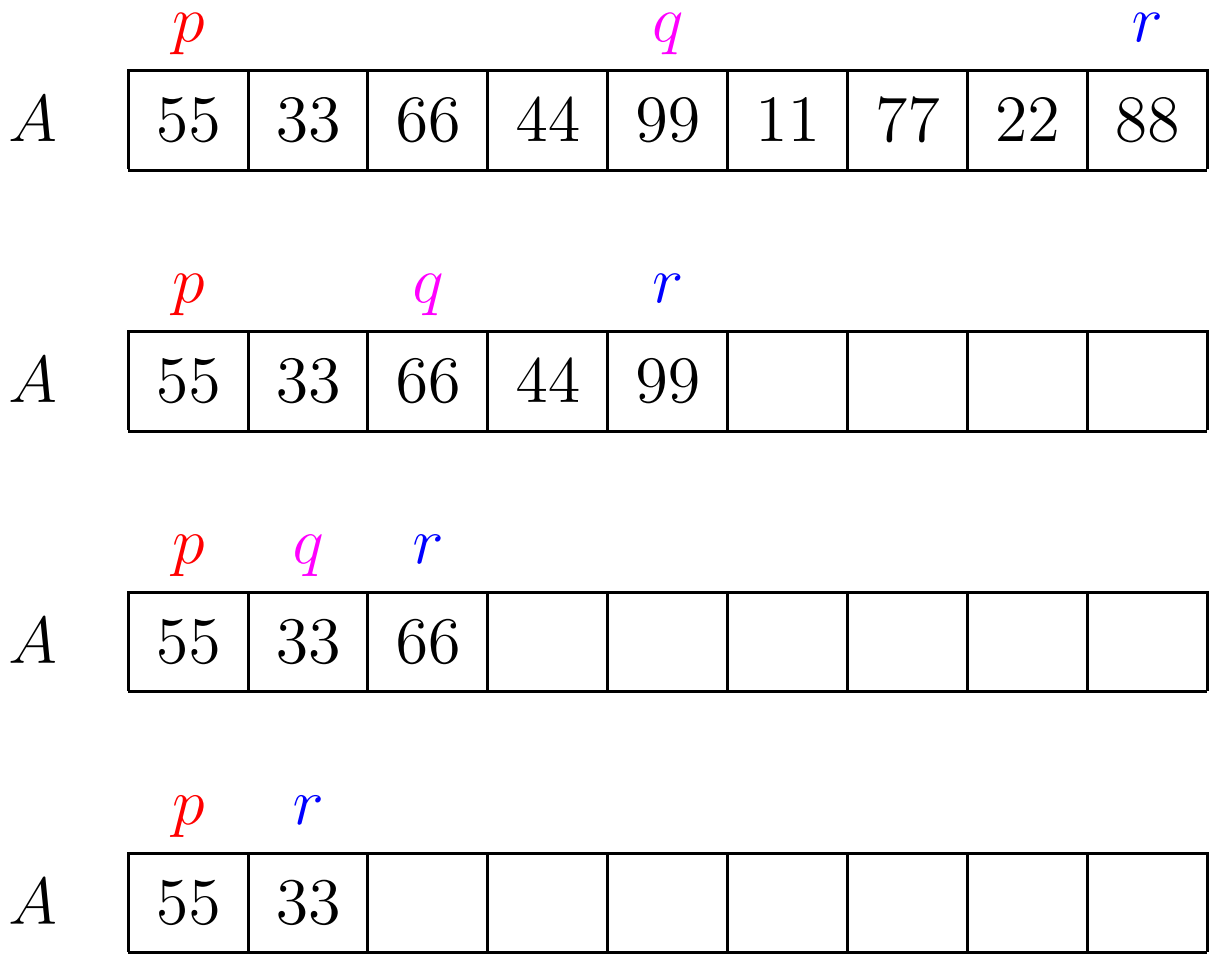


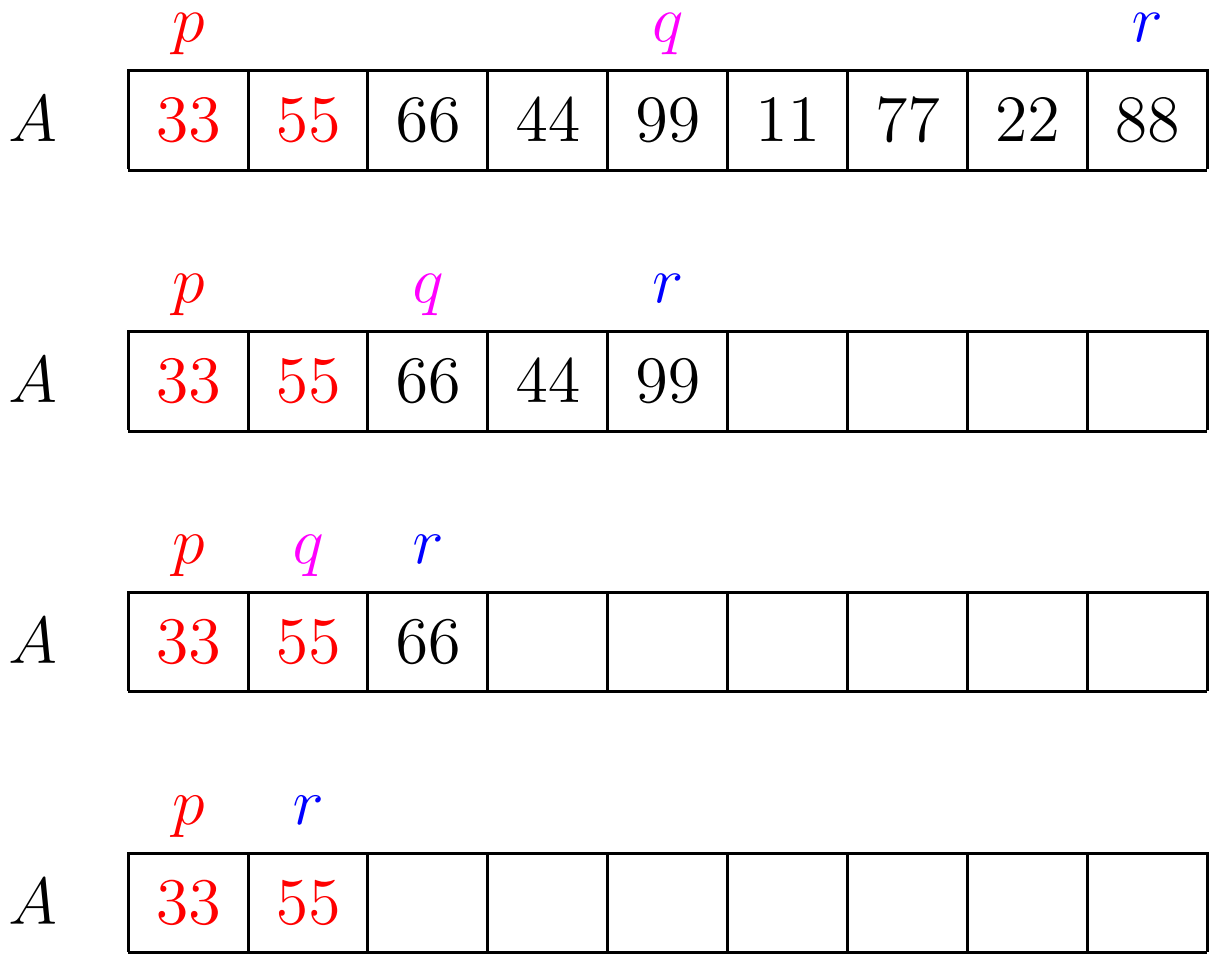
# Merge-Sort



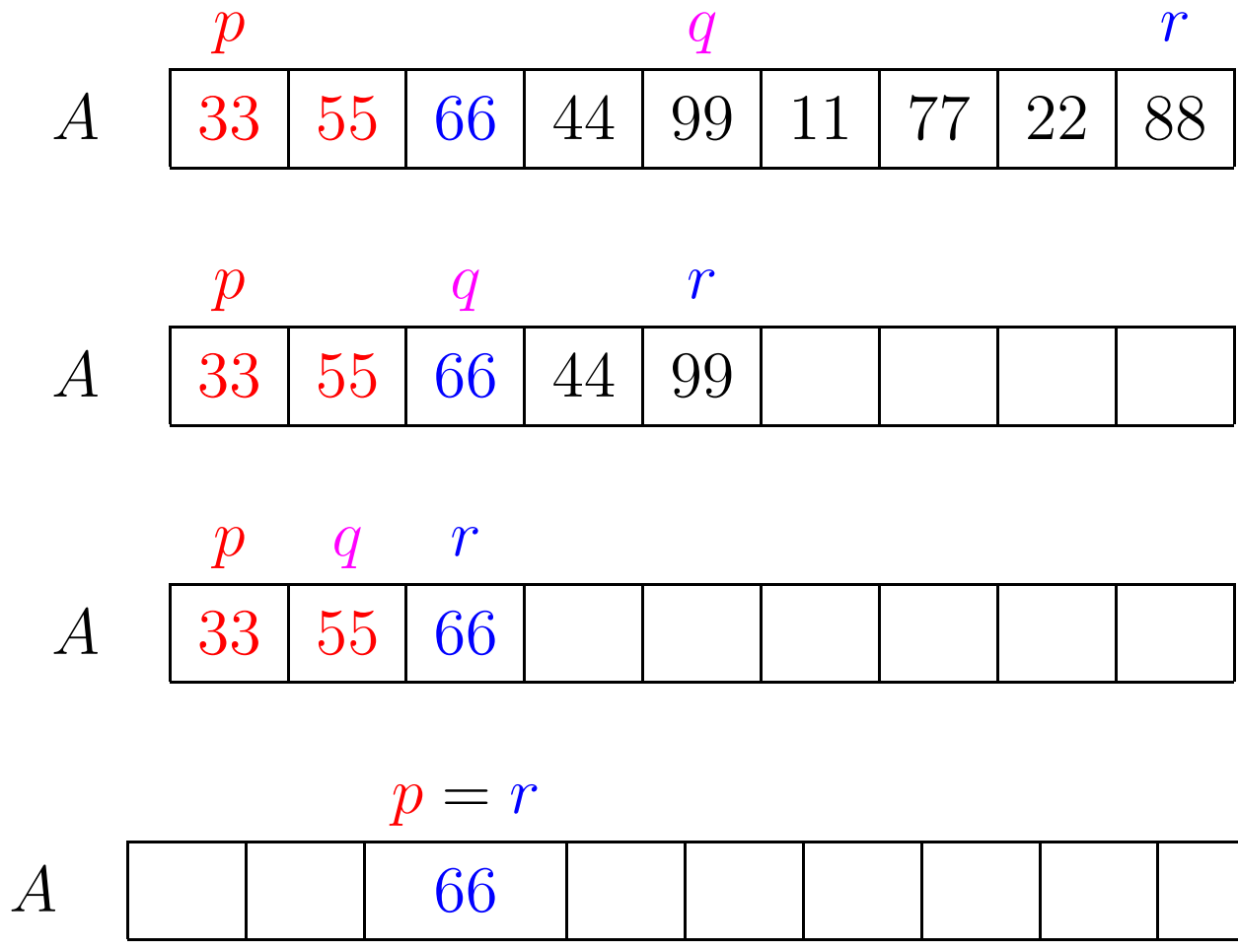
# Merge-Sort


p
q
r
A
55 33 66 44 99 11 77 22 88
p
q
r
A
55 33 66 44 99
p
q
r
A
55 33 66
p
r
A
55 33

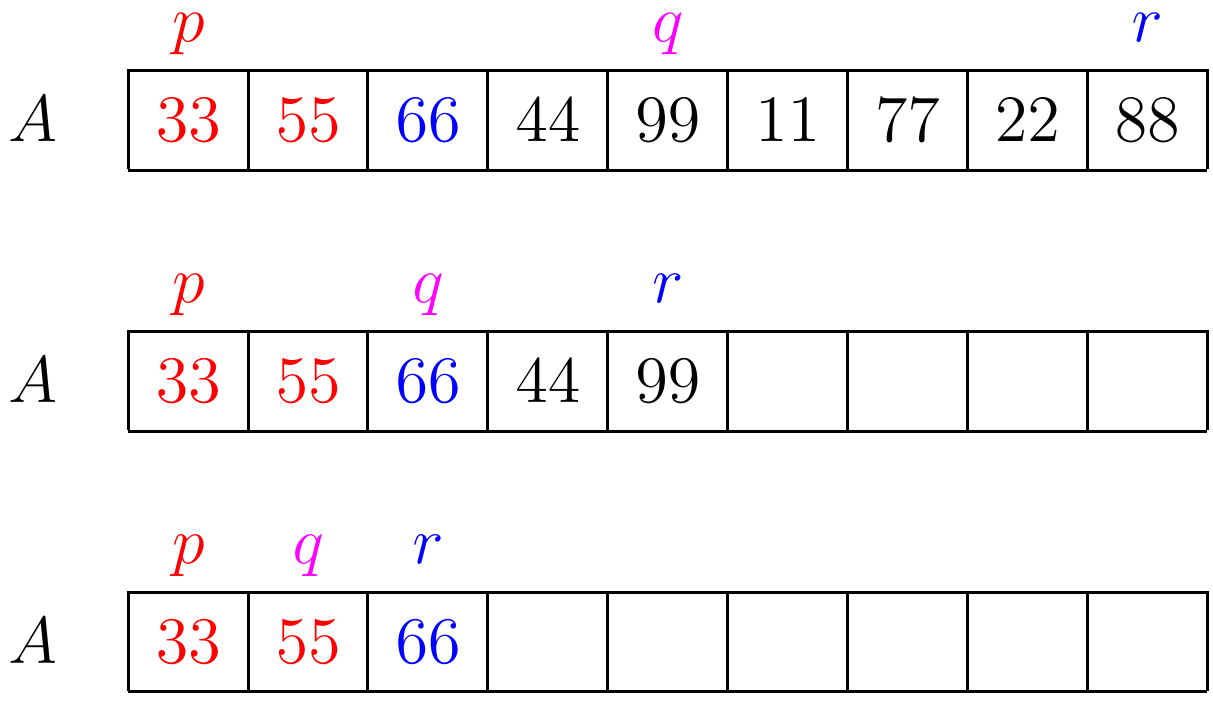
# Merge-Sort


p
q
r
A
33
55
66
44
99
11
77
22
88
p
q
r
A
33
55
66
44
99
p
q
r
A
33
55
66
p
r
A
33
55

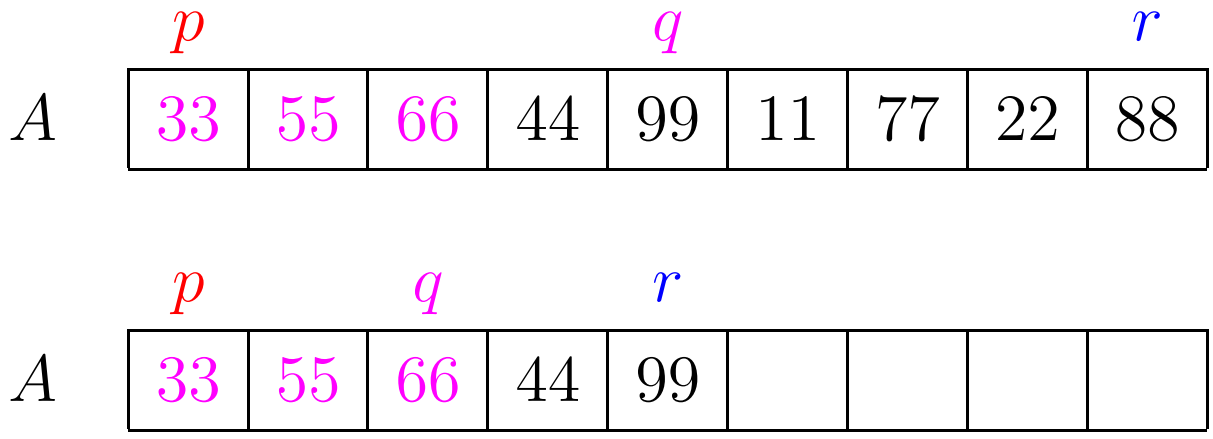
# Merge-Sort


p
q
r
A
33 55 66 44 99 11 77 22 88
p
q
r
A
33 55 66 44 99
p
q
r
A
33 55 66
p = r
A
66

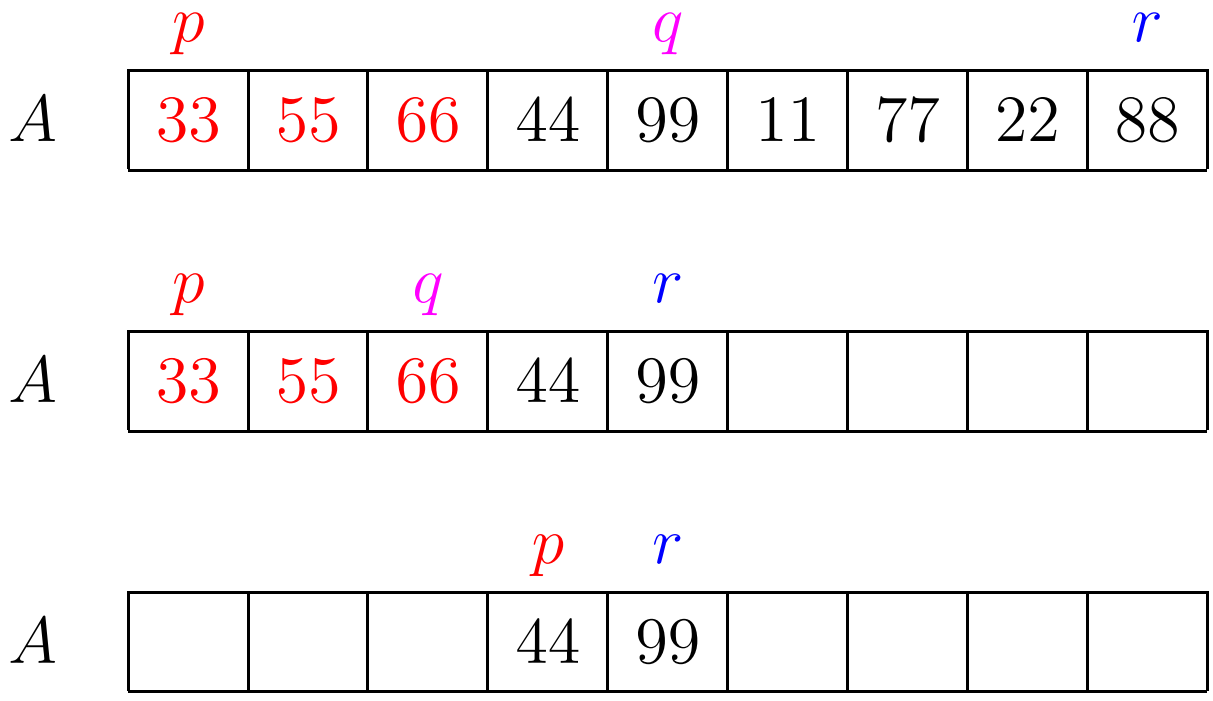
# Merge-Sort



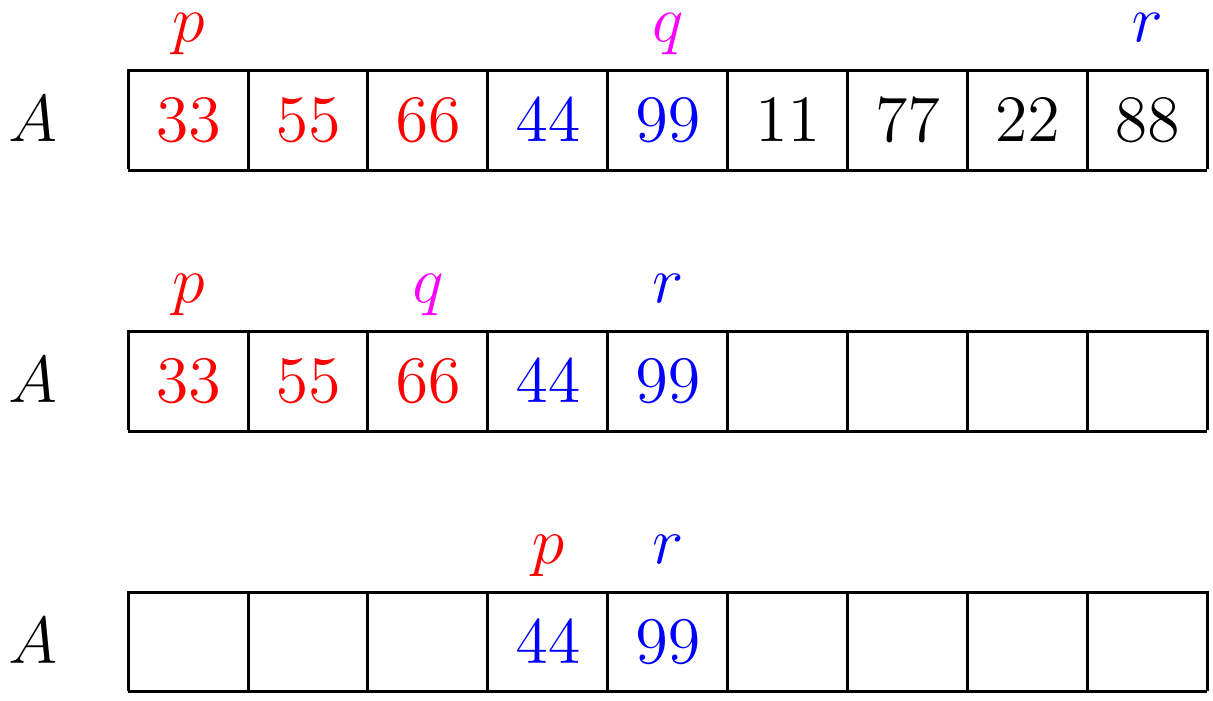
# Merge-Sort



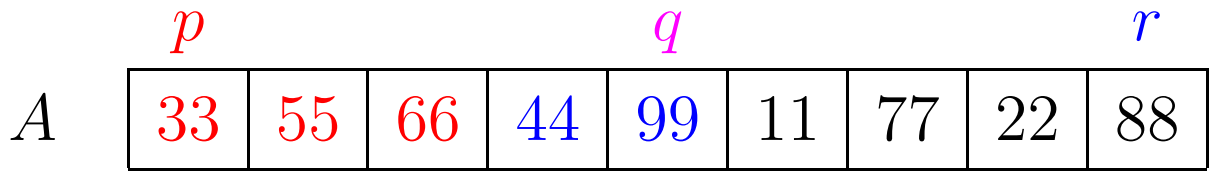
# Merge-Sort

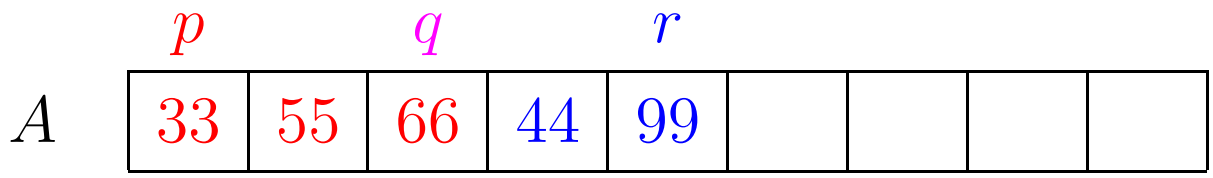


# Merge-Sort

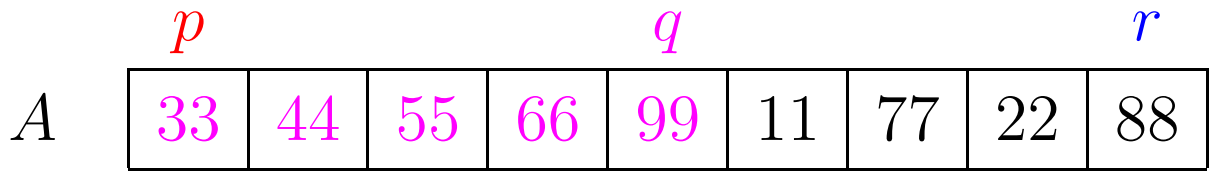


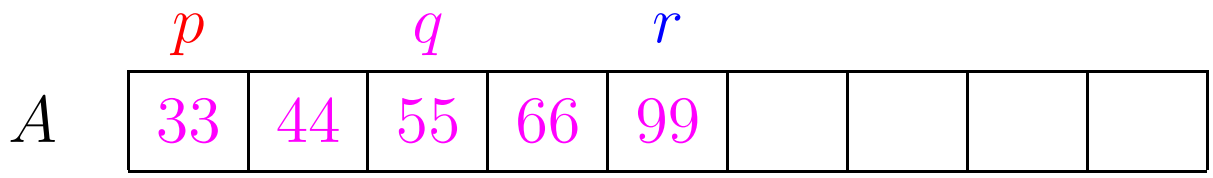
# Merge-Sort



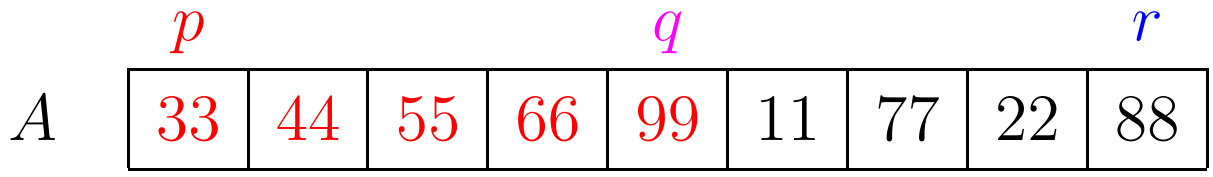



# Merge-Sort

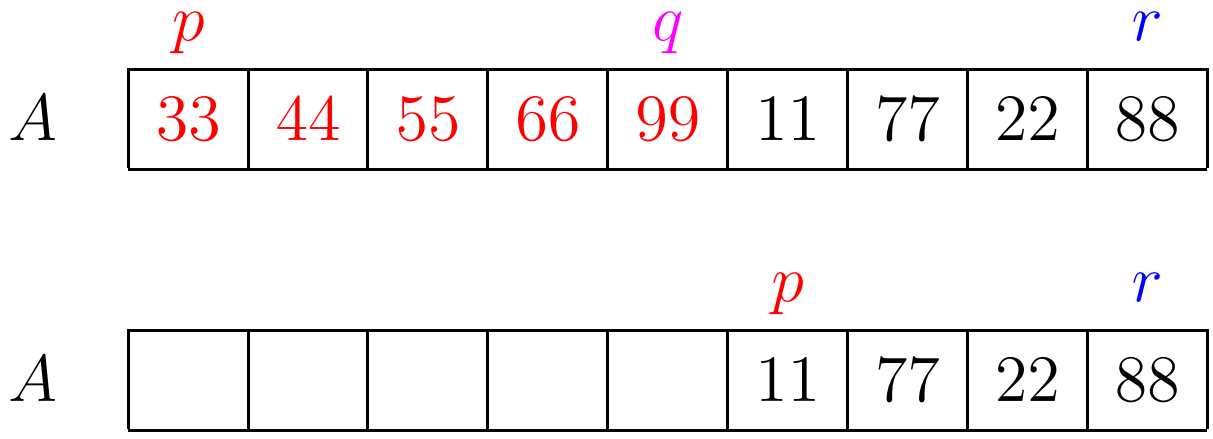


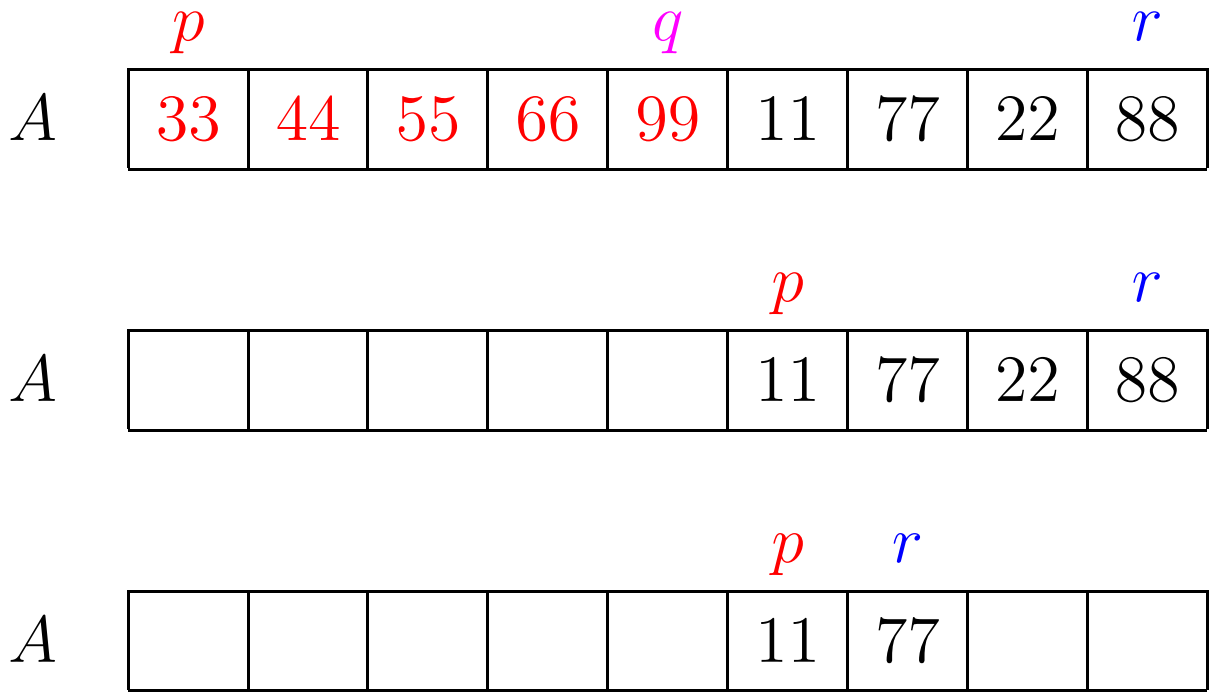
# Merge-Sort



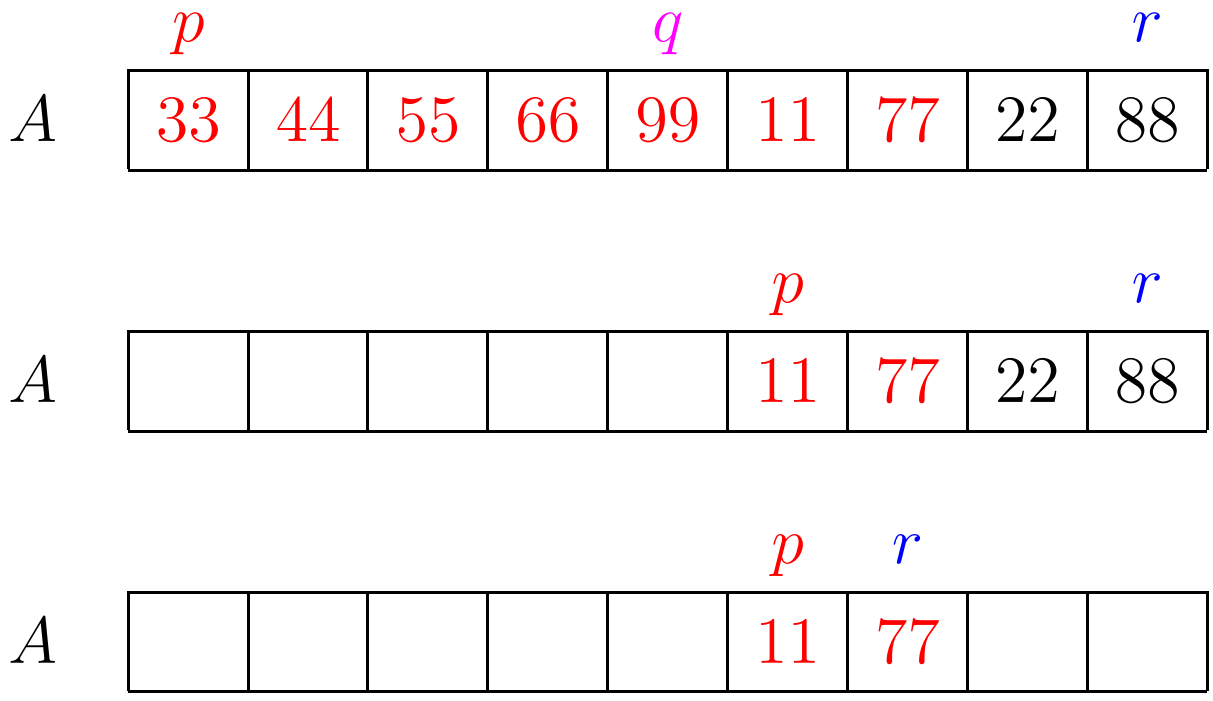
# Merge-Sort



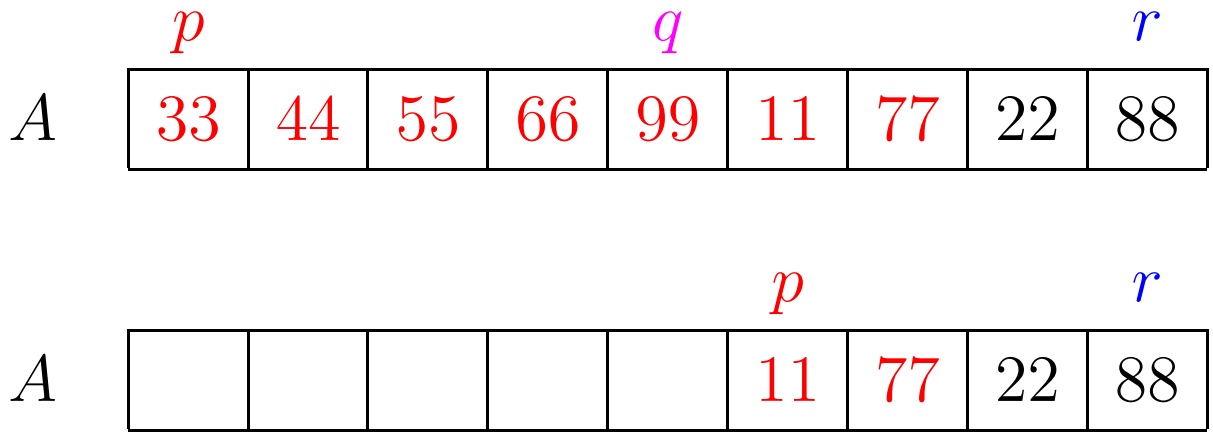
# Merge-Sort



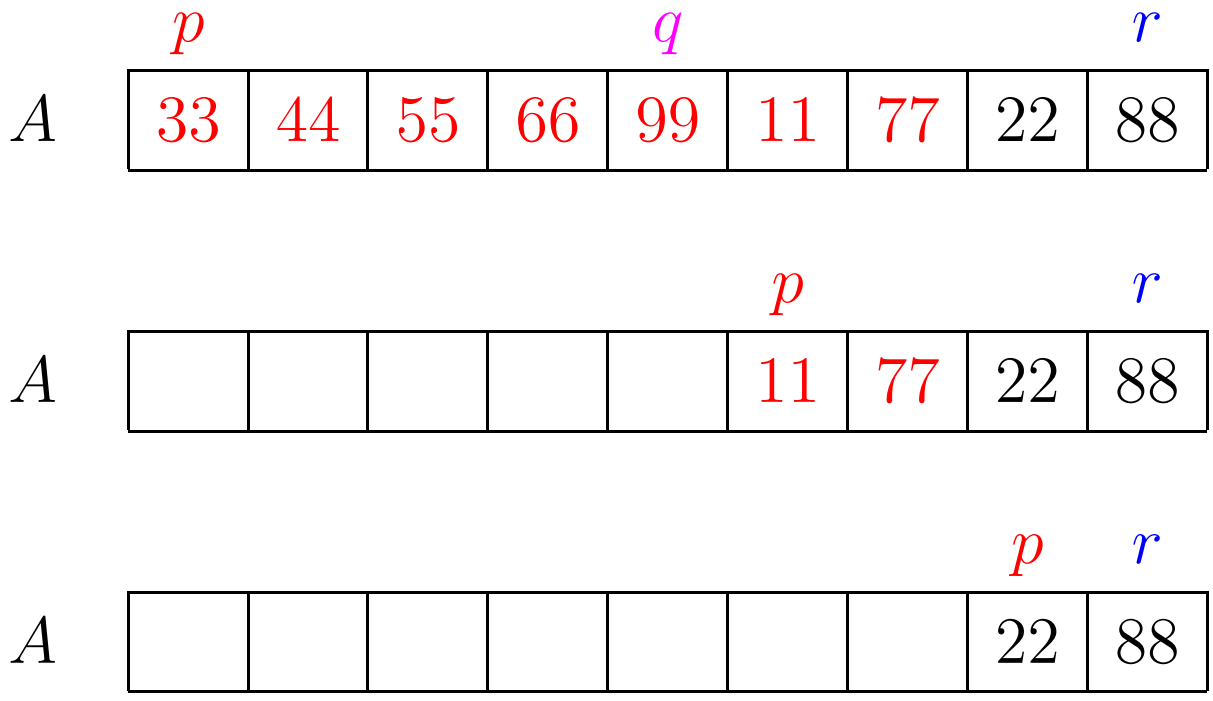
# Merge-Sort



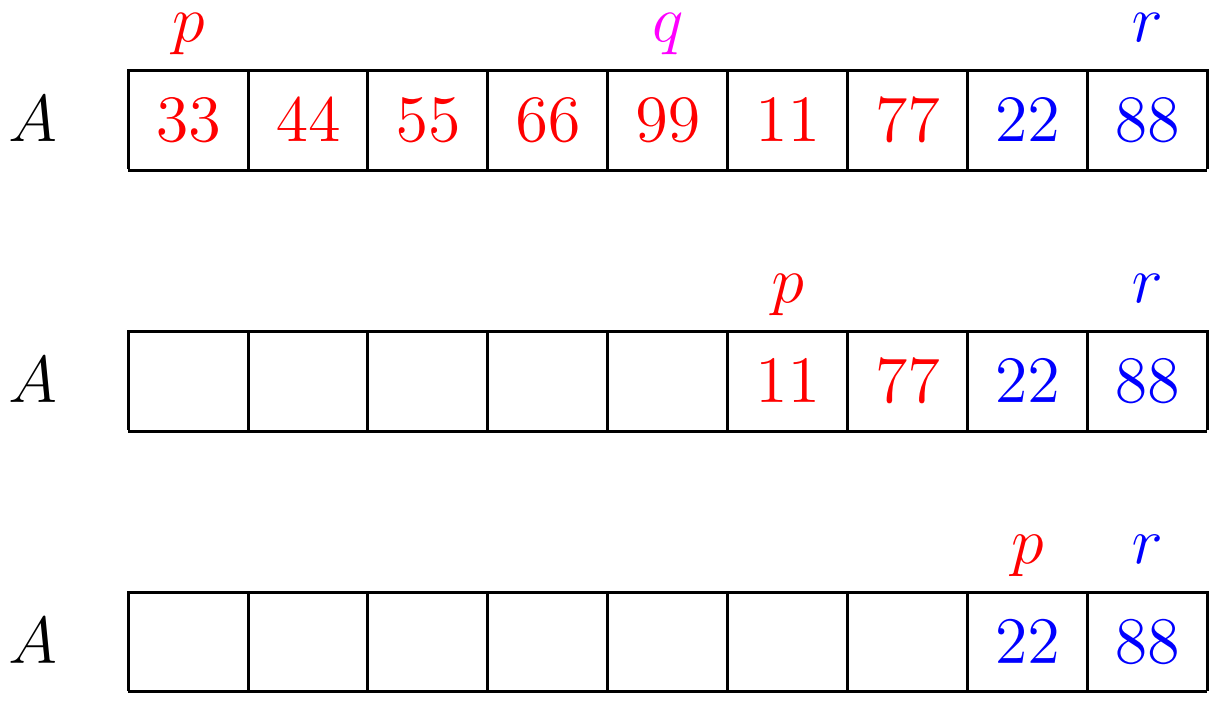
# Merge-Sort



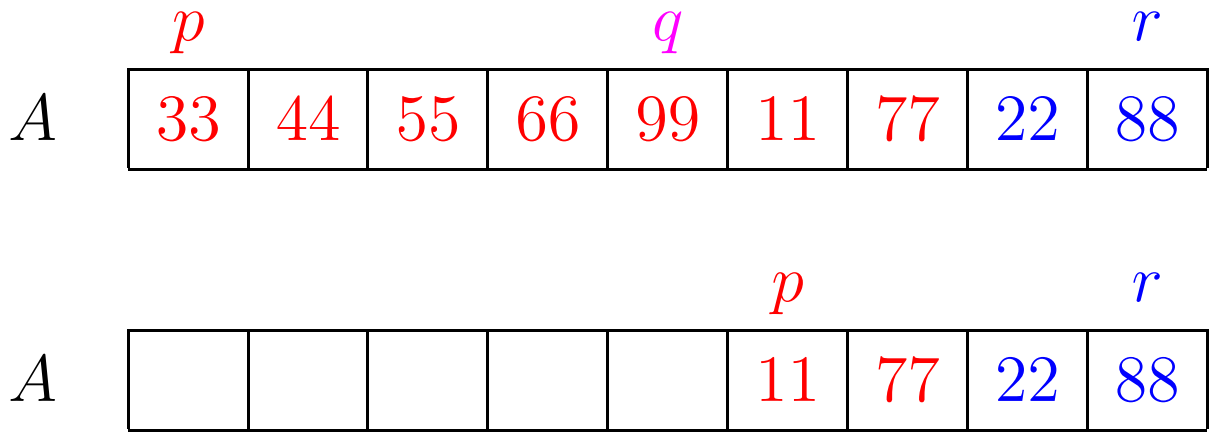
# Merge-Sort



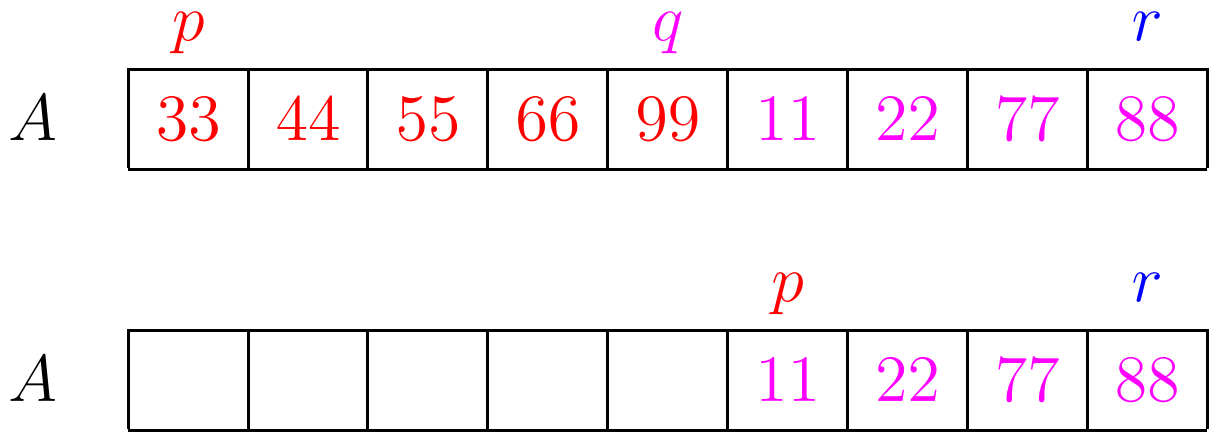
# Merge-Sort



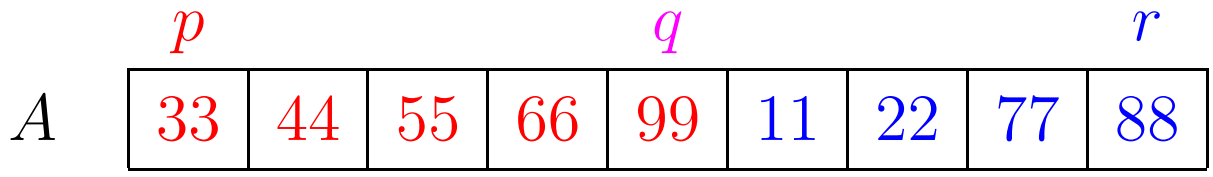
# Merge-Sort



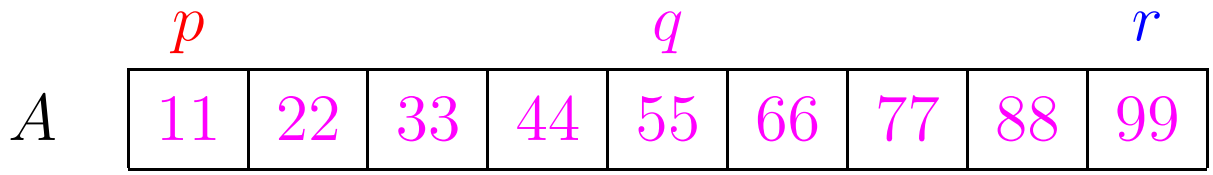
# Merge-Sort



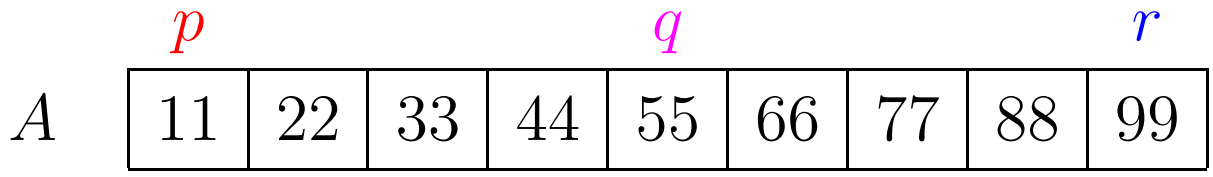
# Merge-Sort



# Merge-Sort



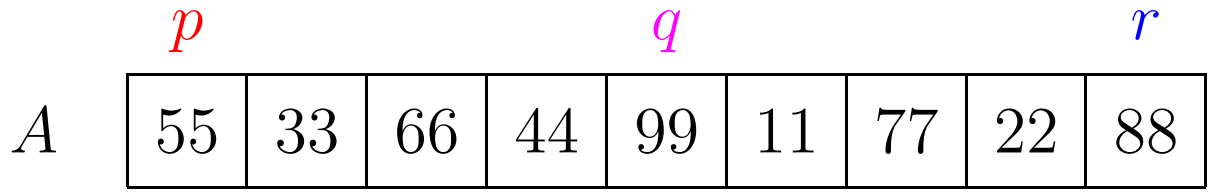
# Merge-Sort



# Merge-Sort

Rearranja $A[p\,..\,r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

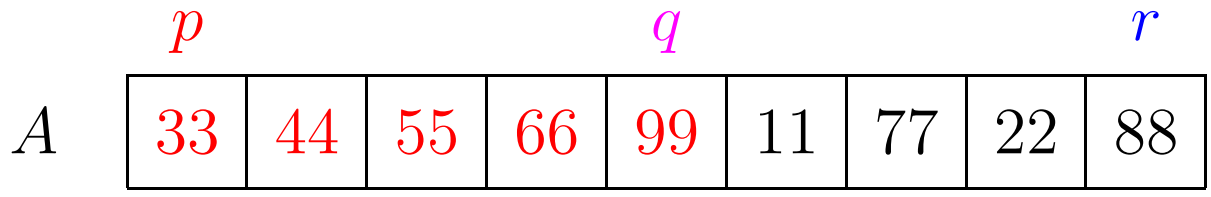
```
MERGE-SORT (A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MERGE-SORT (A, p, q)
4             MERGE-SORT (A, q + 1, r)
5             INTERCALA (A, p, q, r)
```



# Merge-Sort

Rearranja $A[p\,..\,r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

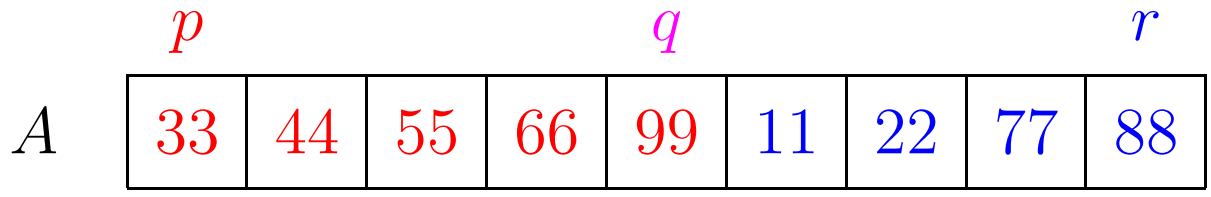
```
MERGE-SORT (A, p, r)
1    se p < r
2         então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3               MERGE-SORT (A, p, q)
4               MERGE-SORT (A, q + 1, r)
5               INTERCALA (A, p, q, r)
```



# Merge-Sort

Rearranja $A[p\,..\,r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

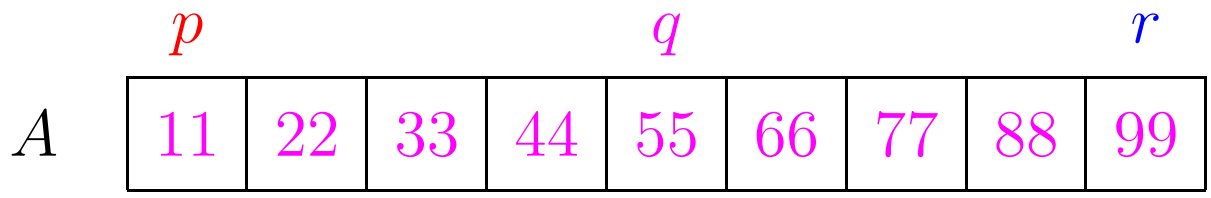
```
MERGE-SORT (A, p, r)
1    se p < r
2         então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3               MERGE-SORT (A, p, q)
4               MERGE-SORT (A, q + 1, r)
5               INTERCALA (A, p, q, r)
```



# Merge-Sort

Rearranja $A[p\,..\,r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

```
MERGE-SORT (A, p, r)
1    se p < r
2         então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3               MERGE-SORT (A, p, q)
4               MERGE-SORT (A, q + 1, r)
5               INTERCALA (A, p, q, r)
```



# Merge-Sort

Rearranja $A[p\,..\,r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

```
MERGE-SORT (A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MERGE-SORT (A, p, q)
4             MERGE-SORT (A, q + 1, r)
5             INTERCALA (A, p, q, r)
```

O algoritmo está correto?

# Merge-Sort

Rearranja $A[p\,..\,r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

```
MERGE-SORT (A, p, r)
1    se p < r
2         então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3               MERGE-SORT (A, p, q)
4               MERGE-SORT (A, q + 1, r)
5               INTERCALA (A, p, q, r)
```

O algoritmo está correto?
A correção do algoritmo, que se apóia na correção do INTERCALA, pode ser demonstrada por indução em $n := r - p + 1$.

# Merge-Sort

Rearranja $A[p\,..\,r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

```
MERGE-SORT (A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MERGE-SORT (A, p, q)
4             MERGE-SORT (A, q + 1, r)
5             INTERCALA (A, p, q, r)
```

Consumo de tempo?

# Merge-Sort

Rearranja $A[p\,..\,r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

```
MERGE-SORT (A, p, r)
1    se p < r
2         então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3               MERGE-SORT (A, p, q)
4               MERGE-SORT (A, q + 1, r)
5               INTERCALA (A, p, q, r)
```

Consumo de tempo?

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

# Merge-Sort

```
MERGE-SORT (A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MERGE-SORT (A, p, q)
4             MERGE-SORT (A, q + 1, r)
5             INTERCALA (A, p, q, r)
```

| linha | consumo na linha |
|---|---|
| 1 | ? |
| 2 | ? |
| 3 | ? |
| 4 | ? |
| 5 | ? |
| $T(n)$ | $= ?$ |

# Merge-Sort

```
MERGE-SORT (A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3             MERGE-SORT (A, p, q)
4             MERGE-SORT (A, q + 1, r)
5             INTERCALA (A, p, q, r)
```

| linha | consumo na linha |
|---|---|
| 1 | $\Theta(1)$ |
| 2 | $\Theta(1)$ |
| 3 | $T(\lceil n/2 \rceil)$ |
| 4 | $T(\lfloor n/2 \rfloor)$ |
| 5 | $\Theta(n)$ |

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n+2)$$

# Merge-Sort

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(1) = \Theta(1)$$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

# Merge-Sort

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(1) = \Theta(1)$$
$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Solução: $T(n)$ é $\Theta(???)$.

Demonstração: ...

# Merge-Sort

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(1) = \Theta(1)$$
$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Solução: $T(n)$ é $\Theta(???)$.

Demonstração: ...

Veremos, mas antes estudaremos Recorrências.

# Exercícios

**Exercício 7.A**

Problema: verificar se $v$ é elemento de $A[p\,..\,r]$.
(Para quais valores de $p$ e $r$ faz sentido?)
Escreva um algoritmo recursivo que resolve o problema. O algoritmo deve devolver $i$ tal que $A[i] = v$.

**Exercício 7.B**

Problema: verificar se $v$ é elemento de vetor crescente $A[p\,..\,r]$. Escreva algoritmo recursivo de busca “linear” e outro de busca “binária”.

**Exercício 7.C**

Escreva versão recursiva da ordenação por inserção. O algoritmo deve rearranjar em ordem crescente qualquer vetor dado $A[p\,..\,r]$.

# Mais exercícios

**Exercício 7.D** (Versão sofisticada de busca)
Problema: verificar se $v$ é elemento de vetor crescente $A[p\,..\,r]$. Escreva um algoritmo que devolva $j$ tal que

$$A[j] \leq v < A[j+1]\,.$$

Quais os possíveis valores de $j$? Escreva duas versões: uma “linear” e uma “binária”. Prove que os seus algoritmos estão corretos.

**Exercício 7.E**
Escreva uma versão recursiva do algoritmo de ordenação por seleção.

**Exercício 7.F**
Escreva uma versão iterativa do MERGE-SORT.

# Recorrências

CLRS 4.1–4.2

AU 3.9, 3.11

# Recorrências

Recorrência =

= “fórmula” que define uma função
em termos d’ela mesma

= algoritmo recursivo que calcula uma função

# Exemplo 1

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(n-1) + 3n + 2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

Define função $T$ sobre inteiros positivos:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $T(n)$ | 1 | 9 | 20 | 34 | 51 | 71 |

```
T(n)
1    se n = 1
2          então devolva 1
3          senão devolva T(n − 1) + 3n + 2
```

# Resolver uma recorrência

Resolver uma recorrência =

= obter uma “fórmula fechada” para $T(n)$

Método da substituição:

“chute” fórmula e verifique por indução

# Exemplo 1 (continuação)

Eu acho que $T(n) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4$.

# Exemplo 1 (continuação)

Eu acho que $T(n) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4$.

Verificação:

Se $n = 1$ então $T(n) = 1 = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} - 4$.

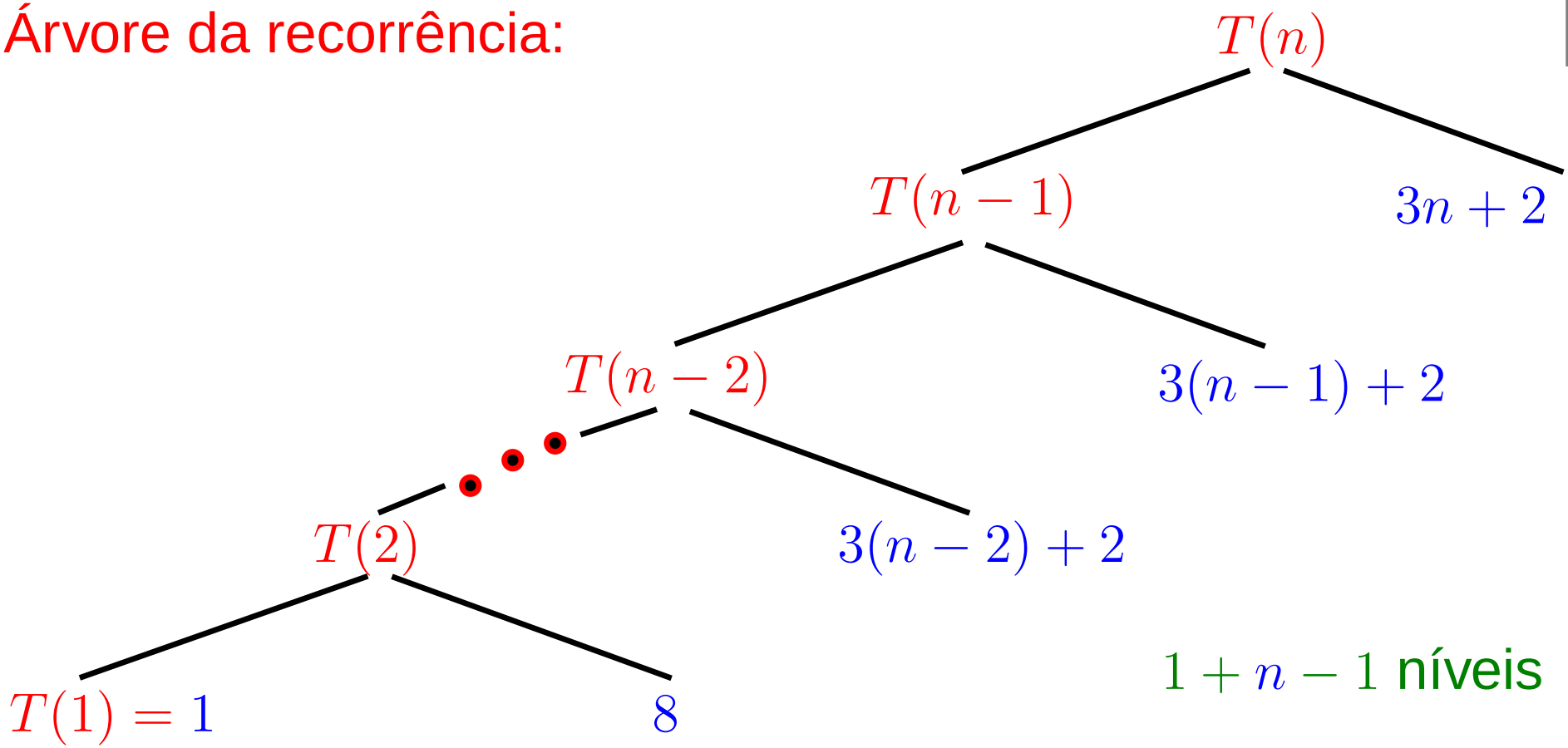
Tome $n \geq 2$ e suponha que a fórmula está certa para $n - 1$:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + 3n + 2 \\ &\overset{\text{hi}}{=} \frac{3}{2}(n-1)^2 + \frac{7}{2}(n-1) - 4 + 3n + 2 \\ &= \frac{3}{2}n^2 - 3n + \frac{3}{2} + \frac{7}{2}n - \frac{7}{2} - 4 + 3n + 2 \\ &= \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4\,. \end{aligned}$$

Bingo!

# Como adivinhei fórmula fechada?

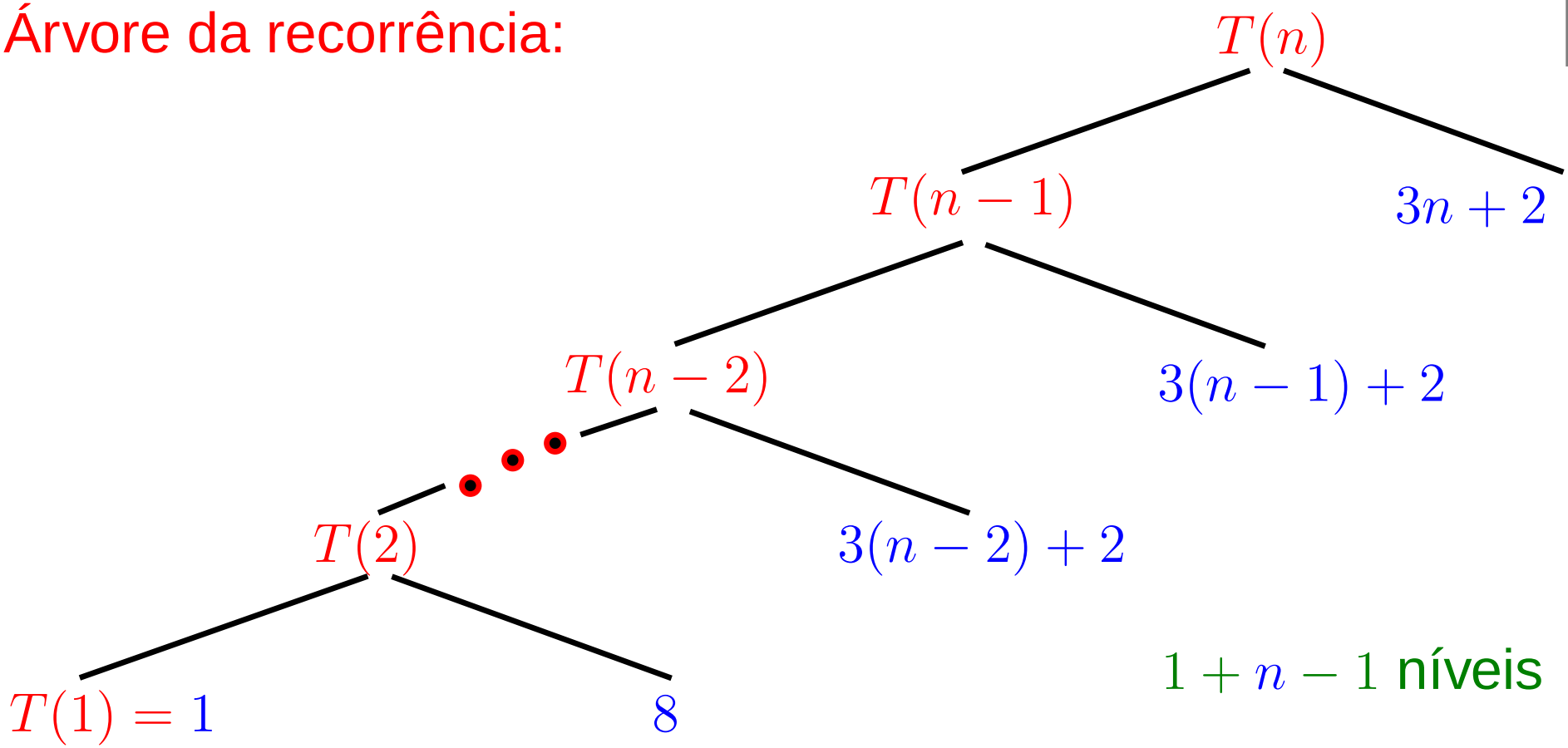
Árvore da recorrência:




$1+n-1$ níveis

# Como adivinhei fórmula fechada?

Árvore da recorrência:




$1 + n - 1$ níveis

$$T(n) = (3n+2) + (3n-1) + \cdots + 8 + 1$$

$$= \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4$$